Exercice 8.1

a. On donne la suite $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$.
- Calculer les premiers termes S_1, S_2, S_3 et S_4.
- Deviner une formule de sommation donnant la valeur de S_n, puis démonter cette formule.

b. Même exercice avec la suite $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = \cdots$

c. Dans les deux cas, que vaut $S = \lim_{n \to \infty} S_n =$

Exercice 8.2

Démontrer les formules suivantes :

a. $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \quad + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \quad + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

c. Utiliser $S_n = 1 + 2 + 3 + \quad + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour calculer $S = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 2k + 1)$

Exercice 8.3

Démontrer les propositions suivantes :

a. Tous les nombres de la forme $2^{3n} - 1$ sont divisible par 7.

b. $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \quad + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.4

a. Soit r ($r \neq 1$) un nombre réel. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a .

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

b. Pour $|r| < 1$, calculer $S_\infty = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$

c. Déduire les valeurs des sommes suivantes :

- $S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$
- $S_2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$
- $S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots$
- $S_4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \frac{3}{128} + \ldots$

Exercice 8.5

a. Montrer que $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$

b. Calculer $S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots$

Exercice 8.6

Soit a_n le nombre maximal de point d'intersection de n droites du plan.

a. A l'aide d'un dessin, trouver les valeurs de a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5.

b. Expliquer la relation : $a_{k+1} = a_k + k$

c. Démontrer $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$

Exercice 8.7

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Exercice 8.8

Soit la fonction $f(x) = (x^2 + 2x + 5)e^x$. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$,... . Trouver une formule pour $f^{(n)}(x)$ puis démontrer cette formule.