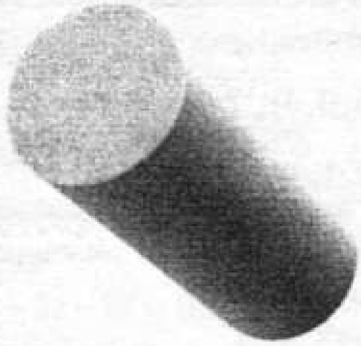
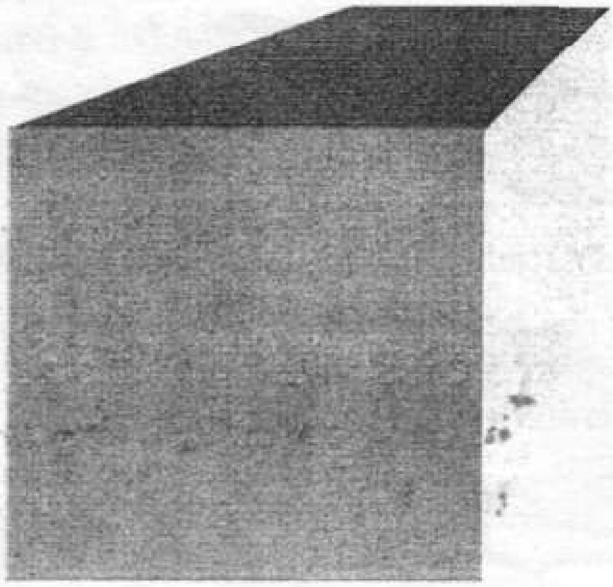
Lycée Denis-de-Rougemont

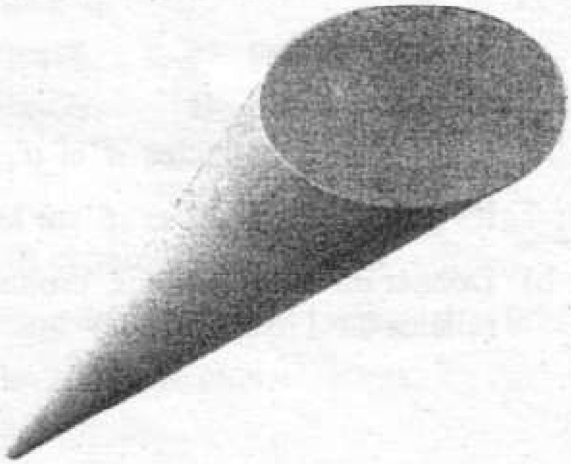
Mathématiques de niveau 1

Degré 11

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE







Exercice 1

On donne les points $A(1;2;3)$, $B(-4;0;2)$, $C(2;5;0)$ et $D(3;-2;7)$. Placer ces points, ainsi que leurs projections sur les plans de référence, dans un repère affine.

Exercice 2

a) À quelle condition deux points A et B ont-ils la même projection sur le sol ? sur le mur ? sur la paroi ?

b) À quelle condition les points $A(a;b;0)$ et $B(0;c;d)$ sont-ils les projections respectives sur le sol et le mur d'un même point P ?

Exercice 3

Les droites suivantes sont données par un point A et un vecteur directeur $\vec{t}$. Écrire une représentation paramétrique algébrique de ces droites et trouver leurs traces éventuelles dans les trois plans de référence. Dessiner enfin ces droites et leur projection sur le sol en supposant les plans de référence opaques et en ne traçant en trait plein que la partie visible des droites.

a) $A(1;2;2)$, $\vec{t}=-\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}$

b) $A(2;1;0)$, $\vec{t}=\vec{e_1}-\vec{e_2}+2\vec{e_3}$

c) $A(3;0;4)$, $\vec{t}=\vec{e_1}$

d) $A(2;1;3)$, $\vec{t}=-\vec{e_1}+\vec{e_2}$

Exercice 4

La droite d passe par les points $A(6;2;2)$ et $B(3;4;1)$.

a) Trouver une représentation paramétrique algébrique de d et ses traces dans les plans de référence.

b) Dessiner la droite et sa projection sur la paroi parallèlement à $\vec{e_2}$.

Exercice 5

a) Deux droites distinctes d et d' passent par le point $A(a;b;c)$. En quel point les projections de d et d' sur le sol (parallèlement à $\vec{e_3}$) se coupent-elles ?

b) Donner un exemple de 2 droites non parallèles qui ont des projections parallèles dans le sol.

Exercice 6

Étudier la position relative des paires de droites suivantes.

a) a passe par $A(6;3;0)$ et par $B(5;4;1)$, b passe par $C(0;0;4)$ et par $D(1;1;3)$.

b) a passe par $A(-3;-1;2)$ et par $B(-1;0;1)$, b passe par $C(4;-1;0)$ et par $D(8;1;-2)$.

c) a passe par $A(1;4;1)$ et par $B(5;6;1)$, b passe par $C(-1;15;5)$ et par $D(-3;20;7)$.

d) a passe par $A(2;-1;-3)$ et par $B(6;1;-5)$, b passe par $C(4;0;-4)$ et par $D(10;3;-7)$.

