Exercice 11.1

Soient A et B deux événements. Exprimer les événements suivants en utilisant $A, B, \cap, \cup, \overline{A}, \overline{B}$ et dessiner les diagrammes de Venn correspondant.

a. A mais pas B.

b. Ni A ni B.

c. Soit A soit B, mais pas les deux.

Exercice 11.2

Une pièce de monnaie et un dé sont lancés.

a. Décrire l'univers de l'expérience (en inventoriant les issues)

b. Décrire explicitement les événements suivants :

   a) A ={face et un nombre pair apparaissent}

   b) B ={un nombre premier apparaît}

   c) C ={pile et un nombre impair apparaissent}

c. Exprimer de manière explicite les événements :

   a) A ou B se produisent

   b) A et B se produisent

   c) Seul B se produit.

d. Quelle paire d'événements parmi A, B et C est incompatible ?

Exercice 11.3

Soient les événements A et B tels que . $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$. Calculer

a. $P(A \cup B)$

b. $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

c. $P(A \cap \overline{B})$

d. $P(A \cup \overline{B})$

Exercice 11.4

Déterminer la probabilité p de chacun des événements suivants :

a. Un nombre pair apparait lors du lancer d'un dé non truqué

b. Au moins un face apparaît lors du lancer de 3 pièces

c. Une bille rouge est tirée aléatoirement d'un sac contenant 4 billes blanches, 3 rouges et 5 jaunes.

Exercice 11.5

Dans un groupe de dix élèves, trois sont gauchers. Deux élèves sont choisis au hasard. Déterminer la probabilité que :

a. Les deux soient gauchers

b. Aucun des deux ne soit gaucher.

c. Au moins l'un d'eux soit gaucher.

d. Exactement l'un deux soit droitier

Exercice 11.6

Un dé rouge et un dé noir sont lancés. Déterminer la probabilité d'obtenir :

a. un trois "rouge" et un cinq "noir".
b. un trois et un cinq.
c. le même résultat sur les deux dés.
d. une somme égale à huit
e. une somme paire
f. aucun six.
g. au moins un six.

Exercice 11.7

Une école compte 468 filles, ce qui représente 65% de tous les étudiants. 240 étudiants font partie de la chorale, un ensemble qui contient cinq fois plus de filles que de garçons. Déterminer les probabilités suivantes.

a. Un étudiant choisi au hasard est une fille de la chorale.
b. Un étudiant choisi au hasard est une fille qui n'est pas dans la chorale.
c. Un étudiant choisi au hasard est un garçon ne chantant pas.
d. Un étudiant choisi au hasard est un garçon de la chorale.

Exercice 11.8

Je vous propose le jeux suivant : je lance deux pièces (équitables). Si j'obtiens deux faces, je gagne 2 CHF et si une face sort je gagne 1 CHF. Par contre, je vous donne 3 CHF dans les autres cas. On joue ?

Exercice 11.9

Un casino propose le jeu suivant : si tirant une carte d'un jeu de poker (52 cartes) vous obtenez un as vous gagnez 10$. Sinon vous perdez 1$. Est-ce un jeu équitable ? Quelle est votre espérance de gain ?

Exercice 11.10

Trois pièces (de 1, 2 et 5 Frs) sont lancées. Déterminer la probabilité p d'obtenir 3 faces :

a. Si l'on sait que celle de 1.- est « face »
b. Si l'on sait que celle de 2.- est « pile »
c. Si l'on sait qu'au moins une pièce est « face »

Exercice 11.11

Dans un certain collège, 25% des étudiant(e)s échouent en mathématiques, 15% en chimie et 10% en mathématiques et en chimie. Un(e) étudiant(e) est choisi au hasard.

a. Si l'étudiant(e) a échoué en chimie, quelle est la probabilité qu'il/elle ait échoué en mathématiques ?
b. Si l'étudiant(e) a échoué en mathématiques, quelle est la probabilité qu'il/elle ait échoué en chimie ?
c. Quelle est la probabilité que l'étudiant(e) ait échoué en mathématiques ou en chimie ?
d. Quelle est la probabilité que l'étudiant(e) ait échoué ni en mathématiques ni en chimie ?

