Evaluation formative sur la combinatoire, les probabilités et les intérêts composés

Corrigé — Voir feuilles annexes

Tous les calculs amenant à la solution doivent figurer sur la feuille.
Les réponses doivent être copiées au stylo sur la feuille de données.
Durée 80 minutes. Points 50.

Problème 1 — 2+2+3 points

Pour entrer dans une entreprise, chaque employé ou cadre a un code constitué de quatre chiffres choisis parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. Combien de codes différents peut-on obtenir ?
2. Parmi ceux-ci, combien sont constitués
   a) de quatre chiffres tous différents ?
   b) de quatre chiffres différents contenant un seul 6 ?

Problème 2 — 2 points

Une fille a 3 jeans et 6 pulls. Combien de combinaisons différentes « jeans et pulls » peut-elle porter ?

Problème 3 — 2 points

Une secrétaire tape 10 lettres et sur 10 enveloppes les adresses de leur destinataire.
Si elle introduit les lettres au hasard, chacune dans une enveloppe, quelle est la probabilité pour que 9 lettres et seulement 9 lettres parviennent au bon destinataire ?

Problème 4 — 7 points

Une couple a 4 enfants. On admet que la naissance d'une fille et d'un garçon sont équiprobables.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. Les 2 aînés sont des garçons
2. Ils ont exactement 3 garçons
3. Ils ont au moins 1 fille

Problème 5 — 9 points

On dispose de 5 oignons de tulipe, 6 oignons de jonquille et 7 oignons de jacinthe.

On choisit 3 oignons au hasard pour les planter.
Calculer la probabilité que :

1. on plante 3 oignons de tulipe
2. on plante 1 oignon de chaque sorte
3. on plante 1 oignon de tulipe et 2 de jonquille
4. on plante au moins un oignon de jacinthe

Problème 6 — 7 points

1. Une machine perd 30% de sa valeur chaque année.
   Sachant qu'après 5 ans, elle vaut 3'361.40 CHF, quelle était sa valeur initiale ?

2. A quel taux faudrait-il amortir une machine que l'on a achetée 150'000 francs si l'on veut que dans 30 ans sa valeur soit de 23'438 francs?

3. Si on décide d'amortir chaque année de 4% une machine que l'on a achetée 150'000 francs, quand aura-t-on amorti 83'700 francs?

Problème 7 Intérêts composés — 10 points

1. Une maison a gagné 15% de sa valeur initiale en 20 ans. Quel a été le taux **annuel** d'augmentation ?

2. Quel est **l'intérêt** total qu'a rapporté un placement de 200'000 CHF placé sur un compte bloqué à un taux de 3% pendant 20 ans ?

3. La valeur acquise d'un capital de 10'000 CHF que l'on a placé pendant 6 ans est de 11'940.52 CHF.
   Combien de temps faut-il encore le laisser placé pour que la valeur acquise soit de 15'125.90 CHF ?

Problème 8 — 6 points

On dispose de 150'000 francs que l'on répartit ainsi :

- achat d'une machine de 120'000 francs avec un amortissement annuel de 8.7 %,
- placement de 30'000 francs avec un intérêt annuel de 2,5 %.

Dans combien d'années les deux investissements auront-ils la même valeur ?

Problème 1

1. Il peut y avoir plusieurs fois le même chiffre: $\underset{6\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{6\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{6\text{ poss}}{\_\_}\ \underset{6\text{ poss}}{\_\_}$
$\Rightarrow 6.6.6.6 = 6^4 = \underline{1296 \text{ possibilités}}$
2. a) les chiffres sont différents: $\underset{6}{\_\_}\ \underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_} \Rightarrow 6.5.4.3 = \underline{360 \text{ poss.}}$
b) Le 6 peut être à 4 places différentes et pour les autres chiffres, on a $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}$
$\Rightarrow 4.5.4.3 = \underline{240 \text{ possibilités.}}$

Problème 2

Elle a 3 choix pour le jeans et 6 choix pour le pull. Il y a donc $3.6 = \underline{18 \text{ possibilités.}}$

Problème 3

Si 9 lettres parviennent au bon destinataire, la 10e aussi forcément.
Ainsi, la probabilité pour que 9 lettres et seulement 9 lettres parviennent au bon destinataire est $\underline{0}$ (Événement impossible).

Problème 4

1. $\underline{G}\ \underline{G}\ \_\_\ \_\_$: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \underline{\frac{1}{4}}$.
2. GGGF, GGFG, GFGG, FGGG: $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{4}}$.
3. prob (au moins 1 fille) = 1 − prob (zéro fille) $= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{16} = \underline{\frac{15}{16}}$.

