Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 11

Mathématiques de niveau 1

ANALYSE

Corrigé du TE B

Exercice 1

On a $f(x) = x + 2\cos(x)$, $x \in [0; 2\pi]$.

a) Les points à tangente horizontale sont les $(x; y)$ tels que $f'(x) = 0$.
On a $f'(x) = 1 - 2\sin(x)$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$ (30° et 150°).

Avec $x = \frac{\pi}{6}$, on a $y = f(x) = \frac{\pi}{6} + 2\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ ($\cong 3{,}3$).

Avec $x = \frac{5\pi}{6}$, on a $y = f(x) = \frac{5\pi}{6} + 2\cos(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} + 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ ($\cong 0{,}89$).

Les points à tangente horizontale sont donc $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$.

b) On va calculer $f''(x)$ puis déterminer le signe de f'' pour les points concernés.
Si $f'' > 0$, le point est un minimum. Si $f'' < 0$, le point est un maximum.
D'après a), on a $f'(x) = 1 - 2\sin(x)$.
Ainsi $f''(x) = -2\cos(x)$.
Pour $x = \frac{\pi}{6}$, on a $f''(x) = -2\cos(\frac{\pi}{6}) = -1{,}732 < 0$.
Pour $x = \frac{5\pi}{6}$, on a $f''(x) = -2\cos(\frac{5\pi}{6}) = 1{,}732 > 0$.

Ainsi $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ est un maximum et $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$ est un minimum.

Exercice 2

On a $f(x) = \sqrt{2x-6}$.

a) L'ensemble de définition est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f.
On doit avoir $2x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow 2x \geqslant 6 \Rightarrow x \geqslant 3 \Rightarrow \underline{\underline{D = [3 ; +\infty[}}$.

c) L'équation cartésienne de la tangente est de la forme $y - mx - h = 0$ (i.e. $y = mx + h$), où m est la pente de la droite. On sait que $m = f'(5)$ (pente de la tangente en $x = 5$).

On a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x-6}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x-6}}$.

Ainsi $m = f'(5) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 5 - 6}} = \dfrac{1}{\sqrt{10-6}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.

L'équation de la tangente s'écrit donc $y - \frac{1}{2}x - h = 0$.
La tangente passe au point de tangence T.
On sait que $T(5 ; f(5))$.
Comme $f(5) = \sqrt{2 \cdot 5 - 6} = \sqrt{10-6} = \sqrt{4} = 2$, on a $T(5 ; 2)$.
Par substitution dans l'équation de la tangente, on a :

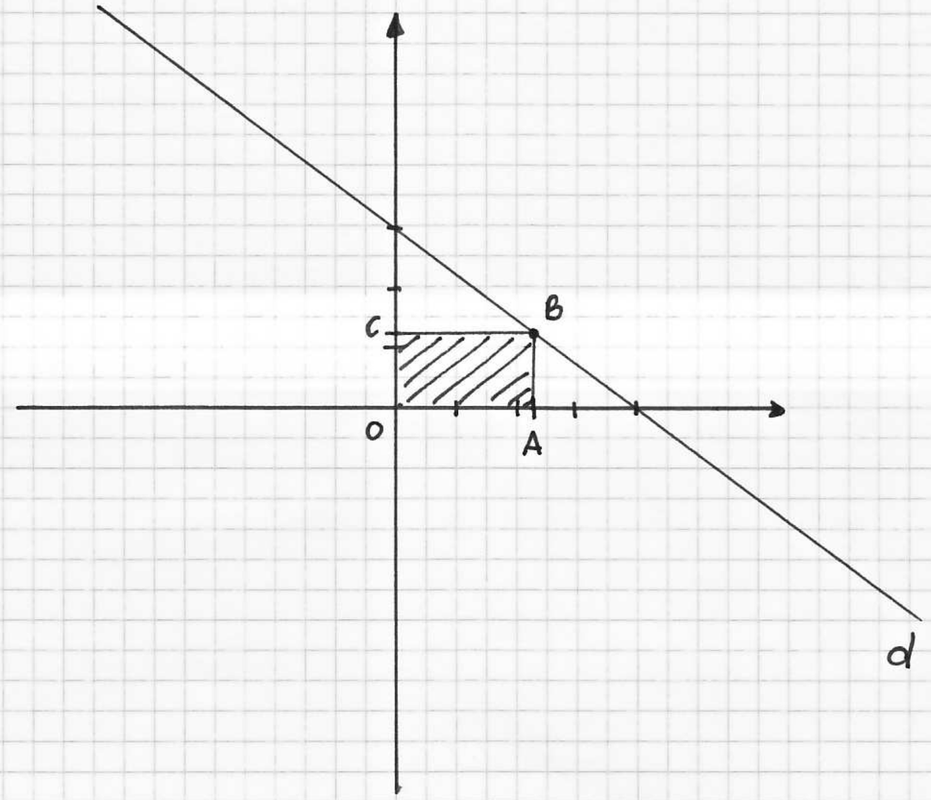
$$2 - \frac{1}{2} \cdot 5 - h = 0 \Rightarrow h = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}.$$

L'équation de la tangente est donc $y - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, ce que l'on peut écrire

$$\underline{\underline{x - 2y - 1 = 0.}}$$

Exercice 3

a)



b) Posons $A(x;0)$.

On a alors $B(x;y)$ où $y=-\frac{3}{4}x+3$. Ainsi $B(x;-\frac{3}{4}x+3)$.

De plus, on a $C(0;-\frac{3}{4}x+3)$.

L'aire du rectangle OABC vaut $f(x)=x(-\frac{3}{4}x+3)=-\frac{3}{4}x^2+3x$.

Cherchons x tel que $f'(x)=0$, ce qui nous donnera le maximum de la parabole.

On a $f'(x)=-\frac{3}{4}\cdot 2x+3=-\frac{3}{2}x+3$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x+3=0 \Rightarrow \frac{3}{2}x=3 \Rightarrow x=2$.

Avec $x=2$, on a $y=-\frac{3}{4}x+3=-\frac{3}{4}\cdot 2+3=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$.

Ainsi, les coordonnées du point B pour lequel l'aire du rectangle OABC est maximale sont $\underline{\underline{(2;\frac{3}{2})}}$.