Evaluation formative sur les paraboles et l'optimalisation

Problème 1. **20 points**

Note : aucune solution provenant de la lecture du graphique n'est pas permise !!!

Montrez clairement votre démarche.

a. Trouver les expressions fonctionnelles (équations) de ces deux fonctions

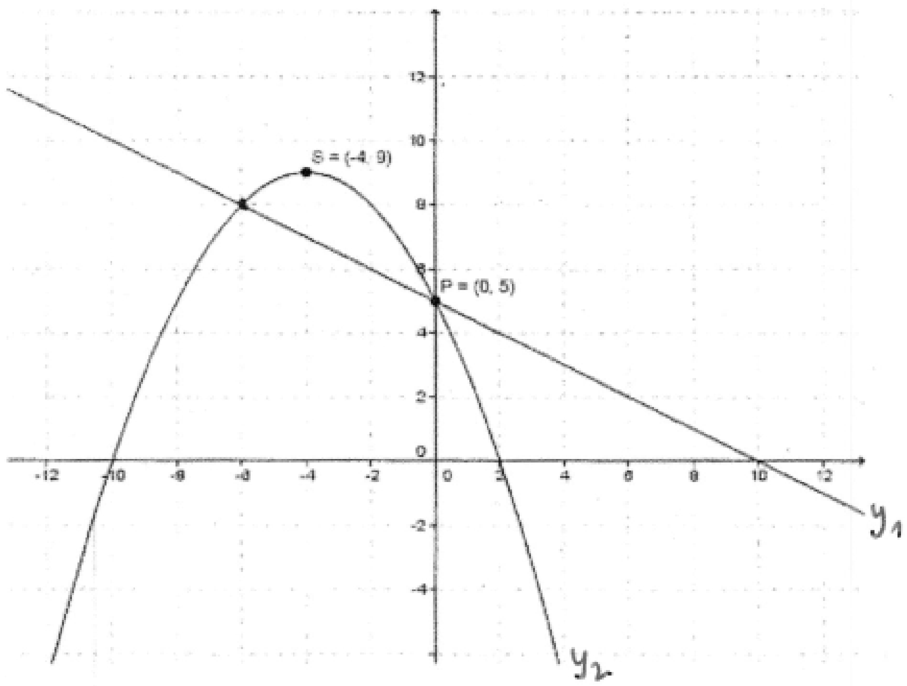
b. Pour la parabole veuillez déterminer les coordonnées des points d'intersection avec les axes OX et OY

c. Trouver les coordonnées des points d'intersection entre ces deux fonctions

d. Calculer la distance verticale qui sépare ces deux fonctions pour x = 2

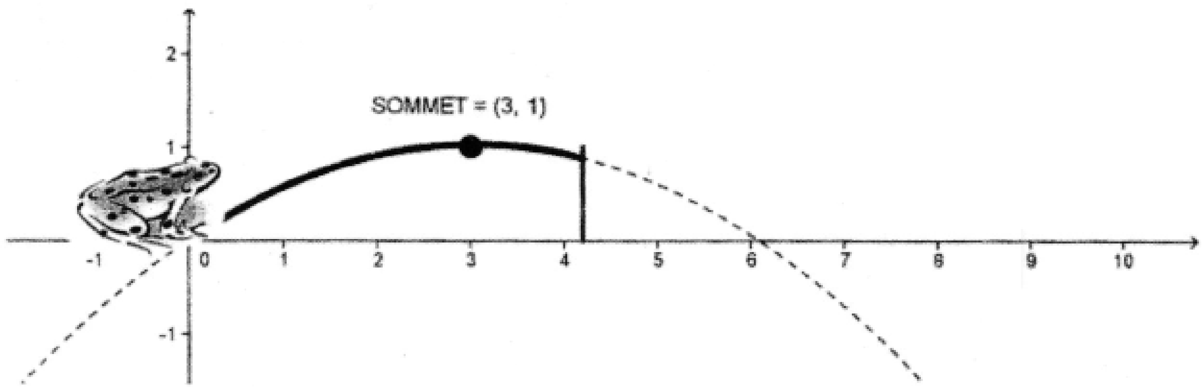
e. Calculer, entre les points d'intersection, la distance verticale qui sépare ces deux fonctions est maximale

Voir feuilles annexes



Problème 2. **5 points**

Une grenouille saute selon l'illustration suivante :



On considère que sa trajectoire est parabolique et que la grenouille s'élance du point (0 ; 0).

Elle rencontre malheureusement un mur situé à 4,2 mètres de son point de départ.

