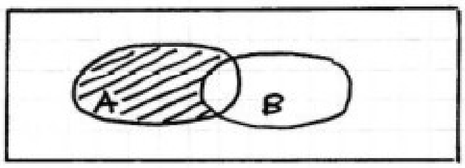
PROBABILITES

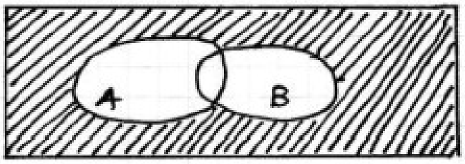
Corrigés des exercices

Exercice 11.1.

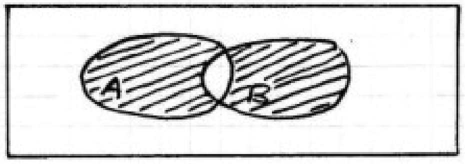
a. A mais pas B = A et $\overline{B}$ = $A \cap \overline{B}$



b. Ni A, ni B = ni (A ou B) = $\overline{A \text{ ou } B}$ = $\overline{A \cup B}$



c. Soit A, soit B, mais pas les 2 =
= (A et $\overline{B}$) ou ($\overline{A}$ et B) = $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$



Exercice 11.2

a. $\{(p;1),(p;2),(p;3),(p;4),(p;5),(p;6),(f;1),(f;2),(f;3),(f;4),(f;5),(f;6)\}$, où p= pile et f= face.

b. a) $\{(f;2),(f;4),(f;6)\} = A$.

b) $\{(p;2),(p;3),(p;5),(f;2),(f;3),(f;5)\} = B$.

c) $\{(p;1),(p;3),(p;5)\} = C$.

c. a) $\{(f;2),(f;4);(f;6),(p;2),(p;3),(p;5),(f;3),(f;5)\} = A \cup B$.

b) $\{(f;2)\} = A \cap B$.

c) $\{(p;2),(f;3),f(5)\} = B \cap \overline{A} \cap \overline{C}$.

d. A et C sont incompatibles car $A \cap C = \emptyset$ (ensemble vide).

Exercice 11.3

a. On a $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Ici $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$.

Ainsi $P(A\cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

b. On a $\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{A\cup B}$. Ainsi $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) \overset{a.}{=} 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$.

c. On a $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

d. On a $P(A\cup\overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\cap\overline{B})$.

Ici $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $P(A\cap\overline{B}) \overset{c.}{=} \frac{5}{12}$.

Ainsi $P(A\cup\overline{B}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{3}{4}$.

Exercice 11.4

a. On a 3 cas favorables (2, 4 et 6) pour 6 cas possibles (1, 2, 3, 4, 5 et 6).
La probabilité est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b. La probabilité d'obtenir au moins une face lors du lancer de 3 pièces vaut
1 − la probabilité d'obtenir aucune fois face = 1 − la probabilité d'obtenir 3 pile
$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

c. On a 4 cas favorables (4 billes rouges) sur $4 + 3 + 5 = 12$ cas possibles (12 billes au total).
La probabilité est donc $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Exercice 11.5

a. Le nombre de cas favorables est $C_2^3 = 3$ (2 gauchers choisis parmi les 3).
Le nombre de cas possibles est $C_2^{10} = 45$ (2 élèves choisis parmi les 10).
Ainsi la probabilité est $\frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.

b. Le nombre de cas favorables est $C_2^7 = 21$ (2 non gauchers choisis parmi les 7 non gauchers).
Le nombre de cas possibles est, comme en a., 45.
Ainsi la probabilité est $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

c. La probabilité que l'un des 2 au moins soit gaucher est 1 − la probabilité qu'aucun des 2 ne soient gauchers $= 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ (voir b.).

d. Le nombre de cas favorables est $C_1^7 \cdot C_1^3$ (1 parmi 7 pour le droitier et 1 parmi 3 pour le gaucher). On a $C_1^7 \cdot C_1^3 = 7 \cdot 3 = 21$.
Le nombre de cas possibles est, comme en a., 45.
Ainsi la probabilité est $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

Exercice 11.6

a. On a une probabilité de $\frac{1}{6}$ pour obtenir "3" avec le rouge.
On a une probabilité de $\frac{1}{6}$ pour obtenir "5" avec le noir.
Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

b. On peut avoir "3" avec le rouge et "5" avec le noir ou "5" avec le rouge et "3" avec le noir. A chaque fois, comme en a., la probabilité est $\frac{1}{36}$.
Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$.

c. Pour chaque résultat similaire sur les 2 dés, la probabilité est, comme en a., $\frac{1}{36}$.
Comme il y a 6 possibilités d'obtenir un résultat similaire sur les 2 dés, la probabilité cherchée est $6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

d. Pour chaque résultat donnant un total de 8, la probabilité est, comme en a., $\frac{1}{36}$.
On a les possibilités suivantes: $2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2$ (le premier nombre concernant le dé rouge et le deuxième le dé noir). Il y a donc 5 possibilités.
La probabilité cherchée est donc $5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$.

e. On peut symboliser la somme des 2 dés par un tableau:

noir \ rouge	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a 18 cas donnant une somme paire.
La probabilité cherchée est donc $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

f. Le nombre de cas favorables (aucun 6) est $5 \cdot 5 = 25$.
Le nombre de cas possibles est $6 \cdot 6 = 36$.
La probabilité cherchée est donc $\frac{25}{36}$.

g. La probabilité d'obtenir au moins un 6 vaut 1 − la probabilité de n'avoir aucun 6 =
$= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ (voir f.).

Exercice 11.7

Si les filles (468) représentent 65% de tous les étudiants, cela signifie qu'il y a $468 : 0{,}65 = 720$ étudiants au total.

On a donc 720 étudiants dont 468 filles et $720 - 468 = 252$ garçons.

Il y a 240 étudiants dans la chorale. Si x est le nb de garçons dans la chorale, on a alors $5x$ filles dans la chorale. On doit donc avoir $x + 5x = 240 \Rightarrow 6x = 240$ $\Rightarrow x = 40$. Ainsi il y a 40 garçons et $5 \cdot 40 = 200$ filles dans la chorale.

a. La probabilité est $\frac{200}{720} = \frac{5}{18}$.

b. La probabilité est $\frac{468-200}{720} = \frac{268}{720} = \frac{67}{180}$.

c. La probabilité est $\frac{252-40}{720} = \frac{212}{720} = \frac{53}{180}$.

d. La probabilité est $\frac{40}{720} = \frac{1}{18}$.

Exercice 11.8

On a 4 possibilités : FF, FP, PF et PP.
Pour chacun d'eux, la probabilité est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
On gagne 2.- si FF, 1.- si FP ou PF et on perd 3.- si PP.
On obtient $\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-3) = -\frac{1}{4} < 0$.
Ainsi, on risque de perdre de l'argent.
Le jeu n'est donc pas équitable et on ne joue pas !

