INDUCTION OU RECURRENCE

Corrigé des exercices

Exercice 8.1

a. On a $S_n = 1+3+5+\dots+(2n-3)+(2n-1)$.

On a: $S_1 = 1$;

$S_2 = 1+3 = 4$;

$S_3 = 1+3+5 = 9$;

$S_4 = 1+3+5+7 = 16$.

On peut alors penser que $S_n = n^2$.

Montrons-la par induction:

Ancrage: $S_n = n^2$ si $n=1$ (voir ci-dessus).

Hypothèse: On suppose la relation $S_n = n^2$ vraie pour n.

Conclusion: Elle est vraie aussi pour n+1 : $S_{n+1} = (n+1)^2$.

Démonstration: On a $S_{n+1} = 1+3+\dots+(2n-1)+(2(n+1)-1) =$

$= 1+3+\dots+(2n-1)+(2n+1) =$

$= S_n + 2n+1$.

Par l'hypothèse de récurrence, on a $S_n = n^2$.

Ainsi $S_{n+1} = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ par une identité remarquable.

On a donc bien $S_{n+1} = (n+1)^2$. CQFD.

b. On a $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$.

On a $S_1 = 1$;

$S_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

$S_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$;

$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{15}{8}$.

On remarque que les dénominateurs sont des puissances de 2: pour le terme n, le dénominateur est 2^{n-1}.

En outre les numérateurs sont 1 de moins que les puissances successives de 2 ($1 = 2^1-1$; $3 = 2^2-1$; $7 = 2^3-1$; $15 = 2^4-1$) : pour le terme n, le numérateur est 2^n-1.

On peut alors écrire $S_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

Montrons-la par induction:

Ancrage: $S_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ est vraie pour $n=1$: $S_1 = 1$ et $\frac{2^1-1}{2^{1-1}} = \frac{2-1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$.

Hypothèse: On suppose la relation $S_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ vraie pour n.

Conclusion: Elle est aussi vraie pour $n+1$: $S_{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.

Démonstration: On a $S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = S_n + \frac{1}{2^n}$.

Par l'hypothèse de récurrence, on a $S_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

Ainsi $S_{n+1} = \frac{2^n-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{2\cdot(2^n-1)+1}{2^n} = \frac{2^{n+1}-2+1}{2^n} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.

On a donc bien $S_{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$. CQFD.

c. a. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 - 0 = 2$.

Exercice 8.2

a. $S_n = 1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ancrage: en $n=1$, on a $S_n = S_1 = 1^2 = 1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{2\cdot3}{6} = \frac{6}{6} = 1$; la relation est vraie si $n=1$.

Hypothèse: on suppose la relation $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ vraie pour n.

Conclusion: elle est vraie aussi pour $n+1$: $S_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

Démonstration: On a $S_{n+1} = 1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = S_n+(n+1)^2$.

Par hypothèse de récurrence, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ainsi $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$

$= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

Ainsi $S_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$. CQFD.

b. $S_n = \frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Ancrage: en $n=1$, on a $S_1 = \frac{1}{1\cdot3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$; la relation est vraie si $n=1$.

Hypothèse: on suppose la relation $S_n = \frac{n}{2n+1}$ vraie pour n.

Conclusion: elle est vraie pour $n+1$ aussi : $S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$.

Démonstration: On a $S_{n+1} = \frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} =$

$= S_n + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$.

Par hypothèse de récurrence, $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

Ainsi $S_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} =$

$= \frac{n+1}{2(n+1)+1}$.

Ainsi $S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$. CQFD.

c. $S = \sum_{k=1}^{n}(3k^2-2k+1) = \sum_{k=1}^{n}3k^2 - \sum_{k=1}^{n}2k + \sum_{k=1}^{n}1 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k + n$.

Comme $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (par a)) et $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$ (par l'énoncé), on obtient:

$S = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1)+n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n^2-n+n =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n^2 = n\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{2} - n\right) = n\left(\frac{2n^2+3n+1}{2} - n\right) = \frac{n}{2}\left(2n^2+3n+1-2n\right) =$

$= \frac{n}{2}\left(2n^2+n+1\right) = \frac{n(2n^2+n+1)}{2}$.

Exercice 8.3

a. Tous les nombres de la forme $2^{3n}-1$ sont divisible par 7.

Ancrage: Avec $n=1$, on a $2^{3n}-1 = 2^3-1 = 8-1 = 7$, qui est divisible par 7 $\Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n=1$.