Déterminer à quelle altitude la grenouille heurte le mur, puis ses chances de survie (si elle s'écrase contre le mur, elle va passer dans l'au-delà)

Problème 3. **10 points**

Un commerçant peut vendre 20 appareils électroménagers par semaine au prix unitaire de 400 frs la pièce. Après une étude du marché, il estime que, pour chaque réduction de 10 frs sur le prix de vente unitaire, il pourra vendre deux appareils supplémentaires par semaine.

a. En sachant qu'un appareil lui coûte 200 frs, combien d'appareils et à quel prix a-t-il intérêt à vendre par semaine pour obtenir un profit (bénéfice) maximal ?
b. Quel sera alors ce profit maximal ?

Problème 4. **15 points**

Une étude concernant la mise en vente d'un certain parfum a permis d'établir que la demande en fonction du prix de vente fixé p est $660-22p$. La même étude calcule qu'il en coûte à l'entreprise 820 frs de frais fixes plus 7 frs par article fabriqué.
L'entreprise désire connaitre les éléments suivants :

a. Le prix minimal et le prix maximal de vente pour lesquels elle aura des bénéfices.
b. Le prix pour lequel l'entreprise aura le maximum de recettes (revenu, chiffre d'affaire), ainsi que la valeur de ce revenu.
c. Le prix pour lequel l'entreprise aura le maximum de profit (bénéfice), ainsi que la valeur de ce profit (bénéfice).

Problème 1

a. y_1 : on a les points $(10;0)$ et $(0;5)$; la pente de $y_1 = mx+h$ est $m = \frac{5-0}{0-10} =$
$= \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$; ainsi on a $y_1 = -\frac{1}{2}x + h$; avec $(0;5)$ et donc $x=5$ et $y_1 = 5$,
on a $5 = -\frac{1}{2}\cdot 0 + h \Rightarrow h = 0 \Rightarrow$ l'équation de y_1 est $\underline{y_1 = -\frac{1}{2}x+5}$.

y_2 : le sommet de la parabole est $S = (-4;9)$; en utilisant la forme
$y_2 = a(x-m)^2 + p$ où $S = (m;p)$, on a $m = -4$ et $p = 9$; ainsi on a
$y_2 = a(x+4)^2 + 9$; avec $(0;5)$ et donc $x=0$ et $y_2 = 5$, on a
$5 = a(0+4)^2 + 9 \Rightarrow 5 = 16a + 9 \Rightarrow -4 = 16a \Rightarrow a = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$
$\Rightarrow$ l'équation de y_2 est $\underline{y_2 = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 9}$.

b. <u>Intersection de y_2 avec l'axe x :</u> on pose $y_2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 9 = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{4}(x+4)^2 = 9 \Rightarrow (x+4)^2 = 36 \Rightarrow x+4 = \begin{cases} 6 \\ -6 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 2 \text{ et } x = -10}$.
<u>Intersection de y_2 avec l'axe y :</u> on pose $x = 0 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{4}4^2 + 9 = -4 + 9 = 5 \Rightarrow \underline{y_2 = 5}$.

c. $y_1 = y_2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + 5 = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 9$ | $\cdot(-4)$

$2x - 20 = (x+4)^2 - 36$ | id. remarquable

$2x - 20 = x^2 + 8x + 16 - 36$ | réduction

$2x - 20 = x^2 + 8x - 20$ | $-2x + 20$

$0 = x^2 + 6x$ | factorisation

$0 = x(x+6)$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$;
avec $x = 0$, on a $y = 5$ (voir b)) ;
avec $x = -6$, on a $y = -\frac{1}{2}\cdot(-6) + 5 = 3 + 5 = 8$
$\Rightarrow$ les intersections sont $\underline{(0;5) \text{ et } (-6;8)}$.

d. La distance verticale est donnée par $D = y_2 - y_1 = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 9 - (-\frac{1}{2}x + 5) =$
$= -\frac{1}{4}(x^2 + 8x + 16) + 9 + \frac{1}{2}x - 5 = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 4 + \frac{1}{2}x + 4 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$.
En $x = 2$, on a $D = -\frac{1}{4}\cdot 2^2 - \frac{3}{2}\cdot 2 = -1 - 3 = -4$
$\Rightarrow$ <u>la distance est de 4</u> (en $x = 2$, on a $y_1 > y_2$).

e. Il faut chercher le sommet de $D = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$. On a $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = 0$
$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3/2}{2\cdot(-1/4)} = -\frac{3}{2} : \frac{1}{2} = -3$ et
$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-\frac{1}{4})\cdot 0 - (-\frac{3}{2})^2}{4\cdot(-\frac{1}{4})} = \frac{-9/4}{-1} = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow$ <u>la distance maximale vaut $\frac{9}{4}$ en $x_S = -3$.</u>

Problème 2

Le sommet de la parabole est $S = (3;1)$.