Exercice 11.9.

La probabilité d'obtenir 1 as est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ (4 as sur 52 cartes).
La probabilité d'obtenir 1 autre carte est $\frac{48}{52} = \frac{12}{13}$.
Avec un as, on gagne 10 \$. En tirant autre chose, on perd 1 \$.
L'espérance de gain est ainsi $\frac{1}{13} \cdot 10 - \frac{12}{13} \cdot 1 = \frac{10}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{2}{13} < 0$.
Ainsi, on risque de perdre de l'argent.
Il vaut donc mieux ne pas jouer.

Exercice 11.10

Il s'agit de probabilité conditionnelle : la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé est donnée par $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

a. Ici $A = 3$ faces, $B =$ face au 1.–, $A\cap B = 3$ faces, $P(A\cap B) = \frac{1}{8}$ $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$
et $P(B) = \frac{1}{2}$.
Ainsi $p = P(A|B) = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$.

b. Ici $A = 3$ faces, $B =$ pile au 2.–, $A\cap B = \emptyset$ (ensemble vide), $P(A\cap B) = 0$
et $P(B) = \frac{1}{2}$.
Ainsi $p = P(A|B) = \frac{0}{1/2} = 0$.

c. Ici $A = 3$ faces, $B =$ au moins une fois face, $A\cap B = 3$ faces, $P(A\cap B) = \frac{1}{8}$,
$P(B) = P($au moins une fois face$) = 1 - P($aucun face$) = 1 - P(3$ fois pile$) =$
$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
Ainsi $p = P(A|B) = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$.

Exercice 11.11.

Notons E l'ensemble des élèves ayant échoué en math et F l'ensemble de ceux ayant échoué en chimie. $E \cap F$ est l'ensemble des élèves ayant échoué en math et en chimie.

On a $p(E) = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, $p(F) = 15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ et $p(E \cap F) = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

a. C'est une probabilité conditionnelle. La formule est $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
Ici $A = E$ et $B = F$. Ainsi $A \cap B = E \cap F$.
Ainsi $p(A|B) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{1/10}{3/20} = \frac{2}{3}$.

b. C'est aussi une probabilité conditionnelle.
Ici $A = F$ et $B = E$. Ainsi $A \cap B = F \cap E = E \cap F$.
Ainsi $p(A|B) = \frac{p(E \cap F)}{p(E)} = \frac{1/10}{1/4} = \frac{2}{5}$.

c. On a $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$.

d. On a $p(\overline{E} \cap \overline{F}) = p(\overline{E \cup F}) = 1 - p(E \cup F) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Exercice 11.12

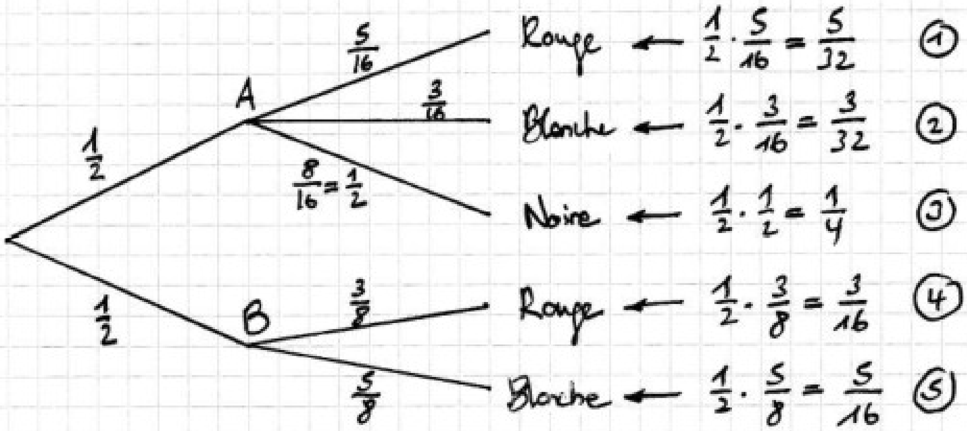
Deux événements A et B sont indépendants si $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$.

a. S'il y a 3 enfants, l'univers des possibilités est
$\Omega=\{(G;G;G);(G;G;F);(G;F;G);(F;G;G);(G;F;F);(F;G;F);(F;F;G);(F;F;F)\}$.
On a : $A=\{(G;G;G);(F;F;F)\}$,
$B=\{(G;G;G);(G;G;F);(G;F;G);(F;G;G);(G;F;F);(F;G;F);(F;F;G)\}$,
$A\cap B=\{(G;G;G)\}$,
$p(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $p(B)=\frac{7}{8}$, $p(A\cap B)=\frac{1}{8}$.
Comme $p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{32}\neq\frac{1}{8}=p(A\cap B)$, on en conclut que A et B ne sont pas indépendants.

b. S'il y a 2 enfants, l'univers des possibilités est
$\Omega=\{(G;G);(G;F);(F;G);(F;F)\}$.
On a : $A=\{(G;G);(F;F)\}$,
$B=\{(G;G);(G;F);(F;G)\}$,
$A\cap B=\{(G;G)\}$,
$p(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{3}{4}$, $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$.
Comme $p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=p(A\cap B)$, on en conclut que A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 11.13

On a la situation suivante :



a. a) $1 + 4 = \frac{5}{32} + \frac{3}{16} = \frac{11}{32}$.

b) $2 + 5 = \frac{3}{32} + \frac{5}{16} = \frac{13}{32}$.

c) $3 = \frac{1}{4}$

b. Ce sont des probabilités conditionnelles : $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$.

E correspond à choisir la boîte A.

a. F correspond à la boule est rouge.

$E\cap F$ correspond au chemin 1.

On a : $p(E\cap F) = \frac{5}{32}$ et $p(F) = \frac{11}{32}$ (voir a.a)).

Ainsi $P(E|F) = \frac{5/32}{11/32} = \frac{5}{11}$.

b. F correspond à la boule est blanche.

$E\cap F$ correspond au chemin 2.

On a : $p(E\cap F) = \frac{3}{32}$ et $p(F) = \frac{13}{32}$ (voir a.b)).

Ainsi $p(E|F) = \frac{3/32}{13/32} = \frac{3}{13}$.

c. F correspond à la boule est noire.

$E\cap F$ correspond au chemin 3.

On a : $p(E\cap F) = \frac{1}{4}$ et $p(F) = \frac{1}{4}$ (voir a.c)).

Ainsi $p(E|F) = \frac{1/4}{1/4} = 1$.

Exercice 11.14

a. Le nombre de cas favorables est 3 (l'as de pique + une des 3 autres cartes).

Le nombre de cas possibles est 2 cartes reçues parmi 4 = $\binom{4}{2} = 6$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b. Le nombre de cas favorables est 1 (les 2 as).

Le nombre de cas possibles est, comme en a., 6.