Hypothèse: On suppose la proposition vraie pour n: $2^{3n}-1$ est divisible par 7.

Conclusion: Elle est aussi vraie pour $n+1$: $2^{3(n+1)}-1$ est divisible par 7.

Démonstration: On a $2^{3(n+1)}-1 = 2^{3n+3}-1 = 2^3 \cdot 2^{3n}-1 = 8 \cdot 2^{3n}-1 =$

$= 8 \cdot (2^{3n}-1)+8-1 = 8 \cdot (2^{3n}-1)+7.$

Par hypothèse de récurrence, $2^{3n}-1$ est divisible par 7: il existe donc $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{3n}-1 = 7 \cdot a$.

On a alors $2^{3(n+1)}-1 = 8 \cdot 7a+7 = 7(8a+1)$ et, donc, $2^{3(n+1)}-1$ est divisible par 7.

CQFD.

b. $S_n = 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1} = 2^n-1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ancrage: Avec $n=1$, on a $S_n = S_1 = 1$ et $2^n-1 = 2^1-1 = 2-1 = 1$ $\Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n=1$.

Hypothèse: On suppose la proposition vraie pour n: $S_n = 2^{n-1}$.

Conclusion: Elle est aussi vraie pour $n+1$: $S_{n+1} = 2^n$.

Démonstration: On a $S_{n+1} = 1+2+2^3+\ldots+2^{n-1}+2^n = S_n+2^n$.

Par hypothèse de récurrence, $S_n = 2^n$.

Ainsi $S_{n+1} = 2^n+2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

CQFD.

Exercice 8.4

a. Avec $r \neq 1$, $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}$.

<u>Ancrage:</u> Avec $n=1$, on a $S_n = S_1 = 1$ et $\dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{1-r}{1-r} = 1 \Longrightarrow$ la proposition est vraie pour $n=1$.

<u>Hypothèse:</u> La proposition est vraie pour n: $S_n = \dfrac{1-r^n}{1-r}$.

<u>Conclusion:</u> La proposition est vraie pour $n+1$: $S_{n+1} = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

<u>Démonstration:</u> $S_{n+1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n = S_n + r^n$.

Par hypothèse de récurrence, on a $S_n = \dfrac{1-r^n}{1-r}$.

Ainsi $S_{n+1} = \dfrac{1-r^n}{1-r} + r^n = \dfrac{1-r^n + r^n(1-r)}{1-r} = \dfrac{1-r^n + r^n - r^{n+1}}{1-r} =$

$= \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

CQFD.

b. Si $|r| < 1$, on a $S_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{1-0}{1-r} = \dfrac{1}{1-r}$.

c. $S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$: on a $r = \frac{1}{3}$ et $|r| < 1$;

ainsi $S_1 = \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{1-1/3} = \dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}$.

$S_2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$: on a $r = \frac{1}{4}$ et $|r| < 1$;

ainsi $S_2 = \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{1-1/4} = \dfrac{1}{3/4} = \dfrac{4}{3}$.

$S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots$: on a $r = -\frac{1}{4}$ et $|r| < 1$;

ainsi $S_3 = \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{1+1/4} = \dfrac{1}{5/4} = \dfrac{4}{5}$.

$S_4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \frac{3}{128} + \dots = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots\right) = \frac{3}{2} \cdot S_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$

Exercice 8.5

a. $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

Ancrage: Avec $n=1$, on a $S_n = S_1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n} = \frac{2^2-1-2}{2^1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ la proposition est vrai pour $n=1$.

Hypothèse: On suppose la proposition vraie pour n: $S_n = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

Conclusion: La proposition est aussi vrai pour $n+1$: $S_{n+1} = \frac{2^{n+2}-(n+1)-2}{2^{n+1}}$.

Démonstration: On a $S_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

Par hypothèse de récurrence, $S_n = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

Ainsi $S_{n+1} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2(2^{n+1}-n-2)+n+1}{2^{n+1}} =$

$= \frac{2^{n+2}-2n-4+n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2}-n-3}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2}-(n+1)-2}{2^{n+1}}$. (CQFD)

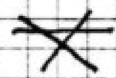
b. On a $S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}-n-2}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}}\right) =$

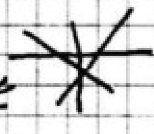
$= \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}}\right) = 2-0-0 = 2$.

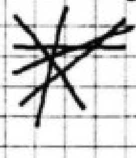
Exercice 8.6

a. Avec 1 droite, on a 0 intersection.

Avec 2 droites, on a 1 intersection au maximum.

