Lycée Denis-de-Rougemont — Mathématiques de niveau 1

Degré 11

ANALYSE

Corrigé du TE A

Exercice 1

(1)

On a $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+5}{(x-2)^2}$

a) Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f : on doit avoir $(x-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow \underline{D = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.

Parité: $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2-7(-x)+5}{(-x-2)^2} = \dfrac{2x^2+7x+5}{(x+2)^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

Périodicité: Seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique.

Intersection avec l'axe x: On pose $y=0$. On a $\dfrac{2x^2-7x+5}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2-7x+5=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=2$, $b=-7$ et $c=5$; on a $\Delta = b^2-4ac = (-7)^2-4\cdot2\cdot5 = 49-40 = 9$ et $\sqrt{\Delta}=3$; ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7+3}{2\cdot2} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7-3}{2\cdot2} = \dfrac{4}{4} = 1$.

Les intersections avec l'axe x sont donc $(1;0)$ et $(\frac{5}{2};0)$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$, on a alors $y = \dfrac{5}{(-2)^2} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow (0;\frac{5}{4})$.

Tableau de signes:

x		1		2		$\frac{5}{2}$	
$2x^2-7x+5$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	////	$-$	0	$+$

Asymptotes verticales: L'exclu est $x=2$.

Si $x \underset{<}{\rightarrow} 2$, $f(x) \rightarrow \dfrac{-15}{0+} = -\infty$.

Si $x \underset{>}{\rightarrow} 2$, $f(x) \rightarrow \dfrac{-15}{0+} = -\infty$.

Ainsi $x=2$ est une asymptote verticale avec $f(x) \rightarrow -\infty$ si $x \underset{\gtrless}{\rightarrow} 2$.

Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+5}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-4x+4}$.

Effectuons la division euclidienne de $2x^2-7x+5$ par x^2-4x+4:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-7x+5 & x^2-4x+4 \\ \cline{2-2} -(2x^2-8x+8) & 2 \\ \cline{1-1} x-3 & \end{array}$$

Ainsi on a $f(x) = 2 + \dfrac{x-3}{x^2-4x+4} = 2 + \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$.

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{x-3}{(x-2)^2} \to 0_+$. Si $x \to -\infty$, $\dfrac{x-3}{(x-2)^2} \to 0_-$.

Ainsi $y=2$ est une asymptote horizontale et $y \to 2_+$ si $x \to +\infty$ et $y \to 2_-$ si $x \to -\infty$.

Intersections avec l'asymptote non verticale: Cherchons les x tels que $f(x) = 2$.

On a: $f(x) = 2 \Rightarrow \dfrac{2x^2-7x+5}{(x-2)^2} = 2 \Rightarrow 2x^2-7x+5 = 2(x-2)^2$

$\Rightarrow 2x^2-7x+5 = 2(x^2-4x+4) \Rightarrow 2x^2-7x+5 = 2x^2-8x+8$

$\Rightarrow -7x+5 = -8x+8 \Rightarrow x+5 = 8 \Rightarrow x = 3.$

Avec $x=0$, on a $f(x) = \dfrac{2\cdot 3^2 - 7\cdot 3 + 5}{(3-2)^2} = 18-21+5 = 2.$

$\Rightarrow \underline{\underline{(3;2)}}.$

Dérivée: On a $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+5}{(x-2)^2} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 2x^2-7x+5$ et $v = (x-2)^2$.

$f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = 4x-7$ et $v' = 2(x-2)$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{(4x-7)(x-2)^2 - (2x^2-7x+5)\,2(x-2)}{((x-2)^2)^2} =$

$= \dfrac{(x-2)\big((4x-7)(x-2) - 2(2x^2-7x+5)\big)}{(x-2)^4} = \dfrac{(4x-7)(x-2) - 2(2x^2-7x+5)}{(x-2)^3} =$

$= \dfrac{4x^2-8x-7x+14-4x^2+14x-10}{(x-2)^3} = \underline{\underline{\dfrac{-x+4}{(x-2)^3}}}.$

Points à tangente horizontale: Ce sont les x tels que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-x+4}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow -x+4 = 0 \Rightarrow x = 4.$

Avec $x=4$, $f(x) = \dfrac{2\cdot 4^2 - 7\cdot 4 + 5}{(4-2)^2} = \dfrac{32-28+5}{4} = \dfrac{9}{4}.$

Le point à tangente horizontale est donc $\underline{\underline{\left(4; \tfrac{9}{4}\right)}}$.