La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{6}$.

c. C'est une probabilité conditionnelle: $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$.

Ici E = A a les 2 as, F = A a l'as de pique.

On a $E \cap F$ = A a les 2 as.

De plus $p(E\cap F) = \frac{1}{6}$ (voir b.) et $P(F) = \frac{1}{2}$ (voir a.).

Ainsi $p(E|F) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

d. C'est aussi une probabilité conditionnelle: $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$.

Ici E = A a l'as de pique, F = A a l'un au moins des 2 as.

On a $E\cap F$ = A a l'as de pique.

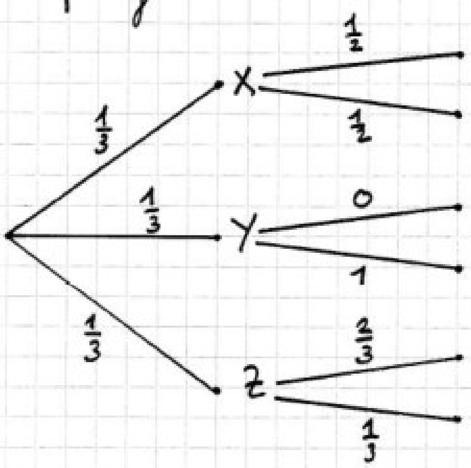
De plus $P(E\cap F) = \frac{1}{2}$ (voir a.) et $P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - P(\text{A a aucun as}) =$

$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Ainsi $P(E|F) = \frac{1/2}{5/6} = \frac{3}{5}$.

Exercice 11.15

On peut faire un arbre :



pile ← $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ ①

face ← $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ ②

pile ← $\frac{1}{3}\cdot 0=0$ ③

face ← $\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$ ④

pile ← $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ ⑤

face ← $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ ⑥

a. La probabilité d'obtenir face est ②+④+⑥ $=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{11}{18}$.

b. C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Ici A = pièce X et B = face apparu.
On a $A\cap B$ = pièce X et face apparu.
En outre $p(A\cap B)=$ ② $=\frac{1}{6}$ et $P(B)=\frac{11}{18}$ (voir a.).
Ainsi $p(A|B)=\frac{1/6}{11/18}=\frac{3}{11}$.

c. C'est aussi une probabilité conditionnelle : $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Ici A = pièce Z et B = pile apparu.
On a $A\cap B$ = pièce Z et pile apparu.
En outre $p(A\cap B)=$ ⑤ $=\frac{2}{9}$ et $P(B)=$ ①+③+⑤ $=\frac{1}{6}+0+\frac{2}{9}=\frac{7}{18}$.
Ainsi $p(A|B)=\frac{2/9}{7/18}=\frac{4}{7}$.

Exercice 11.16

Le nombre de cas possibles en tirant 3 cartes est $\binom{36}{3} = 7140$.

a. Le nombre de cas favorables est 3 valets parmi 4 $= \binom{4}{3} = 4$.
La probabilité cherchée est ainsi $\frac{4}{7140} = \frac{1}{1785}$.

b. Le nombre de cas favorables est 2 valets parmi 4 et un roi parmi 4 $= \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 = 24$.
La probabilité cherchée est ainsi $\frac{24}{7140} = \frac{2}{595}$.

c. Le nombre de cas favorables est 3 figures parmi $4 \cdot 4 = 16 = \binom{16}{3} = 560$.
La probabilité cherchée est ainsi $\frac{560}{7140} = \frac{4}{51}$.

d. Le nombre de cas favorables est $\binom{16}{1} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{8}{1} = 16 \cdot 2 \cdot 8 = 256$.
La probabilité cherchée est ainsi $\frac{256}{7140} = \frac{64}{1785}$.

e. Le nombre de cas favorables est le nombre de cas sans figure $\left(\binom{20}{3} = 1140\right)$ et le nombre de cas avec 1 figure $\left(\binom{16}{1} \cdot \binom{20}{2} = 16 \cdot 190 = 3040\right) = 1140 + 3040 = 4180$.
La probabilité cherchée est ainsi $\frac{4180}{7140} = \frac{209}{357}$.

f. Le nombre de cas favorables est tous les cas possibles moins les cas sans figure =
$= 7140 - 1140 = 6000$.
La probabilité cherchée est ainsi $\frac{6000}{7140} = \frac{100}{119}$.

Exercice 11.17

a. Les deux tickets ont exactement la même probabilité.

b. L'étoile 5 aura 1 chance sur 9 d'être la 1^e étoile sortie et 1 chance sur 8 d'être la 2^e étoile sortie (si le 5 n'est pas sorti en 1^{er}, c'est qu'un autre nombre est sorti, et il reste donc 8 possibilités pour la 2^e étoiles).
Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72}$.

c. Elle est la même qu'en b $\left(\frac{17}{72}\right)$, car ce n'est pas parce qu'une étoile n'est pas sortie lors des derniers tirages qu'elle aura une probabilité différente de sortir au prochain tirage.

d. Il y a $\binom{50}{5} = 2'118'760$ possibilités (on ne tient pas compte de l'ordre).

e. Il y a $\binom{9}{2} = 36$ possibilités (on ne tient pas compte de l'ordre).

f. Il y a $2'118'760$ possibilités pour les 5 chiffres et il y a 36 possibilités pour les 2 étoiles. Au total, il y a donc $2'118'760 \cdot 36 = 76'275'360$ possibilités de jouer.
Comme il n'y a qu'une combinaison gagnante, la probabilité qu'elle se réalise est $\frac{1}{76'275'360}$.

g. Pour 2 étoiles, on a les 36 possibilités suivantes:

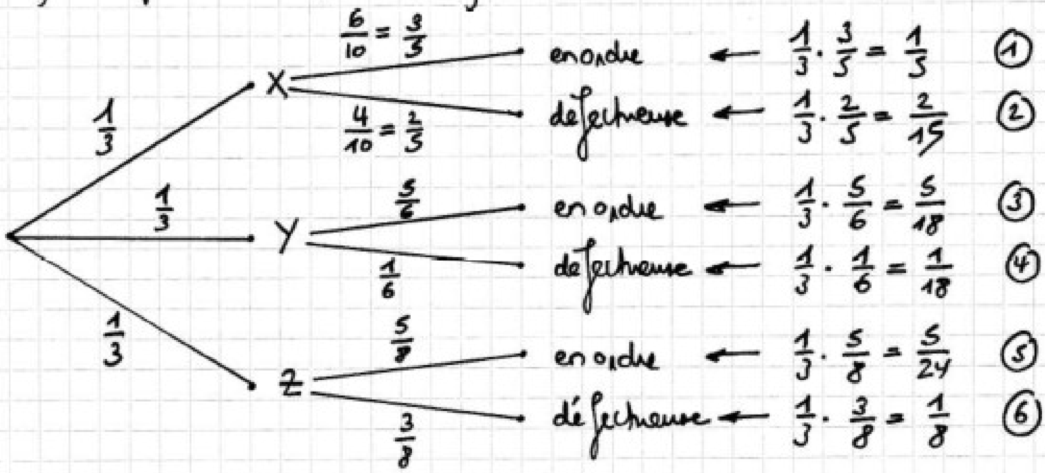
12							
13	23						
14	24	34					
15	25	35	45				
16	26	36	46	56			
17	27	37	47	57	67		
18	28	38	48	58	68	78	
19	29	39	49	59	69	79	89

