Evaluation formative sur toute la matière de la deuxième partie du cours

Corrigé Voir feuilles annexes

Une présentation soignée est exigée.
Toute solution sans fondement mathématique sera ignorée.
Durée 80 minutes. Nombre de points : 54

Problème 1 **8 points**

Résoudre :

1) $x+\sqrt{5x+10}=8$

2) $x^4-10x^2+9=0$

Problème 2 **4 points**

1) Trouver l'expression fonctionnelle (équation) de la droite passant pas A(2 ;6) et B(5 ;12)

2) Trouver l'expression fonctionnelle (équation) de la parabole dont le sommet est S(4 ;6) et qui passe par A(3 ;2)

Problème 3 **8 points**

On donne la parabole p : $y=\frac{1}{2}x^2+3x+4$ et la droite d : $y-\frac{7}{2}x=5$

1) Calculer les points d'intersections de la parabole avec les axes

2) Calculer les coordonnées du sommet de la parabole

3) **Calculer** les points d'intersection de la droite et de la parabole

Problème 4 **8 points**

Pour confectionner des poufs, une entreprise compte 12'400 francs de frais fixes plus 37 francs par article.
Une étude a permis d'établir que la demande s'exprime par 1'600 - 10p où p est le prix de vente.

1) Quel prix doit-on fixer pour atteindre un profit maximum ?

2) Quel sera le profit maximum ?

Problème 5 **6 points**

1) On dépose la somme de 150'000 francs au taux de 3 %.
Quel est **l'intérêt** total obtenu après 10 ans ? (arrondir le résultat au franc supérieur).

2) Après combien d'années un capital placé à un taux annuel de 5 % double-t-il ? (donner la réponse arrondie à l'entier supérieur

3) On place 100'000 francs sur un compte bloqué pendant 30 ans. Sachant que le capital triple, quel est le taux?

Problème 6 **8 points**

Un sac contient 3 boules rouges, 4 bleues et 5 jaunes. On tire simultanément **trois** boules. Quelle est la probabilité que :

1) les 3 boules tirées sont jaunes ?
2) il y a une boule de chaque couleur ?
3) il y a 2 boules jaunes et 1 rouge ?
4) il y a au moins une boule rouge ?

Problème 7 **12 points**

Une entreprise fabrique des meubles de type A et de type B. La fabrication d'un meuble de type A requiert 1 kg de bois et 3 kg de plastique, alors qu'on a besoin de 2 kilos de bois et de 2 kg de plastique pour fabriquer un meuble de type B.

L'entreprise doit produire **au moins** 45 objets.

L'entreprise dispose globalement de 80 kg de bois et de 120 kg de plastique.

Sachant que, pour chaque meuble vendu, le bénéfice est de 50 francs pour le type A et de 20 francs pour le type B, comment organiser la production afin de réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors le bénéfice réalisé ?

Problème 1

1) $x+\sqrt{5x+10}=8$ | $-x$

$\sqrt{5x+10}=8-x$ | $(\ \ )^2$

$5x+10=(8-x)^2$ | identité remarquable : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$5x+10=64-16x+x^2$ | $-5x-10$

$0=x^2-21x+54$

$a=1,\ b=-21,\ c=54,\ b^2-4ac=(-21)^2-4\cdot1\cdot54=441-216=225>0,\ \sqrt{b^2-4ac}=15$

$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{21+15}{2\cdot1}=18$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{21-15}{2\cdot1}=3$

Vérification : $x=18 \Rightarrow 18+\sqrt{5\cdot18+10}=18+\sqrt{100}=18+10=28\neq8$ KO

$x=3 \Rightarrow 3+\sqrt{5\cdot3+10}=3+\sqrt{25}=3+5=8$ ok

$\Rightarrow$ unique solution : $\underline{x=3}$.

2) $x^4-10x^2+9=0$: on pose $u=x^2$ et on a $u^2=(x^2)^2=x^4$.

L'équation devient $u^2-10u+9=0$.