Exercice 11.12

Dans une famille comptant plusieurs enfants, on considère les événements suivants :

A : les enfants sont de même sexe $\qquad$ B : il y a au moins un garçon

a. S'il y a trois enfants, montrer que les événements A et B sont indépendants.
b. S'il y a deux enfants, montrer que les événements A et B sont dépendants.

Exercice 11.13

On considère deux boîtes :

La boîte A contenant 5 boules rouges, 3 blanches et 8 noires.

La boîte B contenant 3 boules rouges et 5 blanches.

On choisit au hasard une boite puis une boule de cette boite.

a. Déterminer la probabilité que la boule soit

a) rouge b) blanche c) noire

b. Déterminer la probabilité qu'on ait choisi la boîte A si la boule est

a) rouge b) blanche c) noire

Exercice 11.14

On a sorti d'un jeu de (36) cartes l'as de pique, l'as de carreau et deux autres cartes. On distribue au hasard ces cartes à deux personnes A et B (2 cartes chacune). Quelle est la probabilité que :

a. A possède l'as de pique ?

b. A possède les deux as ?

c. A possède les deux as si l'on sait qu'il a l'as de pique ?

d. A possède l'as de pique si l'on sait qu'il a l'un au moins des deux as ?

Exercice 11.15

Soient X, Y et Z trois pièces de monnaie dans une boite. X est une pièce normale. Y possède deux côtés faces et Z est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{3}$. Une pièce est choisie au hasard puis lancée.

a. Trouver la probabilité d'obtenir face.

b. Si face est apparu, trouver la probabilité que ce soit la pièce X.

c. Si pile est apparu, trouver la probabilité que ce soit la pièce Z.

Exercice 11.16

On tire trois cartes, sans remise, dans un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a. trois valets ?

b. deux valets et un roi ?

c. trois figures (as, roi, reine, valet) ?

d. trois figures différentes ?

e. au plus une figure ?

f. au moins une figure ?

Exercice 11.17

A l'EUROMILLION il faut choisir 5 nombres parmi 90 et 2 étoiles parmi 9.

a. La probabilité que le ticket «1-2-3-4-5 , étoiles 1-2» gagne est-elle la même que celle du ticket «11-8-5-32-47 , étoiles 6-2» ?

b. Avec quelle probabilité l'étoile «5» sortira-t-elle vendredi ?

c. Quelle est la probabilité que l'étoile «5» sorte vendredi sachant qu'elle n'est pas sortie depuis 8 semaines ?

d. Combien y a-t-il de possibilité de choisir 5 nombres parmi 90 ?

e. Combien y a-t-il de possibilité de choisir 2 étoiles parmi 9 ?

f. Quelle est la probabilité d'avoir le ticket gagnant ?

g. Quelle est la propabilité d'avoir exactement une étoile ?

h. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 nombres ?

Exercice 11.18

Considérons trois boîtes : La boîte X contient 10 ampoules, dont 4 sont défectueuses. La boîte Y contient 6 ampoules, dont 1 est défectueuse. La boîte Z contient 8 ampoules, dont 3 sont défectueuses. Une boîte est choisie au hasard, puis une ampoule en est extraite arbitrairement.

a. Déterminer $P(X)$ la probabilité que l'ampoule soit non défectueuse

b. Si l'ampoule n'est pas défectueuse, qu'elle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte Z ?

Exercice 11.19

La probabilité que Dolores atteigne une cible est $p = \frac{1}{4}$. Elle tire $n = 6$ fois. Déterminer la probabilité qu'elle atteigne la cible :

a. Exactement deux fois.

b. Plus de quatre fois.

c. Au moins une fois.

Exercice 11.20

Il y a 6 enfants dans une famille. Supposons que la probabilité qu'un enfant soit un garçon est 0.6. Déterminer la probabilité qu'il y ait :

a. Trois garçons et trois filles.

b. Moins de garçons que de filles.