Le nombre de possibilités d'avoir exactement une étoile juste pour les 2 est 14 : par exemple, si la combinaison gagnante est 47, on a les possibilités :
14 24 34 45 46 48 49 17 27 37 57 67 78 79.
Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

h. La probabilité d'avoir au moins 3 nombres vaut 1 − Prob (avoir moins que 3 nombres).
Le nombre de possibilités d'avoir 0 nombre est $\binom{45}{5}$ (45 car on retire de 50 les 5 bons nombres). Le nombre de possibilités d'avoir 1 nombre est $\binom{5}{1}\binom{45}{4}$. Le nombre de possibilités d'avoir 2 nombres est $\binom{5}{2} \cdot \binom{45}{3}$. Le nombre de possibilités d'avoir moins que 3 nombres est donc $\binom{45}{5} + \binom{5}{1}\binom{45}{4} + \binom{5}{2} \cdot \binom{45}{3} = 2'108'634$.
Ainsi la probabilité d'avoir moins que 3 nombres est $\frac{2'108'634}{2'118'760}$ (voir d.) $=$
$= 0,99522$.
Donc la probabilité cherchée est $1 - 0,99522 = 0,00478$.

Exercice 11.18

On peut représenter la situation par un arbre:



a. La probabilité correspond aux chemins 1, 2 et 3. Elle vaut donc $\frac{1}{5} + \frac{5}{18} + \frac{5}{24} = \frac{247}{360}$.

b. C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ici: A = l'ampoule provient de la boîte Z,

B = l'ampoule n'est pas défectueuse.

On a $A \cap B$ = l'ampoule provient de la boîte Z et n'est pas défectueuse,

$p(A \cap B)$ = chemin 5 $= \frac{5}{24}$, $p(B) = \frac{247}{360}$ (voir a.).

Ainsi $p(A|B) = \frac{5/24}{247/360} = \frac{75}{247}$.

Exercice 11.19

On va utiliser la loi binomiale: $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X est l'atteinte de la cible, k = le nombre d'atteinte, n = le nombre de tire et p = la probabilité d'atteindre la cible.

Ici $p=\frac{1}{4}$. Donc $1-p=\frac{3}{4}$. En outre $n=6$.

a. $P(X=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{6-2}=15\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{81}{256}=\frac{1215}{4096}=0{,}2966=29{,}66\%$.

b. $P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)=\binom{6}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^{6-5}+\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{6-6}=$
$=6\cdot\frac{1}{1024}\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{4096}\cdot 1=\frac{18}{4096}+\frac{1}{4096}=\frac{19}{4096}=0{,}0046=0{,}46\%$.

c. $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\binom{6}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{6-0}=1-1\cdot1\cdot\frac{729}{4096}=1-\frac{729}{4096}=\frac{3367}{4096}=$
$=0{,}822=82{,}2\%$.

Exercice 11-20

On va utiliser la loi binomiale : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où X comptabilise le nombre de garçons, k représente le nombre de garçons, n le nombre d'enfants et p la probabilité d'avoir un garçon.

Ici $p = 0,6$, $1-p = 0,4$ et $n = 6$.

a. $P(X=3) = \binom{6}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^{6-3} = 20 \cdot 0,216 \cdot 0,064 = 0,27648 = 27,648\%$.

b. Moins de garçons que de filles signifie que $X \leq 2$.

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$= \binom{6}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^{6-0} + \binom{6}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^{6-1} + \binom{6}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^{6-2} =$

$= 1 \cdot 1 \cdot 0,004096 + 6 \cdot 0,6 \cdot 0,01024 + 15 \cdot 0,36 \cdot 0,0256 =$

$= 0,004096 + 0,036864 + 0,13824 = 0,1792 = 17,92\%$.

Exercice 11.21.

On va utiliser la loi binomiale: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où X comptabilise le nombre de touchers, k représente le nombre de touchers, n le nombre de lancers, p la probabilité de toucher.

On a $p = 0{,}3$ et $1-p = 0{,}7$.

On doit chercher n pour que $P(X \geqslant 1) > 90\% = 0{,}9$.

Comme $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$, on doit donc avoir $1 - P(X=0) > 0{,}9$

$\Longrightarrow P(X=0) < 0{,}1$.

On a $P(X=0) = \binom{n}{0} 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}7^n = 0{,}7^n$.

On doit donc résoudre $0{,}7^n < 0{,}1$.

Comme la fonction log est strictement croissante, si $x < y$, on a $\log x < \log y$.

Ainsi $0{,}7^n < 0{,}1 \Longrightarrow \log(0{,}7^n) < \log(0{,}1)$.

Par la propriété $\log(a^m) = m \log a$, on obtient $n \log(0{,}7) < \log(0{,}1)$.

Comme $\log(0{,}7) \cong -0{,}1549 < 0$, diviser les 2 membres par ce nombre implique de changer le sens de l'inégalité.

On obtient ainsi $n > \dfrac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}7)} \cong 6{,}45$.

Il faut tirer au minimum 7 lancers pour que la probabilité de toucher la cible au moins une fois soit supérieure à 90%.

Exercice 11.22

On va utiliser la loi binomiale : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X comptabilise les cas que l'on veut obtenir, n représente le nombre de lancers, k le nombre de fois ce que l'on veut obtenir et p la probabilité de ce qu'on veut obtenir.

a. Ici $n=5$. En outre, $p=$ prob d'obtenir $6=\frac{1}{6}$, et $1-p=\frac{5}{6}$.

a) $P(X=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=1\cdot\frac{1}{7776}\cdot 1=\frac{1}{7776}=0,000129=0,0129\%$.

b) $P(X=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-0}=1\cdot 1\cdot\frac{3125}{7776}=\frac{3125}{7776}=0,4019=40,19\%$.

c) $P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-3}=10\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{25}{36}=\frac{250}{7776}=0,03215=3,215\%$.

d) $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\frac{3125}{7776}$ (voir b) $=\frac{4651}{7776}=0,5981=59,81\%$.

b. On doit chercher n pour que $P(X\geqslant 1)>99,5\%=0,995$.
On a $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$. On doit donc avoir $1-P(X=0)>0,995$, c'est-à-dire $P(X=0)<0,005$.
On a $P(X=0)=\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{n-0}=1\cdot 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
On doit donc résoudre $\left(\frac{5}{6}\right)^n<0,005$.
Comme la fonction logarithme est strictement croissante, on a $x<y \Rightarrow \log x<\log y$.
Ainsi $\left(\frac{5}{6}\right)^n<0,005 \Rightarrow \log\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)<\log 0,005$.
Comme $\log(a^m)=m\log a$, on obtient $n\log\frac{5}{6}<\log 0,005$.
Puisque $\log\frac{5}{6}=-0,079<0$, en divisant par $\log\frac{5}{6}$, on doit changer le signe de l'inégalité.
On obtient donc $n>\dfrac{\log 0,005}{\log\frac{5}{6}}\cong 29,06$.
Ainsi on devra lancer le dé au moins 30 fois pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 soit supérieure à $99,5\%$.