Avec 3 droites, on a 3 intersections au maximum: 

Avec 4 droites, on a 6 intersections au maximum: 

Avec 5 droites, on a 10 intersections au maximum: 

Ainsi: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 6$ et $a_5 = 10$.

b. Lorsqu'on rajoute une droite, elle peut couper chaque droite déjà desinée.
S'il y a k droites desinées, on obtiendra ainsi k intersections en plus.
Si on a a_k intersections avec k droites, on aura alors $a_{k+1} = a_k + k$ intersections avec $k+1$ droites.

c. $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$:

<u>Ancrage:</u> Avec $n=1$, on a $a_1 = 0$ (voir ci-dessus) et $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}.1.0 = 0$
$\Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n=1$.

<u>Hypothèse:</u> On suppose la proposition vraie pour n: $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$.

<u>Conclusion:</u> Elle est aussi vraie pour $n+1$: $a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)n$.

<u>Démonstration:</u> D'après b., on a $a_{n+1} = a_n + n$.
Par l'hypothèse de récurrence, on a $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$.
Ainsi $a_{n+1} = a_n + n = \frac{1}{2}n(n-1) + n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n =$
$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1)$

CQFD.

Exercice 8.7. (8)

A montrer : $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1.$

Ancrage : Avec $n=1$, on a $1\cdot 1! = 1$ et $(n+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n=1$.

Hypothèse : On suppose la proposition vraie pour n.

Conclusion : Elle est aussi vraie pour $n+1$.

Démonstration : $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! + (n+1)(n+1)! =$ (hypothèse de récurrence)

$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!\,(1 + n+1) - 1 =$

$= (n+1)!\,(n+2) - 1 = (n+2)! - 1 = ((n+1)+1)! - 1.$ CQFD.

Exercice 8.8

On a $f(x)=(x^2+2x+5)e^x$.
On a $f(x)=u\cdot v$ avec $u=x^2+2x+5$ et $v=e^x$. Ainsi $u'=2x+2$ et $v'=e^x$ et
$f'(x)=u'v+uv'=(2x+2)e^x+(x^2+2x+5)e^x=(x^2+4x+7)e^x$.
On a $f'(x)=u\cdot v$ avec $u=x^2+4x+7$ et $v=e^x$. Ainsi $u'=2x+4$ et $v'=e^x$ et
$f''(x)=u'v+uv'=(2x+4)e^x+(x^2+4x+7)e^x=(x^2+6x+11)e^x$.
On a $f''(x)=u\cdot v$ avec $u=x^2+6x+11$ et $v=e^x$. Ainsi $u'=2x+6$ et $v'=e^x$ et
$f'''(x)=u'v+uv'=(2x+6)e^x+(x^2+6x+11)e^x=(x^2+8x+17)e^x$.

Ainsi : $f'(x)=(x^2+4x+7)e^x$,
$f''(x)=(x^2+6x+11)e^x$,
$f'''(x)=(x^2+8x+17)e^x$.

On va donc supposer que $f^{(n)}(x)=(x^2+2(n+1)x+n(n+1)+5)e^x$.

Ancrage: Avec $n=1$, on a $f'(x)=(x^2+4x+7)e^x$ (voir ci-dessus) et
$(x^2+2(n+1)x+n(n+1)+5)e^x=(x^2+2\cdot(1+1)x+1\cdot(1+1)+5)e^x=$
$=(x^2+4x+7)e^x \Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n=1$.

Hypothèse: On suppose la proposition vraie pour n: $f^{(n)}(x)=(x^2+2(n+1)x+n(n+1)+5)e^x$.

Conclusion: Elle est vraie aussi pour $n+1$: $f^{(n+1)}(x)=(x^2+2(n+2)x+(n+1)(n+2)+5)e^x$.

Démonstration: On a $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'=((x^2+2(n+1)x+n(n+1)+5)e^x)'=$
$=u\cdot v$ avec $u=x^2+2(n+1)x+n(n+1)+5$ et $v=e^x$.
Ainsi $u'=2x+2(n+1)$ et $v'=e^x$.
On a alors $f^{(n+1)}(x)=u'v+uv'=$
$=(2x+2(n+1))e^x+(x^2+2(n+1)x+n(n+1)+5)e^x=$
$=(x^2+(2+2(n+1))x+n(n+1)+5+2(n+1))e^x=$
$=(x^2+2(1+n+1)x+(n+1)(n+2)+5)e^x=$
$=(x^2+2(n+2)x+(n+1)(n+2)+5)e^x$. CQFD.