Evaluation formative sur l'optimalisation et les paraboles

Corrigé

Toutes les étapes amenant aux résultats doivent figurer dans vos solutions.
Toute solution sans justification sera ignorée.
Recopiez les solutions au stylo sur la feuille de données
Durée : 80 minutes Nombre de points : 50

Problème 1. **23(2+3+5+4+4+5) points**

Soit la parabole P d'équation $y = -x^2 - x + 2$

a. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole.

Voir feuilles annexes

b. Calculer si possible les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec les axes.

c. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec la droite d d'équation $3x + y = -1$

d. Pour quelle valeur de x la distance entre la parabole P et la droite d est maximale et que vaut la distance maximale.

e. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec la droite $y = \frac{5}{4}$

f. Représenter graphiquement la parabole et la droite dans un même système d'axes.

Problème 2. **4 points**

Trouver l'expression fonctionnelle (équation) de la parabole dont le sommet est S(1 ;4) et qui passe par A(0 ;7).

Problème 3. **15(2+2+4+2+2+3) points**

Pour fabriquer un produit, une entreprise compte 820.- francs de frais fixes auxquels il faut ajouter 7.- francs par article. Une étude a permis d'établir que la demande n du produit en fonction de son prix de vente unitaire p est donnée par la relation : $n = 660-22p$.

a. Etablir la fonction du revenu.

b. Quel est le prix générant le revenu maximum ?

c. Quel est le revenu maximum et pour quel volume de ventes ?

d. Etablir la fonction des coûts.

e. Etablir la fonction du profit.

f. Quels prix doit-on fixer pour atteindre les seuils de rentabilité ?

Problème 4. **8 points**

Un céramiste vend chaque mois 60 plats à 40 francs le plat.
Il sait que pour chaque diminution de 2 francs du prix du plat, il gagnera 5 ventes.
On appelle x le nombre de fois où le prix diminue.

a. Exprimer le prix de vente du plat en fonction de x.

b. Exprimer le nombre de ventes en fonction de x.

c. Exprimer la fonction recette en fonction de x.

d. Quel prix doit-il fixer pour avoir une recette maximale ?

e. A combien s'élèvera la recette maximale ?

Voir feuilles annexes

Problème 1

On a $y=-x^2-x+2$ et $a=-1$, $b=-1$ et $c=2$.

a. On a $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot(-1)}=-\frac{1}{2}$ et $y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot(-1)\cdot 2-(-1)^2}{4\cdot(-1)}=\frac{9}{4}$
$\Rightarrow S\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$.

b. Avec l'axe x : on met $y=0 \Rightarrow -x^2-x+2=0$: $b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 2=1+8=9>0$,
$\sqrt{b^2-4ac}=3 \Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1+3}{2\cdot(-1)}=-2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$
$=\frac{1-3}{2\cdot(-1)}=1 \Rightarrow (-2;0)$ et $(1;0)$.

Avec l'axe y : on met $x=0 \Rightarrow y=-0^2-0+2=2 \Rightarrow (0;2)$.

c. $\begin{cases} y=-x^2-x+2 \\ 3x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow 3x-x^2-x+2=-1 \Rightarrow -x^2+2x+2=-1 \Rightarrow -x^2+2x+3=0$

$a=-1, b=2, c=3$, $b^2-4ac=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0$, $\sqrt{b^2-4ac}=4$

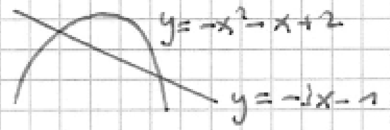
$\Rightarrow x_1=\frac{-2+4}{2\cdot(-1)}=-1$ et $x_2=\frac{-2-4}{2\cdot(-1)}=3$;

avec $x_1=-1$, on a $3x_1+y_1=-1 \Rightarrow -3+y_1=-1 \Rightarrow y_1=2$;

avec $x_2=3$, on a $3x_2+y_2=-1 \Rightarrow 9+y_2=-1 \Rightarrow y_2=-10$

$\Rightarrow (-1;2)$ et $(3;-10)$.

d. Schématiquement, on a



La distance entre la parabole et la droite est donc $-x^2-x+2-(-3x-1)=$
$=-x^2-x+2+3x+1=-x^2+2x+3$ et il faut chercher son maximum = son sommet.
On a $a=-1, b=2, c=3 \Rightarrow x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot(-1)}=1$ et $y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot(-1)\cdot 3-2^2}{4\cdot(-1)}=4$.
Ainsi, la distance est maximale en $x=1$ et elle vaut alors 4.