Exercice 11.23

On va utiliser la loi binomiale: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X comptabilise les cas que l'on veut obtenir, n représente le nombre de tirages, k le nombre de fois ce que l'on veut obtenir et p la probabilité de ce qu'on veut obtenir.

a. a) La probabilité cherchée est la probabilité d'avoir 4 boules rouges + la probabilité d'avoir 4 boules blanches.

4 boules rouges : $n=4,\ k=4,\ p=\frac{20}{20+30}=\frac{20}{50}=\frac{2}{5},\ 1-p=\frac{3}{5},\ n-k=0$

$\Rightarrow \text{prob}=\binom{4}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}.$

4 boules blanches : $n=4,\ k=4,\ p=\frac{30}{20+30}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5},\ 1-p=\frac{2}{5},\ n-k=0$

$\Rightarrow \text{prob}=\binom{4}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^0=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}.$

La probabilité cherchée est donc $\frac{16}{625}+\frac{81}{625}=\frac{97}{625}$.

b) $n=4,\ k=1,\ p=\frac{2}{5},\ 1-p=\frac{3}{5},\ n-k=3$ (voir a))

$\Rightarrow \text{prob}=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=4\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{27}{125}=\frac{216}{625}.$

c) $n=4,\ k=2,\ p=\frac{2}{5},\ 1-p=\frac{3}{5},\ n-k=2$ (voir a))

$\Rightarrow \text{prob}=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=6\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{9}{25}=\frac{216}{625}.$

d) prob au moins 1 bille blanche = 1 − prob zéro bille blanche =

= 1 − prob 4 billes rouges = $1-\binom{4}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0$ (voir a))

$=1-\left(\frac{2}{5}\right)^4=1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}.$

b. prob au moins une bille rouge = 1 − prob zéro bille rouge =

= 1 − prob toutes les billes blanches.

Ici n est à trouver, $p=\frac{3}{5},\ 1-p=\frac{2}{3},\ k=n,\ n-k=0$ (voir a))

$\Rightarrow$ prob au moins une bille rouge $=1-\binom{n}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^0=1-\left(\frac{3}{5}\right)^n.$

On doit avoir $1-\left(\frac{3}{5}\right)^n>99{,}7\%=0{,}997 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n<1-0{,}997=0{,}003.$

Comme la fonction log est strictement croissante ($x<y\Rightarrow \log x<\log y$), on obtient $\log\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)<\log(0{,}003)$.

Par une propriété du log, on en déduit $n\log\left(\frac{3}{5}\right)<\log(0{,}003)$.

Comme $\log\left(\frac{3}{5}\right)<0$, on obtient $n>\frac{\log(0{,}003)}{\log(3/5)}\simeq 11{,}4$.

Il faut donc tirer au moins 12 billes.

Exercice 11.24

On va utiliser la loi binomiale : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X comptabilise les cas que l'on veut obtenir, n représente le nombre de tirages, k le nombre de fois ce que l'on veut obtenir et p la probabilité de ce qu'on veut obtenir.

a. Ici $n=4$, $k=1$, $p=10\%=0{,}1$, $1-p=90\%=0{,}9$, $n-k=3$
$\Rightarrow$ prob d'avoir 1 seul resquilleur $=\binom{4}{1}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^3=4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}729=0{,}2916=$
$=29{,}16\%$.

b. prob au moins 1 resquilleur $=1-$ prob zéro resquilleur.
Ici $n=5$, $k=0$, $p=10\%=0{,}1$, $1-p=90\%=0{,}9$, $n-k=5$
$\Rightarrow$ prob au moins 1 resquilleur $=1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^5=1-0{,}9^5=1-0{,}59049=$
$=0{,}40951=40{,}951\%$.

c. Ici $n=2$, $k=1$, $p=10\%=0{,}1$, $1-p=90\%=0{,}9$, $n-k=1$
$\Rightarrow$ prob cherchée $=\binom{2}{1}\,0{,}1^1\cdot 0{,}9^1=2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}18=18\%$.

d. La probabilité cherchée est $0{,}9\cdot 0{,}05=0{,}045=4{,}5\%$ $(5\%=0{,}05)$.

e. La probabilité cherchée est $0{,}9\cdot(1-0{,}05)=0{,}9\cdot 0{,}95=0{,}855=85{,}5\%$.

f. prob cherchée $=1-$ prob tous un billet $=1-0{,}855^n$ (voir e.).
On doit avoir ainsi $1-0{,}855^n\geqslant 99\%=0{,}99\Rightarrow 0{,}855^n\leq 0{,}01$.
Comme la fonction log est une fonction strictement croissante ($x<y\Rightarrow \log x<\log y$), on obtient $\log(0{,}855^n)\leq\log(0{,}01)$.
Par une propriété du log, on trouve $n\log(0{,}855)\leq\log(0{,}01)$.
Comme $\log(0{,}855)<0$, on en déduit que $n\geqslant\frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}855)}\cong 29{,}4$.
Il faut donc contrôler au moins 30 personnes.

g. C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
On a: $A=$ resquilleur,
$B=$ sans billet,
$A\cap B=$ resquilleur sans billet $=$ resquilleur,
$P(A\cap B)=10\%=0{,}1$,
$P(B)=1-0{,}855=0{,}145$ (voir e)).
Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{0{,}1}{0{,}145}=0{,}6897=68{,}97\%$.