Exercice 11.21

Un certain type de missiles touche sa cible avec une probabilité $p = 0.3$. Déterminer le nombre minimal n de missiles qui doivent être tirés pour que la probabilité de toucher la cible au moins une fois soit supérieure à 90 %

Exercice 11.22

Un dé est lancé 5 fois.

a. Trouver la probabilité d'avoir :

a) Que des 6.

b) Aucun 6.

c) Exactement trois 6.

d) Au moins un 6.

b. Combien de fois le dé devrait-il être lancé pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 soit supérieure à 99.5% ?

Exercice 11.23

Une boite contient 20 billes rouges et 30 blanches. Une billes est tirée au hasard puis remise dans la boite. On répète au total 4 fois ce tirage.

a. Trouver la probabilité d'avoir :
   a) Quatre billes de la même couleur.
   b) Une seule bille rouge.
   c) Exactement deux billes rouges.
   d) Au moins une bille blanche.

b. Combien de billes devrait-on tirer au moins pour que la probabilité d'avoir au moins une bille rouge soit supérieure à 99.7% ?

Exercice 11.24

Parmi les usagers des transports publics d'une grande ville, il y a 90% d'honnêtes passagers et 10% de resquilleurs.

a. Trouver la probabilité d'avoir un seul resquilleur parmi 4 usagers choisis au hasard.

b. Trouver la probabilité d'avoir au moins un resquilleur parmi 5 usagers choisis au hasard.

c. Trouver la probabilité que parmi 2 usagers choisis au hasard, un soit un resquilleur mais pas l'autre.
   Les resquilleurs voyagent tout le temps sans ticket. La probabilité pour qu'un honnête usager voyage sans billet est de 5%, car il arrive parfois que les honnêtes usagers "aient des absences".

d. Trouver la probabilité qu'un usager choisi au hasard soit honnête mais qu'il n'ait pas de titre de transport.

e. Trouver la probabilité qu'un usager choisi au hasard ait un billet.

f. Trouver le nombre minimal d'usagers qu'il faut contrôler pour que la probabilité d'en trouver un sans billet soit d'au moins 99%.

g. Trouver la probabilité qu'un usager sans billet soit un resquilleur.

Exercice 11.25

Un examen consiste en 10 questions. Pour chacune d'elles, 3 réponses sont proposées et une seule des trois est correcte. Pour réussir l'examen, l'étudiant(e) doit répondre correctement à au moins 9 questions. L'étudiant Albert se présente à l'examen sans aucune préparation et répond aux questions au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à au moins une question ?

b. Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à exactement 3 questions ?

c. Combien de réponses d'Albert doit-on corriger pour que la probabilité de trouver au moins une bonne réponse soit égale à $\frac{665}{729}$?
   L'étudiant Bernard prépare son examen de sorte que pour chaque question, la probabilité qu'il réponde au hasard est de $\frac{1}{10}$ et la probabilité qu'il ne réponde pas au hasard est de $\frac{9}{10}$ et, dans ce cas, on suppose qu'il répond correctement. Il se présente à l'examen.

d. Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à la première question ?

e. Quelle est la probabilité qu'une seule de ses deux premières réponses soit correcte.

f. Sachant que la première réponse est correcte, calculer la probabilité qu'il n'ait pas répondu à la première question au hasard.

g. Quelle est la probabilité qu'il réussisse l'examen ?

h. Sachant qu'un seul des étudiants parmi Albert et Bernard a répondu correctement à la première question, calculer la probabilité que ce soit Bernard.

Exercice 11.26

Une pièce de monnaie est lancée jusqu'à ce qu'elle retombe deux fois de suite sur le même côté. On appelle X le nombre de lancers nécessaires.

a. Calculer

a) $P(X = 2)$ b) $P(X = 3)$ c) $P(X = 4)$ d) $P(X = n)$

b. Déterminer n pour que la probabilité de devoir lancer la pièce moins de n fois soit supérieure à 99%.

c. Calculer la probabilité que X soit pair.

d. Quel est le nombre moyen de lancers nécessaires ?