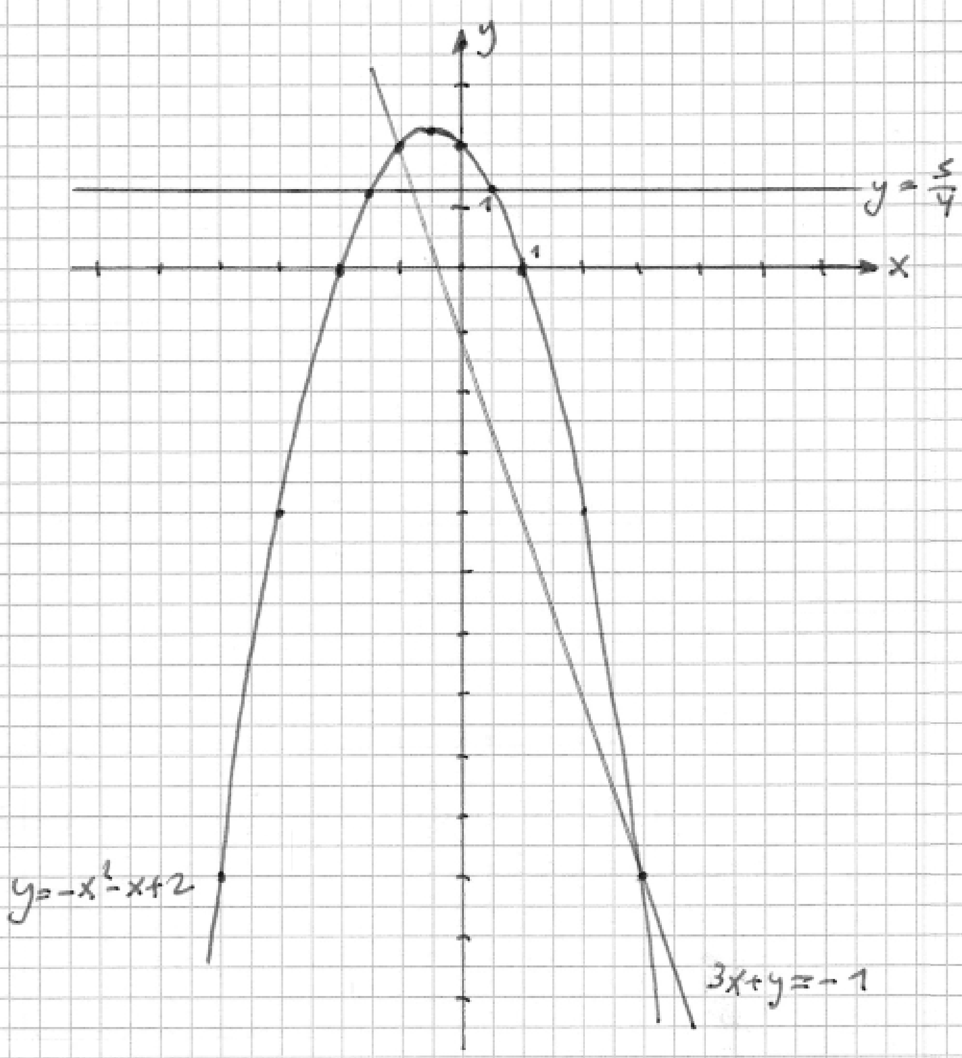
e. $\begin{cases} y=-x^2-x+2 \\ y=\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow -x^2-x+2=\frac{5}{4} \Rightarrow x^2+x-2+\frac{5}{4}=0 \Rightarrow 4x^2+4x-8+5=0$
$\Rightarrow 4x^2+4x-3=0$