$a=1,\ b=-10,\ c=9,\ b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot1\cdot9=100-36=64>0,\ \sqrt{b^2-4ac}=8$

$\Rightarrow u_1=\frac{10+8}{2}=9$ et $u_2=\frac{10-8}{2}=1$

Avec $u=x^2$, on obtient : $u_1=9 \Rightarrow \underline{x=3 \text{ ou } x=-3}$

$u_2=1 \Rightarrow \underline{x=1 \text{ ou } x=-1}$

Problème 2

1) On a $y=mx+h$, où $m=\text{pente}=\frac{12-6}{5-2}=\frac{6}{3}=2$. On obtient $y=2x+h$.

Avec $A(2;6)$ et donc $x=2$ et $y=6$, on a $6=2\cdot2+h \Rightarrow h=2$.

L'expression de la droite est donc $\underline{y=2x+2}$.

2) On a $y=a(x-m)^2+p$ où $(m;p)$ est le sommet.

Avec $S(4;6)$, on a $m=4$ et $p=6$. On obtient donc $y=a(x-4)^2+6$.

Avec $A(3;2)$ et donc $x=3$ et $y=2$, on a $2=a(3-4)^2+6 \Rightarrow 2=a+6 \Rightarrow a=-4$.

L'équation de la parabole est ainsi $\underline{y=-4(x-4)^2+6}$.

Problème 3

1) Avec l'axe x : on met $y=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2}x^2+3x+4 \xrightarrow{\cdot 2} 0=x^2+6x+8$

$a=1, b=6, c=8 \Rightarrow b^2-4ac=6^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4>0, \sqrt{b^2-4ac}=2$

$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6+2}{2}=-2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6-2}{2}=-4$

$\Rightarrow \underline{(-2;0) \text{ et } (-4;0)}.$

Avec l'axe y : on met $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot0^2+3\cdot0+4=4 \Rightarrow \underline{(0;4)}.$

2) On a $a=\frac{1}{2}$, $b=3$ et $c=4 \Rightarrow x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2\cdot\frac{1}{2}}=-3$ et $y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}=$

$=\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot4-3^2}{4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{8-9}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{S\left(-3;-\frac{1}{2}\right)}.$

3) $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x^2+3x+4 \\ y-\frac{7}{2}x=5 \Rightarrow y=\frac{7}{2}x+5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l|l} \frac{1}{2}x^2+3x+4=\frac{7}{2}x+5 & \cdot 2 \\ x^2+6x+8=7x+10 & -7x-10 \\ x^2-x-2=0 & \end{array}$

$a=1, b=-1$ et $c=-2$, $b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9>0$, $\sqrt{b^2-4ac}=3$

$\Rightarrow x_1=\frac{1+3}{2}=2 \Rightarrow y_1=\frac{7}{2}x_1+5=\frac{7}{2}\cdot2+5=7+5=12$ et

$x_2=\frac{1-3}{2}=-1 \rightarrow y_2=\frac{7}{2}x_2+5=\frac{7}{2}\cdot(-1)+5=-\frac{7}{2}+5=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \underline{(2;12) \text{ et } \left(-1;\frac{3}{2}\right)}.$

Problème 4

Prix unitaire $=p$; demande = nb d'articles vendus $=n=1600-10p$;

revenu $=n\cdot p=(1600-10p)p=1600p-10p^2$; coûts $=12'400+37n=$

$=12'400+37(1600-10p)=12'400+59'200-370p=71'600-370p$;

profit = revenu − coûts $=1600p-10p^2-(71'600-370p)=$

$=1600p-10p^2-71'600+370p=-10p^2+1970p-71'600.$

$a=-10, b=1970, c=-71'600$

1) $p_m=-\frac{b}{2a}=-\frac{1970}{2\cdot(-10)}=\underline{98{,}50 \text{ frs.}}$

2) profit max $=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot(-10)\cdot(-71'600)-1970^2}{4\cdot(-10)}=\underline{25'422{,}50 \text{ frs.}}$

Problème 5

1) On a $C_n = C_0(1+t)^n$ avec $C_0 = 150'000$, $t = 3\% = 0,03$ et $n = 10$ ans

$\Rightarrow C_n = 150'000\cdot(1+0,03)^{10} = 201'587,46 \cong 201'588$

$\Rightarrow$ intérêt total $= C_n - C_0 \cong 201'588 - 150'000 = \underline{51'588 \text{ frs.}}$