Exercice 11.27

On suppose que lorsque A et B font une partie d'échecs, A gagne une partie sur trois et B une sur quatre.

a. Quelle est la probabilité qu'une partie soit nulle ?

b. Ils décident de faire des parties jusqu'à ce que l'un d'entre eux gagne. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 11.28

Paul est percussionniste dans un orchestre. La probabilité qu'il joue un morceau complètement est de $\frac{2}{5}$, la probabilité qu'il ne joue un morceau que partiellement est de $\frac{1}{2}$, et il arrive, pour certains morceaux, qu'il ne joue pas du tout.

Calculer la probabilité que, lors des neuf prochains morceaux, Paul joue...

a) quatre morceaux partiellement.

b) au moins deux morceaux complets.

L'orchestre décide de jouer les morceaux de son répertoire au hasard, le même morceau pouvant être joué plusieurs fois. Le concert se termine après le premier morceau que Paul ne joue pas du tout. Appelons X le nombre de morceaux joués par l'orchestre.

c) Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et trouver une formule pour $\mathbb{P}(X = n)$.

d) Quelle est la probabilité que X soit impair ?

Pour la suite du problème, l'orchestre n'interprète que des morceaux que Paul joue.

e) Quelle est alors la probabilité que Paul joue un morceau...
1) complètement ? 2) partiellement ?

La probabilité que Paul commette une erreur lors d'un morceau est de $\frac{4}{13}$ s'il le joue complètement et de $\frac{2}{13}$ s'il ne le joue que partiellement. Paul ne commet jamais plus d'une erreur par morceau.

f) A l'aide des résultats trouvés au point e), vérifier que la probabilité que Paul commette une erreur lors d'un morceau est $p = \frac{2}{9}$.

g) Combien de morceaux au minimum l'orchestre doit-il jouer pour que la probabilité que Paul commette au moins une erreur soit supérieure à 0.989 ?

h) Un musicien de l'orchestre propose le jeu suivant : si Paul commet une erreur lors d'un morceau, Paul doit payer 14 francs ; sinon, chaque autre membre paie 50 centimes. Sachant que le jeu est équitable, combien de personnes constituent l'orchestre ?

Exercice 11.29

15% des voitures sortant d'une certaine chaîne de montage sont défectueuses. Toutes les voitures sortant de cette chaîne de montage sont acheminées vers le service du contrôle final, où travaillent deux techniciens, A et B. Chaque voiture est contrôlée exactement une fois.

Le technicien A détecte 90% des voitures défectueuses, alors que le technicien B ne détecte que 80% des voitures défectueuses.

a) Quelle est la probabilité que parmi 10 voitures sortant de la chaîne de montage, la moitié soit défectueuse ?

b) Le technicien A contrôle une voiture. Quelle est la probabilité que cette voiture soit défectueuse et que la défectuosité soit détectée ?

c) Combien de voitures au minimum le technicien A doit-il contrôler pour que la probabilité qu'il détecte au moins une voiture défectueuse dépasse 95% ?

d) Le technicien A commence à travailler. Soit N le nombre de voitures qu'il doit contrôler jusqu'à ce qu'il détecte une voiture défectueuse. Calculer l'espérance (moyenne) de N.

Indication : $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots = \dfrac{1}{(1-r)^2}$ si $|r| < 1$.

e) Les techniciens A et B contrôlent chacun une voiture différente. Quelle est la probabilité qu'ils ne détectent aucune défectuosité ?

On admet pour la suite du problème que chaque voiture a la même probabilité d'être contrôlée par le technicien A que par le technicien B.

f) Quelle est la probabilité qu'une voiture défectueuse ne soit pas détectée lors d'un contrôle ?

g) Une voiture sort de la chaîne de montage et est acheminée vers le service du contrôle final. Quelle est la probabilité qu'aucune défectuosité ne soit détectée ?

h) Sachant que sur une certaine voiture aucune défectuosité n'a été détectée, calculer la probabilité que la voiture en question soit défectueuse.