Problème 5

1. prob (3 tulipes, 0 jonquilles, 0 jacinthe) $= \frac{C_3^5 \cdot C_0^6 \cdot C_0^7}{C_3^{18}} = \frac{10.1.1}{816} = \underline{\frac{5}{408} \cong 0{,}01225}$.
2. prob (1 tulipe, 1 jonquille, 1 jacinthe) $= \frac{C_1^5 \cdot C_1^6 \cdot C_1^7}{C_3^{18}} = \frac{5.6.7}{816} = \underline{\frac{35}{136} \cong 0{,}25735}$.
3. prob (1 tulipe, 2 jonquilles, 0 jacinthe) $= \frac{C_1^5 \cdot C_2^6 \cdot C_0^7}{C_3^{18}} = \frac{5.15.1}{816} = \underline{\frac{25}{272} \cong 0{,}09191}$.
4. prob (au moins 1 jacinthe) = 1 − prob (0 jacinthe) = 1 − prob (3 dans les tulipes et jonquilles) =
$= 1 - \frac{C_3^{11} \cdot C_0^7}{C_3^{18}} = 1 - \frac{165.1}{816} = 1 - \frac{55}{272} = \underline{\frac{217}{272} \cong 0{,}79779}$.

Problème 6

1. On a $V_n = V_0(1-t)^n$ avec $V_n = 3361,4$, $t = 30\% = 0,3$ et $n = 5$ ans
$\Rightarrow 3361,4 = V_0(1-0,3)^5 \Rightarrow 3361,4 = V_0 \cdot 0,16807 \Rightarrow V_0 = \underline{20'000.-}$

2. On a $V_n = V_0(1-t)^n$ avec $V_n = 23'438$, $V_0 = 150'000$ et $n = 30$ ans
$\Rightarrow 23'438 = 150'000\,(1-t)^{30} \Rightarrow 0,156253 = (1-t)^{30}$
$\Rightarrow 0,94 = 1-t \Rightarrow t = 1-0,94 = 0,06 = \underline{6\%}.$

3. On a $V_n = V_0(1-t)^n$ avec $V_n = 150'000 - 83'700 = 66'300$, $V_0 = 150'000$ et $t = 4\% = 0,04$

$\Rightarrow 66'300 = 150'000\,(1-0,04)^n$ | $: 150'000$ + calcul

$0,442 = 0,96^n$ | $a = b^n \Rightarrow n = \frac{\log(a)}{\log(b)}$

$n = \frac{\log(0,442)}{\log(0,96)} = \underline{20 \text{ ans}}$

Problème 7

1. On a $C_n = C_0(1+t)^n$ où $n = 20$ ans, $C_n = C_0 + 15\%$ de $C_0 = C_0 + 0,15\,C_0 = 1,15\,C_0$
$\Rightarrow 1,15\,C_0 = C_0(1+t)^{20}$ | $: C_0$

$1,15 = (1+t)^{20}$ | $\sqrt[20]{}$

$1,007 = 1+t$ | -1

$\Rightarrow t = 0,007 = \underline{0,7\%}$

2. On a $C_n = C_0(1+t)^n$ où $C_0 = 200'000$, $t = 3\% = 0,03$ et $n = 20$ ans
$\Rightarrow C_n = 200'000 \cdot (1+0,03)^{20} = 361'222,25$
L'intérêt total est donc $C_n - C_0 = 361'222,25 - 200'000 = \underline{161'222,25}$.

3. On a $C_n = C_0(1+t)^n$ où $C_n = 11'940,52$, $C_0 = 10'000$ et $n = 6$ ans
$\Rightarrow 11'940,52 = 10'000 \cdot (1+t)^6 \Rightarrow 1,194052 = (1+t)^6$
$\Rightarrow 1+t = 1,03 \Rightarrow t = 0,03 = 3\%.$
Maintenant, on a $C_n = C_0(1+t)^n$ où $C_n = 15'125,9$, $C_0 = 10'000$ et $t = 3\% = 0,03$
$\Rightarrow 15'125,9 = 10'000 \cdot (1+0,03)^n \Rightarrow 1,51259 = 1,03^n$
$\Rightarrow n = \frac{\log(1,51259)}{\log(1,03)} = 14.$
$\Rightarrow$ Il faut encore le laisser $14 - 6 = \underline{8 \text{ ans}}.$

Problème 8

Machine: $V_n = V_0(1-t)^n$ avec $V_0 = 120'000$, $t = 8,7\% = 0,087$

$\Rightarrow V_n = 120'000 \cdot (1-0,087)^n = 120'000 \cdot 0,913^n$.

Placement: $C_n = C_0(1+t)^n$ avec $C_0 = 30'000$, $t = 2,5\% = 0,025$

$\Rightarrow C_n = 30'000 \cdot (1+0,025)^n = 30'000 \cdot 1,025^n$.

$V_n = C_n \Rightarrow 120'000 \cdot 0,913^n = 30'000 \cdot 1,025^n$

$$\frac{0,913^n}{1,025^n} = 0,25$$

$$\left(\frac{0,913}{1,025}\right)^n = 0,25$$

$$0,89073^n = 0,25$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(0,25)}{\log(0,89073)} \cong 11,98 \cong \underline{12 \text{ ans.}}$$

$: 1,025^n$ et $: 120'000$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Calcul

$a^n = b \Rightarrow n = \frac{\log(b)}{\log(a)}$