2) On a $C_n = C_0(1+t)^n$ avec $C_n = 2C_0$ et $t = 5\% = 0,05$

$\Rightarrow 2C_0 = C_0(1+0,05)^n \overset{:C_0}{\Longrightarrow} 2 = 1,05^n \Rightarrow n = \dfrac{\log(2)}{\log(1,05)} = 14,2 \Rightarrow \underline{15 \text{ ans.}}$

3) On a $C_n = C_0(1+t)^n$ avec $C_n = 3\cdot 100'000 = 300'000$, $C_0 = 100'000$ et $n = 30$ ans

$\Rightarrow 300'000 = 100'000\,(1+t)^{30} \Rightarrow 3 = (1+t)^{30} \Rightarrow 1+t \cong 1,0373$

$\Rightarrow t \cong 0,0373 = \underline{3,73\%.}$

Problème 6

1) $\text{prob}(3 \text{ jaunes}, 0 \text{ rouge}, 0 \text{ bleue}) = \dfrac{C_3^5 \cdot C_0^3 \cdot C_0^4}{C_3^{12}} = \dfrac{10\cdot1\cdot1}{220} = \underline{\dfrac{1}{22} \cong 0,045.}$

2) $\text{prob}(1 \text{ jaune}, 1 \text{ rouge}, 1 \text{ bleue}) = \dfrac{C_1^5 \cdot C_1^3 \cdot C_1^4}{C_3^{12}} = \dfrac{5\cdot3\cdot4}{220} = \dfrac{3}{11} \cong \underline{0,2727.}$

3) $\text{prob}(2 \text{ jaunes}, 1 \text{ rouge}, 0 \text{ bleue}) = \dfrac{C_2^5 \cdot C_1^3 \cdot C_0^4}{C_3^{12}} = \dfrac{10\cdot3\cdot1}{220} = \dfrac{3}{22} \cong \underline{0,1364.}$

4) $\text{prob}(\text{au moins } 1 \text{ rouge}) = 1 - \text{prob}(0 \text{ rouge}) = 1 - \text{prob}(\text{les 3 boules dans les jaunes et bleues})$

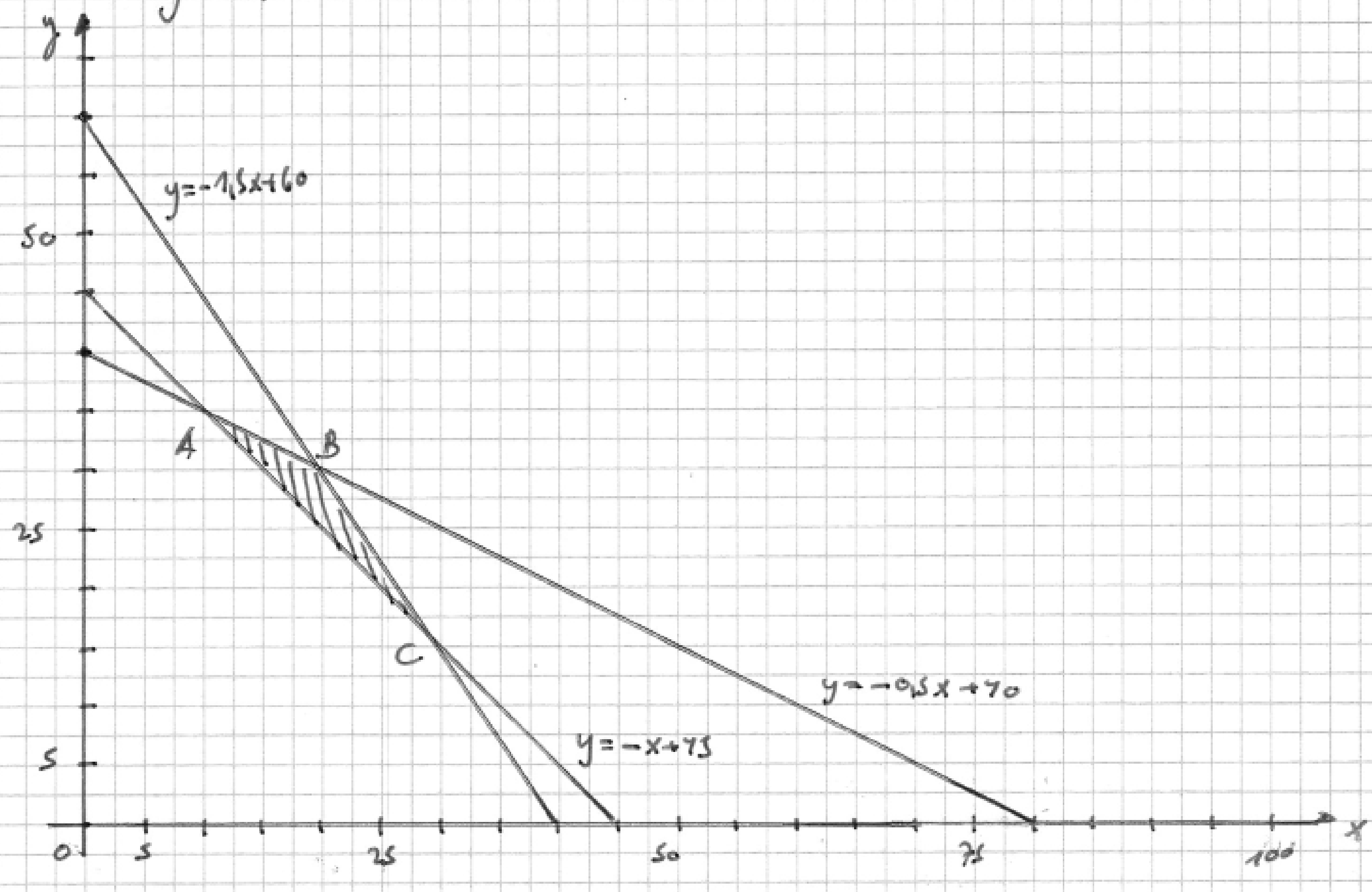
$= 1 - \dfrac{C_0^3 \cdot C_3^9}{C_3^{12}} = 1 - \dfrac{1\cdot 84}{220} = 1 - \dfrac{21}{55} = \dfrac{34}{55} \cong \underline{0,6182.}$