La parabole peut donc s'écrire $y = a(x-m)^2 + p$ avec $m = 3$ et $p = 1$

$\Rightarrow y = a(x-3)^2+1$.

La parabole passe en $(0;0)$: $x=0$ et $y=0$ $\Rightarrow 0 = a(0-3)^2+1 \Rightarrow 0 = 9a+1$

$\Rightarrow 9a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{9} \Rightarrow y = -\frac{1}{9}(x-3)^2+1$.

Avec $x = 4{,}2$, on obtient $y = -\frac{1}{9}(4{,}2-3)^2+1 = -\frac{1}{9}\cdot 1{,}2^2+1 = -\frac{1}{9}\cdot 1{,}44+1$

$= -0{,}16+1 = 0{,}84$.

La grenouille heurte le mur à une hauteur de <u>0,84m.</u>

Si la hauteur du mur est inférieure à 0,84 m, elle va passer au-delà du mur.

Si elle est égale à 0,84m, elle va juste le toucher et avoir quelques contusions.

Si elle est supérieure à 0,84m, elle va l'atteindre en plein...

Problème 3

Notons x le nombre de réduction de 10 frs (nombre de semaine) :

On a :

nombre	prix unitaire	coûts totaux	profit
20	400	$20\cdot 200$	$20\cdot 400 - 20\cdot 200$
$20+2x$	$400-10x$	$(20+2x)\cdot 200$	$(20+2x)(400-10x)-(20+2x)\cdot 200$

On a donc profit $= (20+2x)(400-10x) - (20+2x)\cdot 200 =$

$= 8000 - 200x + 800x - 20x^2 - 4000 - 400x = -20x^2+200x+4000$, ce qui est une parabole avec $a=-20$, $b=200$ et $c=4000$. Son sommet est $(x_S ; y_S)$ avec

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2\cdot(-20)} = \frac{200}{40} = 5$ et $y_S = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-20)\cdot 4000 - 200^2}{4\cdot(-20)} = 4500$

$\Rightarrow$ nb d'appareil $= 20+2\cdot 5 =$ <u>30</u>

prix unitaire $= 400 - 10\cdot 5 =$ <u>350</u>

profit maximal $=$ <u>4500</u>

Problème 4

On a: p = prix de vente unitaire

x = demande = nb de parfums vendus $= 660 - 22p$

revenus $= p \cdot x = p \cdot (660 - 22p) = 660p - 22p^2 = -22p^2 + 660p$

coûts $= 820 + 7x = 820 + 7 \cdot (660 - 22p) = 820 + 4620 - 154p = -154p + 5440$

profit = revenus − coûts $= -22p^2 + 660p - (-154p + 5440) =$

$= -22p^2 + 660p + 154p - 5440 = -22p^2 + 814p - 5440.$

a. On cherche les seuils de rentabilité, autrement dit les p tels que profit = 0.

Profit = 0 $\Rightarrow -22p^2 + 814p - 5440 = 0$, $a = -22$, $b = 814$, $c = -5440$, $b^2 - 4ac =$

$= 814^2 - 4 \cdot (-22) \cdot (-5440) = 662'596 - 478'720 = 183'876 > 0$, $\sqrt{b^2-4ac} \cong 428{,}808$

$\Rightarrow p_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-814 + 428{,}808}{2 \cdot (-22)} \cong 8{,}754$ et

$p_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-814 - 428{,}808}{2 \cdot (-22)} \cong 28{,}246.$

Elle aura donc des bénéfices entre $p_1 \cong 8{,}754$ et $p_2 \cong 28{,}246$, autrement dit entre 8,80 et 28,20 (à 8,75 et 28,25 elle est déjà en perte).

b. On doit chercher le maximum des revenus : $-22p^2 + 660p$.

On a $a = -22$, $b = 660$ et $c = 0 \Rightarrow x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{660}{2 \cdot (-22)} = \dfrac{660}{44} = 15$ et

$y_S = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4 \cdot (-22) \cdot 0 - 660^2}{4 \cdot (-22)} = \dfrac{-435'600}{-88} = 4950.$

Le revenu sera maximum si $p = 15$ et vaudra 4950.−.

c. On doit chercher le maximum du profit : $-22p^2 + 814p - 5440$.

On a $a = -22$, $b = 814$ et $c = -5440 \Rightarrow x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{814}{2 \cdot (-22)} = \dfrac{814}{44} = 18{,}5$ et

$y_S = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4 \cdot (-22) \cdot (-5440) - 814^2}{4 \cdot (-22)} = \dfrac{-183876}{-88} = 2089{,}5.$

Le profit sera maximum si $p = 18{,}5$ et vaudra 2089,5.