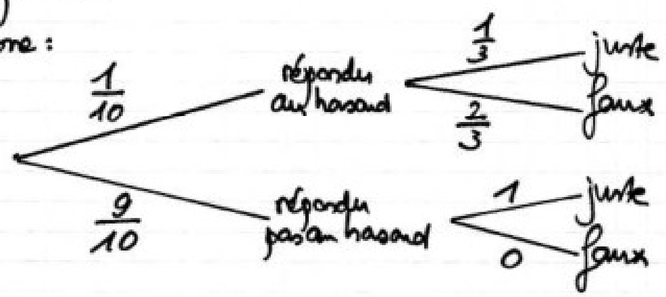
Exercice 11.25

a. prob juste à au moins 1 question = 1 − prob faux à toutes les questions =
$= 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0{,}9827 = 98{,}27\%$.

b. On va utiliser la loi binomiale : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X comptabilise les cas que l'on veut obtenir, n représente le nombre de questions, k le nombre de fois ce que l'on veut obtenir et p la probabilité de ce qu'on veut obtenir.
Ici $n=10$, $k=3$ (3 justes), p = prob répondre juste $= \frac{1}{3}$, $1-p = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (= prob répondre faux), $n-k=7$
$\Rightarrow$ prob 3 justes exactement sur 10 $= \binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0{,}2601 = 26{,}01\%$.

c. prob au moins 1 juste = 1 − prob aucun juste = 1 − prob tout faux $= 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
On doit avoir $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{665}{729} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1-\frac{665}{729} = \frac{64}{729}$.
Comme $\frac{64}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$, on obtient $n=6$.
Il faut donc corriger 6 réponses.

d. Pour Bernard, on fait un arbre :



prob juste à la 1e question $= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{9}{10}\cdot 1 = \frac{1}{30} + \frac{9}{10} = \frac{14}{15} = 0{,}9333 = 93{,}33\%$.
(la probabilité de répondre juste à n'importe quelle question est aussi $\frac{14}{15}$).

e. On utilise la loi binomiale : ici $n=2$, $k=1$ (1 juste), p = prob répondre juste =
$= \frac{14}{15}$ (voir d.), $1-p = 1-\frac{14}{15} = \frac{1}{15}$, $n-k=1$
$\Rightarrow$ prob cherchée $= \binom{2}{1}\left(\frac{14}{15}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^1 = \frac{28}{225} = 0{,}1244 = 12{,}44\%$.

f. C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
On a : A = 1e question pas répondue au hasard,
B = 1e question répondue correctement,
$A\cap B$ = 1e question pas répondue au hasard et correctement,
$p(A\cap B) = \frac{9}{10}\cdot 1 = \frac{9}{10}$,
$p(B) = \frac{14}{15}$ (voir d.).
Ainsi la probabilité cherchée est $P(A|B) = \frac{9/10}{14/15} = \frac{27}{28} = 0{,}9643 = 96{,}43\%$.

g. prob réussir examen = prob répondre juste à au moins 9 questions sur 10 =
= prob avoir 9 justes + prob avoir 10 justes =
$= \binom{10}{9}\left(\frac{14}{15}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{14}{15}\right)^{10}\left(\frac{1}{15}\right)^0$ (voir d.)
$= 0{,}3583 + 0{,}5016 = 0{,}8599 = 85{,}99\%$.

h. C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

On a : A = Bernard répond juste à la 1e question,

B = un seul des 2 a répondu juste à la 1e question,

$A \cap B$ = Bernard a juste à la 1e question et Albert a faux à la 1e question,

$p(A\cap B) = \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{3} = \frac{28}{45}$,

$p(B)$ = prob(Albert juste et Bernard faux) + prob(Albert faux et Bernard juste) =

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{14}{15} = \frac{29}{45}$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{28/45}{29/45} = \frac{28}{29} = 0{,}9655 = 96{,}55\,\%$.

Exercice 11.26

a. a) On a les possibilités PP ou FF $\Rightarrow P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

b) On a les possibilités PFF ou FPP $\Rightarrow P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$.

c) On a les possibilités FPFF ou PFPP $\Rightarrow P(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$.

d) On a les possibilités ....FPFPFF ou .....PFPFPP

$$\Rightarrow P(X=n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

b. On doit trouver n tel que $P(X<n)>99\%=0{,}99$.

On a $P(X<n)=P(X=2)+P(X=3)+\dots+P(X=n-1)=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}.$$

C'est une série géométrique.

On sait que $S_n=1+r+r^2+r^3+\dots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Ici $r=\frac{1}{2}$ et on a $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1/2}=$

$=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2-\frac{1}{2^n}$.

Par conséquent $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}=2-\frac{1}{2^{n-2}}-1=1-\frac{1}{2^{n-2}}$.

Ainsi, on doit trouver n tel que $1-\frac{1}{2^{n-2}}>0{,}99$.

De $1-\frac{1}{2^{n-2}}>0{,}99$, on déduit $\frac{1}{2^{n-2}}<1-0{,}99=0{,}01$, d'où

$1<0{,}01\cdot 2^{n-2}\Rightarrow 2^{n-2}>100\Rightarrow n-2\geqslant 7\Rightarrow n\geqslant 9$.

c. $P(X\text{ pair})=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)+P(X=8)+\dots$

$$=\frac{1}{2^{2-1}}+\frac{1}{2^{4-1}}+\frac{1}{2^{6-1}}+\frac{1}{2^{8-1}}+\dots \quad (\text{voir a.d)})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\dots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\dots\right).$$

On sait que $S_n=1+r+r^2+\dots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Ici $r=\frac{1}{4}$. Ainsi $S_n=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-1/4}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3/4}=$

$=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n}$.

Ainsi $S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n}\right)=\frac{4}{3}$.

Par conséquent $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\dots=\frac{4}{3}$ et, finalement,

$P(X\text{ pair})=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

d. Le nombre moyen de lancers est $2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)+5P(X=5)+\dots=$

$=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{1}{16}+\dots+(n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-2}}+n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+(n+1)\cdot\frac{1}{2^n}=$

$= \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} + \dots$

Appelons M cette somme infinie (qui correspond donc au nombre moyen de lancers nécessaires).

On a : $M = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} + \dots$

et $2M = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{4} + \frac{5}{8} + \frac{6}{16} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} + \frac{n+2}{2^{n+1}} + \dots$.

Ainsi $2M - M = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$ et, donc,

$M = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$.

D'après b., on a $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

On en déduit que $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$.

Ainsi $M = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1 + S = 1 + 2 = 3$.

Le nombre moyen de lancers nécessaires est donc 3.

Exercice 11.27

a. Il y a 3 événements indépendants possibles : A gagne, B gagne ou la partie est nulle.
Ainsi prob partie nulle $= 1 -$ prob A gagne $-$ prob B gagne $= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

b. Si A gagne en premier, cela signifie que les parties précédentes sont nulles.
On a les possibilités suivantes :

A gagne	probabilité $= \frac{1}{3}$
nul / A gagne	probabilité $= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3}$ (voir a.)
nul / nul / A gagne	probabilité $= \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$
nul / nul / nul / A gagne	probabilité $= \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$
etc.	

Ainsi, la probabilité que A gagne en premier est

$$P = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{5}{12}\right)^n \cdot \frac{1}{3} + \dots =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^3 + \dots + \left(\frac{5}{12}\right)^n + \dots\right).$$

On sait que $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.
Ici $r = \frac{5}{12}$.
On a donc $S_n = \frac{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}}{\frac{7}{12}} = \frac{12}{7}\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}\right)$.