Problème 7

Notons x le nb de meubles de type A et y le nb de meubles de type B. On a :

	nb	bois	plastique	bénéfice
meubles A	x	$1x$	$3x$	$50x$
meubles B	y	$2y$	$2y$	$20y$
	$x \geq 0$ $y \geq 0$ $x+y \geq 45$	$x+2y \leq 80$	$3x+2y \leq 120$	$50x+20y \to$ maximum

Contraintes : $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x+y \geq 45 \Rightarrow y \geq -x+45$: on dessine $y=-x+45$ et on est au-dessus ; $x+2y \leq 80 \Rightarrow 2y \leq -x+80 \Rightarrow y \leq -0{,}5x+40$: on dessine $y=-0{,}5x+40$ et on est au-dessous ; $3x+2y \leq 120 \Rightarrow 2y \leq -3x+120 \Rightarrow y \leq -1{,}5x+60$: on dessine $y=-1{,}5x+60$ et on est au-dessous :



A : intersection de $y=-x+45$ et $y=-0{,}5x+40 \Rightarrow -x+45=-0{,}5x+40 \Rightarrow -0{,}5x=-5$
$\Rightarrow x=10 \Rightarrow y=-10+45=35 \Rightarrow A(10;35)$

B : intersection de $y=-0{,}5x+40$ et $y=-1{,}5x+60 \Rightarrow -0{,}5x+40=-1{,}5x+60 \Rightarrow x=20$
$\Rightarrow y=-0{,}5 \cdot 20+40=30 \Rightarrow B(20;30)$

C : intersection de $y=-x+45$ et $y=-1{,}5x+60 \Rightarrow -x+45=-1{,}5x+60 \Rightarrow 0{,}5x=15$
$\Rightarrow x=30 \Rightarrow y=-30+45=15 \Rightarrow C(30;15)$

On calcule le bénéfice $(50x + 20y)$ pour A, B et C:

$A(10;35)$: $50 \cdot 10 + 20 \cdot 35 = 500 + 700 = 1200$
$B(20;30)$: $50 \cdot 20 + 20 \cdot 30 = 1000 + 600 = 1600$
$C(30;15)$: $50 \cdot 30 + 20 \cdot 15 = 1500 + 300 = 1800$ ←

Il faut donc fabriquer <u>30 meubles A et 15 meubles B.</u>
Le bénéfice maximal sera alors de <u>1800 frs.</u>