Tableau des variations (ou de croissance):

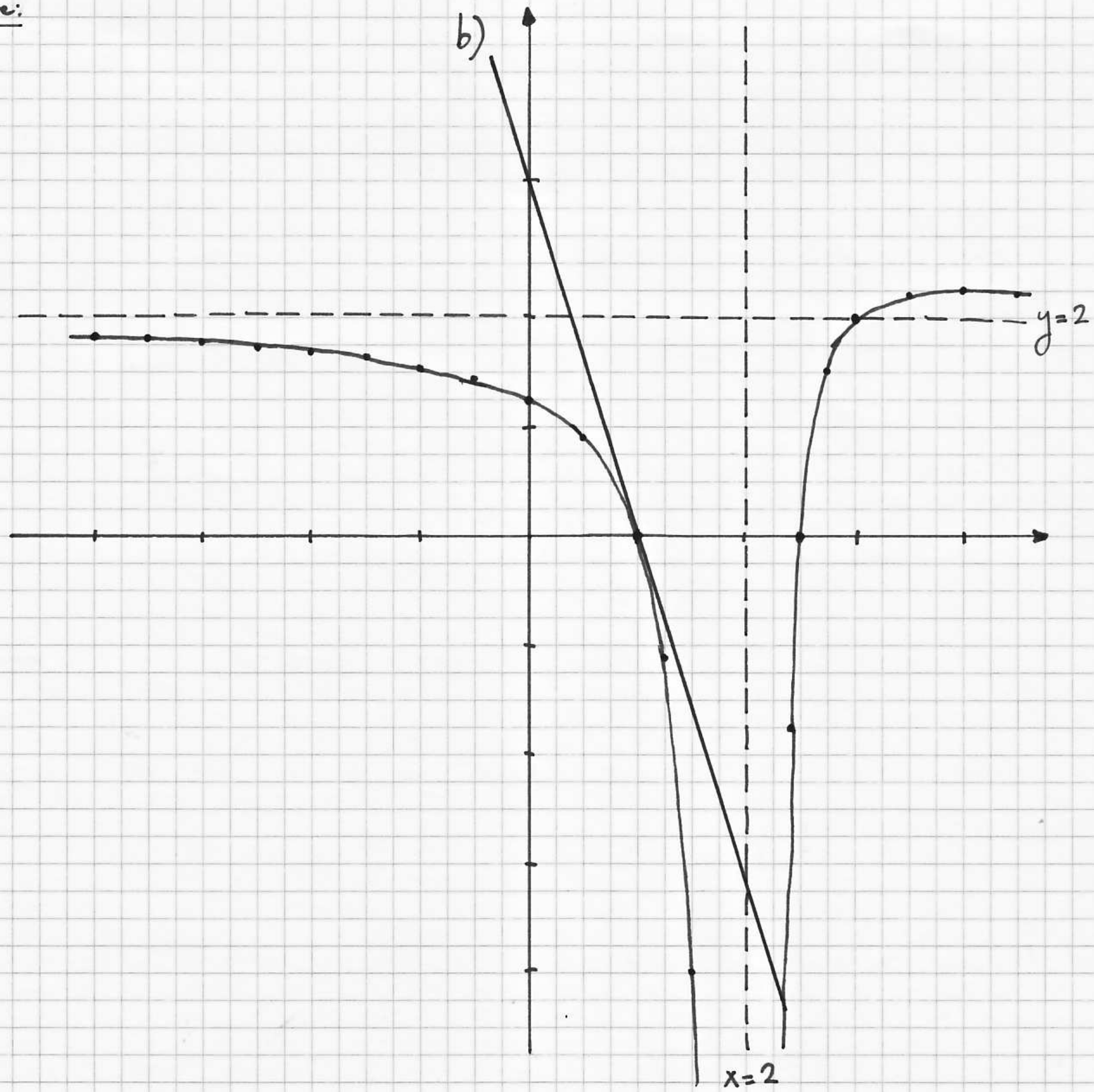
x		2		4	
$-x+4$	+	+	+	0	−
$(x-2)^3$	−	0	+	+	+
$f'(x)$	−	‖	+	0	−
$f(x)$	↘	‖	↗	max	↘

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty ; 2[\cup]4 ; +\infty[$ et croissante sur $]2 ; 4[$.

Tableau de valeurs:

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0,5	1,25	1,5	2,25	2,4	2,75	3,5	4,5
$f(x)$	1,81	1,79	1,76	1,73	1,69	1,63	1,55	1,44	0,89	-1,11	-4	-10	-1,75	1,56	2,22	2,24

Graphe:



b) L'équation de la tangente au graphe de f en $x=1$ est donnée par $y=mx+h$, où $m=f'(1)$.

D'après a), on a $f'(x)=\dfrac{-x+4}{(x-2)^3}$.

Ainsi $m=f'(1)=\dfrac{-1+4}{(1-2)^3}=\dfrac{3}{(-1)^3}=\dfrac{3}{-1}=-3$.

L'équation de la tangente s'écrit donc $y=-3x+h$.

Pour calculer h, on utilise le point de tangence T dont les coordonnées sont $T(1;f(1))$.

On a $f(1)=\dfrac{2\cdot 1^2-7\cdot 1+5}{(1-2)^2}=\dfrac{2-7+5}{(-1)^2}=\dfrac{0}{1}=0$. Ainsi $T(1;0)$.

Par substitution dans l'équation de la tangente, on trouve :

$0=-3\cdot 1+h \Rightarrow h=3$.

L'équation de la tangente est donc $\underline{\underline{y=-3x+3.}}$

Voir a) pour sa représentation graphique.