Par conséquent $S = 1 + \frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{12}\right)^n + \dots = \lim_{n \to +\infty} S_n =$
$= \lim_{n \to +\infty} \frac{12}{7}\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}\right) = \frac{12}{7}$.

Par conséquent, la probabilité que A gagne en premier est
$P = \frac{1}{3} \cdot S = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{7} = \frac{4}{7}$.

Exercice 11.28

On va utiliser la loi binomiale : $\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, où n est le nombre de morceaux, k est le nombre de fois que l'on veut, p la probabilité que ce qu'on veut se réalise 1 fois.

a) Ici $n=9$, $k=4$, $p=\frac{1}{2}$, $1-p=\frac{1}{2}$, $n-k=5$

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est $\binom{9}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=126\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{126}{512}=\frac{63}{256}=$

$=0{,}2461=24{,}61\,\%$.

b) On a prob(au moins 2 morceaux complets) =

$=1-$ prob(zéro morceau complet) $-$ prob(1 morceau complet) $=$

$=1-\binom{9}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^9-\binom{9}{1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^8$ (loi binomiale)

$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^9-9\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^8=1-\left(\frac{3}{5}\right)^8\left(\frac{3}{5}+\frac{18}{5}\right)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^8\cdot\frac{21}{5}=$

$=1-\frac{6561}{390'625}\cdot\frac{21}{5}=1-\frac{137'781}{1'953'125}=\frac{1'815'344}{1'953'125}\cong 0{,}9295=92{,}95\,\%$.

c) La probabilité que Paul ne joue pas du tout un morceau est

$1-$ prob qu'il le joue complètement $-$ prob qu'il ne le joue que partiellement $=$

$=1-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$.

On a ainsi $P(X=1)=\frac{1}{10}$.

$X=2$ signifie que Paul a joué partiellement ou complètement le 1^e morceau et pas du tout le 2^e. Ainsi $P(X=2)=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{100}$.

$X=3$ signifie que Paul a joué partiellement ou complètement les 2 premiers morceaux et pas du tout le 3^e. Ainsi $P(X=3)=\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{81}{1000}$.

$X=n$ signifie que Paul a joué partiellement ou complètement les n-1 premiers morceaux et pas du tout le n^e. Ainsi $P(X=n)=\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{10}$.

d) La probabilité que X soit impair vaut $P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)+\ldots=$

$=\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^6\cdot\frac{1}{10}+\ldots=$

$=\frac{1}{10}\left(1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^4+\left(\frac{9}{10}\right)^6+\ldots\right)=$

$=\frac{1}{10}\left(1+\frac{81}{100}+\left(\frac{81}{100}\right)^2+\left(\frac{81}{100}\right)^3+\ldots\right)$.

On sait que $S_n=1+r+r^2+\ldots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Ici $r=\frac{81}{100}$ et $S_n=\frac{1-\left(\frac{81}{100}\right)^{n+1}}{1-\frac{81}{100}}=\frac{1-\left(\frac{81}{100}\right)^{n+1}}{\frac{19}{100}}=\frac{100}{19}\left(1-\left(\frac{81}{100}\right)^{n+1}\right)$.

On a $S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{100}{19}\left(1-\left(\frac{81}{100}\right)^{n+1}\right)=\frac{100}{19}$.

Par conséquent, la probabilité que X soit impair est

$\frac{1}{10}\cdot\frac{100}{19}=\frac{10}{19}=0{,}5263=52{,}63\,\%$.

e) On a des probabilités conditionnelles: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, où B est un morceau que Paul joue. On a $P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$.

1) A est un morceau que Paul joue complètement.

On a $A \cap B$ = un morceau que Paul joue complètement = A et $P(A\cap B) = \frac{2}{5}$.

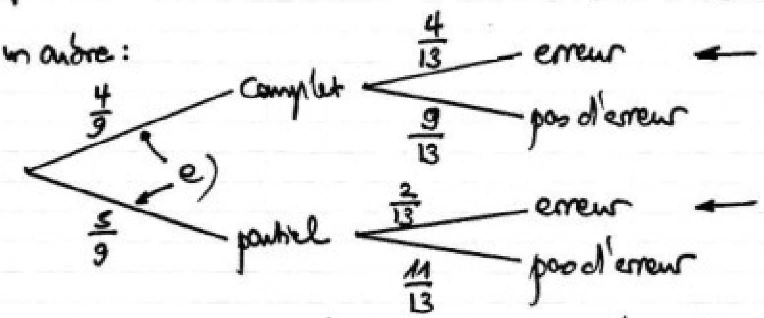
Ainsi la probabilité cherchée est $P(A|B) = \frac{2/5}{9/10} = \frac{4}{9} = 0{,}4444 = 44{,}44\,\%$.

2) A est un morceau que Paul joue partiellement.

On a $A\cap B$ = un morceau que Paul joue partiellement = A et $P(A\cap B) = \frac{1}{2}$.

Ainsi la probabilité cherchée est $P(A|B) = \frac{1/2}{9/10} = \frac{5}{9} = 0{,}5556 = 55{,}56\,\%$.

f) On peut faire un arbre:



Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{13} + \frac{5}{9}\cdot\frac{2}{13} = \frac{16}{117} + \frac{10}{117} = \frac{26}{117} = \frac{2}{9} = 22{,}22\,\%$.

g) On doit avoir $P(\text{au moins une erreur}) > 0{,}989$

$\Rightarrow 1 - P(\text{zéro erreur}) > 0{,}989 \Rightarrow P(\text{zéro erreur}) < 0{,}011$.

Pour un morceau, $P(\text{zéro erreur}) = 1 - P(\text{une erreur}) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ (voir f)).

Pour n morceaux, $P(\text{zéro erreur}) = \left(\frac{7}{9}\right)^n$.

On doit donc avoir $\left(\frac{7}{9}\right)^n < 0{,}011$.

Comme la fonction log est strictement croissante ($x<y \Rightarrow \log x < \log y$), on a $\log\left(\left(\frac{7}{9}\right)^n\right) < \log(0{,}011)$.

En utilisant une propriété du log, on obtient $n \log\left(\frac{7}{9}\right) < \log(0{,}011)$.

Comme $\log\left(\frac{7}{9}\right) < 0$, on trouve $n > \frac{\log(0{,}011)}{\log(7/9)} \cong 17{,}95$.

Ainsi le nombre minimum est $n = 18$.

h) Le jeu étant équitable, l'espérance de gain doit être nulle.

D'après f), la probabilité que Paul fasse une erreur vaut $\frac{2}{9}$. La probabilité qu'il ne fasse aucune erreur est $\frac{7}{9}$.

Soit n le nombre de musiciens (y compris Paul).

L'espérance s'écrit $14\cdot\frac{2}{9} + (-0{,}50)\cdot\frac{7}{9}\cdot(n-1) = 0 \Rightarrow \frac{28}{9} - \frac{7}{18}(n-1)$

$\Rightarrow 56 - 7(n-1) \Rightarrow 7(n-1) = 56 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$.