$a=4, b=4, c=-3$, $b^2-4ac=4^2-4\cdot 4\cdot(-3)=16+48=64>0$, $\sqrt{b^2-4ac}=8$

$\Rightarrow x_1=\frac{-4+8}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{-4-8}{2\cdot 4}=-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ les points d'intersections sont $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ et $\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{4}\right)$.

f. Voir page suivante



Problème 2.

L'équation de la parabole s'écrit $y = a(x-m)^2 + p$ où $S(m;p)$ est le sommet.

Ici, on a $m = 1$ et $p = 4$ $\Rightarrow$ $y = a(x-1)^2 + 4$.

Avec $A(0;7)$ et donc $x = 0$ et $y = 7$, on a $7 = a(0-1)^2 + 4 \Rightarrow 7 = a + 4 \Rightarrow a = 3$.

L'équation de la parabole est donc $\underline{y = 3(x-1)^2 + 4}$.

Problème 3

On a p = prix de vente unitaire et n = demande = nb d'articles vendus $= 660 - 22p$.

a. Revenu $= n \cdot p = (660 - 22p) \cdot p = 660p - 22p^2 = \underline{-22p^2 + 660p}$.

b. Revenu $= -22p^2 + 660p$: $a = -22$, $b = 660$, $c = 0$ $\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{660}{2\cdot(-22)} = 15$
$\Rightarrow$ <u>15.–</u>.

c. $y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-22) - 660^2}{4\cdot(-22)} = 4951 \Rightarrow$ revenu maximum = <u>4951.–</u>.
avec $p = x_S = 15$, on a $n = 660 - 22 \cdot 15 = 330$ $\Rightarrow$ volume de ventes = <u>330 pièces</u>.

d. Coûts = coûts variables + coûts fixes $= 7n + 820 = 7(660 - 22p) + 820 =$
$= 4620 - 154p + 820 = \underline{-154p + 5440}$.

e. Profit = revenu − coûts $= -22p^2 + 660p - (-154p + 5440) =$
$= -22p^2 + 660p + 154p - 5440 = \underline{-22p^2 + 814p - 5440}$.

f. Seuils de rentabilité $\Rightarrow$ profit $= 0 \Rightarrow -22p^2 + 814p - 5440 = 0$
$a = -22$, $b = 814$, $c = -5440$, $b^2 - 4ac = 814^2 - 4\cdot(-22)\cdot(-5440) = 183'876 > 0$,
$\sqrt{b^2 - 4ac} \cong 428{,}808 \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cong \frac{-814 + 428{,}808}{2\cdot(-22)} \cong 8{,}75$ et
$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cong \frac{-814 - 428{,}808}{2\cdot(-22)} \cong 28{,}25$.
Les seuils de rentabilité sont donc à <u>8,75 frs et 28,25 frs</u>.

Problème 4

On a:

nb de plats	prix d'un plat	recettes
60	40	$60 \cdot 40$
$60+5$	$40-2$	$(60+5)(40-2)$
$60+5x$	$40-2x$	$(60+5x)(40-2x)$

a. $\underline{40-2x}$.

b. $\underline{60+5x}$.

c. $(60+5x)\cdot(40-2x) = 2400-120x+200x-10x^2 = \underline{-10x^2+80x+2400}$.

d. maximum de $-10x^2+80x+2400$: $a=-10$, $b=80$, $c=2400$

$\Rightarrow x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{80}{2\cdot(-10)} = 4$

$\Rightarrow 40-2x = 40-2\cdot 4 = \underline{32 \text{ frs.}}$

e. $y_S = \dfrac{4ac-b^2}{4a} = \dfrac{4\cdot(-10)\cdot 2400-80^2}{4\cdot(-10)} = \underline{2560 \text{ frs.}}$