Ainsi, il y a 9 musiciens dans l'orchestre (y compris Paul).

Exercice 11.29

a) Par la loi binomiale, la probabilité que 5 voitures parmi les 10 soient defectueuses est $\binom{10}{5} p^5(1-p)^{10-5}$, où p est la probabilité qu'une voiture soit defectueuse.
On a $p = 15\% = 0{,}15$.
Ainsi la probabilité cherchée est $\binom{10}{5} 0{,}15^5 \cdot 0{,}85^5 \cong 0{,}00849 = 0{,}849\%$.

b) La probabilité que la voiture soit defectueuse et que la defectuosité soit détectée par A est le produit de la probabilité que la voiture soit defectueuse (15%) par la probabilité que A détecte la défectuosité (90%). Elle vaut donc $0{,}15 \cdot 0{,}9 = 0{,}135 = 13{,}5\%$.

c) On doit avoir prob(A détecte au moins une voiture defectueuse) $> 95\% = 0{,}95$
$\Rightarrow$ 1 − prob(A ne détecte aucune voiture defectueuse) $> 0{,}95$
$\Rightarrow$ prob(A ne détecte aucune voiture defectueuse) $< 0{,}05$.
D'après b), on a prob(A détecte la defectuosité d'une voiture) $= 0{,}135$.
Ainsi, prob(A ne détecte pas la defectuosité d'une voiture) $= 1 - 0{,}135 = 0{,}865$,
et, donc, prob(A ne détecte aucune voiture defectueuse) $= 0{,}865^n$.
On doit par conséquent avoir $0{,}865^n < 0{,}05$.
Comme la fonction log est strictement croissante ($x<y \Rightarrow \log x < \log y$), on a $\log(0{,}865^n) < \log(0{,}05)$
Par une propriété du log, on obtient $n \log(0{,}865) < \log(0{,}05)$.
Comme $\log(0{,}865) < 0$, on trouve $n > \dfrac{\log(0{,}05)}{\log(0{,}865)} \cong 20{,}66$.
Le nombre minimal de voitures à controler est donc 21.

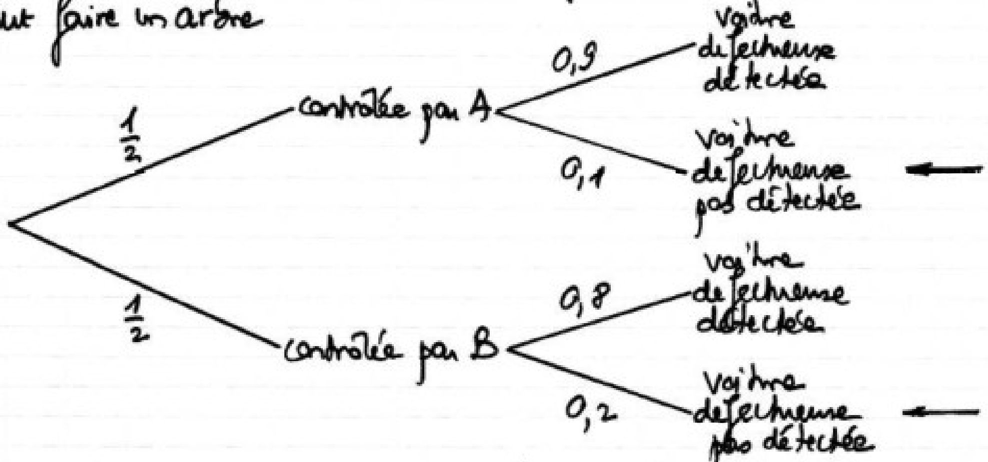
d) L'espérance moyenne de N est donné par
$1 \cdot P(N=1) + 2 \cdot P(N=2) + 3 \cdot P(N=3) + \ldots\ldots + n \cdot P(N=n) + \ldots\ldots$
On a: $P(N=1) = 0{,}135$ (voir b)),
$P(N=2) = 0{,}865 \cdot 0{,}135$ (voir c)),
$P(N=3) = 0{,}865^2 \cdot 0{,}135$,
$P(N=4) = 0{,}865^3 \cdot 0{,}135$, ...,
$P(N=n) = 0{,}865^{n-1} \cdot 0{,}135$.
Ainsi l'espérance moyenne de N s'écrit:

$$1 \cdot 0{,}135 + 2 \cdot 0{,}865 \cdot 0{,}135 + 3 \cdot 0{,}865^2 \cdot 0{,}135 + \ldots + n \cdot 0{,}865^{n-1} \cdot 0{,}135 + \ldots =$$
$$= 0{,}135\,(1 + 2 \cdot 0{,}865 + 3 \cdot 0{,}865^2 + \ldots + n \cdot 0{,}865^{n-1} + \ldots).$$

D'après l'indication, si $|r|<1$, on a $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \ldots = \dfrac{1}{(1-r)^2}$.
Ici $r = 0{,}865$ et $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \ldots = \dfrac{1}{(1-0{,}865)^2} = \dfrac{1}{0{,}135^2}$
L'espérance moyenne de N vaut donc $0{,}135 \cdot \dfrac{1}{0{,}135^2} = \dfrac{1}{0{,}135} \cong 7{,}41$.

e) On a prob(A et B ne détecte aucune défectuosité) =
= prob (A ne détecte pas de défectuosité) · prob (B ne détecte pas de défectuosité)
(les événements sont indépendants).
De plus, prob(A ne détecte pas de défectuosité) =
= prob(voiture pas défectueuse) + prob(A ne détecte pas la défectuosité d'une voiture défectueuse) $= 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}865$.
Similairement, prob(B ne détecte pas de défectuosité) $= 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}88$.
Ainsi prob(A et B ne détecte aucune défectuosité) $= 0{,}865 \cdot 0{,}88 = 0{,}7612 = 76{,}12\%$.

f) On peut faire un arbre



Ainsi la probabilité cherchée vaut $\frac{1}{2} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 = 0{,}05 + 0{,}1 = 0{,}15 = 15\%$.

g) On a prob (aucune défectuosité détectée) =
= prob (voiture pas défectueuse) + prob(A ou B ne détecte aucune défectuosité) =
= prob(voiture pas défectueuse) + prob(A ne détecte pas une voiture défectueuse) +
+ prob (B ne détecte pas une voiture défectueuse) =
$= 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}8725 = 87{,}25\%$.

h) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
On a : A = voiture défectueuse,
B = aucune défectuosité détectée,
$A \cap B$ = aucune défectuosité détectée sur une voiture défectueuse,
$p(B) = 0{,}8725$ (voir g)),
$p(A \cap B) = 0{,}15 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}0225$ (similairement à g)).
Ainsi la probabilité cherchée est $P(A|B) = \frac{0{,}0225}{0{,}8725} = 0{,}0258 = 2{,}58\%$.