Exercice 7

Les plans suivants sont donnés par trois points. Trouver une représentation paramétrique algébrique et une équation cartésienne de chaque plan.

a) $A(6;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$ b) $A(2;1;3)$, $B(5;-1;6)$, $C(1;4;2)$

c) $A(2;3;5)$, $B(1;0;5)$, $C(6;-2;5)$

Exercice 8

Dessiner les traces des plans dont les équations sont données ci-dessous en supposant opaques les plans de référence.

a) $4x+6y+3z-12=0$ c) $2x-y-z+6=0$ e) $z-4=0$

b) $x-y+z-4=0$ d) $2x+y-6=0$ f) $x-5=0$

Exercice 9

Trouver la forme de l'équation cartésienne d'un plan :

a) parallèle au sol c) parallèle à la paroi e) parallèle à l'axe Oy

b) parallèle au mur d) parallèle à l'axe Ox f) parallèle à l'axe Oz

Exercice 10

On considère la droite d passant par $A(6;0;0)$ et parallèle au vecteur $\vec{t}=-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+\vec{e_3}$. Trouver l'équation cartésienne du plan déterminé par d et le point $B(1;2;5)$. Dessiner ensuite la droite et les traces du plan.

Exercice 11

On donne le plan $\alpha : 2x + 3y + 3z - 12 = 0$.

a) Trouver une représentation paramétrique algébrique de la droite horizontale qui est incluse dans le plan α et dont tous les points ont une cote égale à 2.

b) Dessiner les traces du plan α ainsi que la droite horizontale.

c) Dessiner les traces du plan β qui passe par les points $A(6;-2;0)$ et $B(0;1;-3)$ et dont la trace dans le sol est parallèle à celle de α.

d) Trouver une équation cartésienne du plan β.

Exercice 12

Examiner les positions relatives des plans et droites suivants :

a) $\pi : 3x + 4y - 5z - 6 = 0$, d passe par $A(5;2;5)$ et par $B(4;0;2)$.

b) $\pi : 2x - 3y + z - 1 = 0$, d passe par $A(2;2;3)$ et par $B(-3;2;13)$.

Exercice 13

On donne les points $A(8;8;0)$, $B(12;16;0)$ et $S(0;16;14)$, ainsi que le plan α d'équation $x = 5$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection respectifs A' et B' des droites SA et SB avec le plan α.

b) Montrer que les droites AB et $A'B'$ se coupent en un point P. Calculer les coordonnées de ce point.

Exercice 14

On donne les plans $\alpha : z - 3 = 0$ et $\beta : 2x + y + 2z - 10 = 0$.

a) Dessiner les traces de ces plans ainsi que leur droite d'intersection.

b) Établir une représentation paramétrique algébrique de la droite d'intersection.

Exercice 15

On donne les trois plans $\alpha : 3x - y + 9z + 4 = 0$, $\beta : x + y - z = 0$ et $\gamma : x + 2y - 4z - 1 = 0$. Montrer que ces plans se coupent selon une droite et donner une représentation paramétrique algébrique de cette droite.

Exercice 16

On donne le plan $\alpha : 2x+3y+6z-18=0$ et la droite d passant par $A(3;1;4)$ et $B(9;-1;6)$. On considère encore le plan β qui contient la droite d et qui est parallèle à l'axe Oz.

a) Étudier la position relative de α et d et calculer, le cas échéant, les coordonnées du point d'intersection.

b) Trouver une équation cartésienne du plan β.

c) Trouver une représentation paramétrique algébrique de la droite d'intersection des deux plans.

d) Dessiner les traces des deux plans ainsi que les deux droites.

Exercice 17

Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}$

Exercice 18

On donne les points $A(4;-3;3)$, $B(4;-1;6)$ et $C(0;2;-5)$.

a) On considère le point $D(1;2;d)$ où d est un nombre réel. Déterminer la valeur de d sachant que le point D appartient au plan ABC.

Indication : Le volume du parallélépipède déterminé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ doit être nul.

b) On considère le point $P(x;y;z)$. Trouver une relation entre x, y et z sachant que le point P appartient au plan ABC. Commenter le résultat.

Exercice 19

Dans une base orthonormée $\{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3}\}$, on donne les vecteurs $\vec{a}=\vec{u_1}-2\vec{u_2}+3\vec{u_3}$ et $\vec{b}=2\vec{u_1}+7\vec{u_2}-\vec{u_3}$. Calculer l'angle formé par ces vecteurs.

Exercice 20

La droite a est donnée par les points $A(3;0;5)$ et $B(-1;2;7)$. La droite b est donnée par les points $C(-6;4;2)$ et $D(5;4;3)$. Calculer la valeur de l'angle aigu déterminé par ces deux droites.

Remarque: On parle d'angle de deux droites même si elles ne sont pas sécantes.

Exercice 21

On donne les plans $\alpha : 2x - 3y + 4z + 4 = 0$ et $\beta : -3x + y + 2z = 0$. Calculer la valeur de l'angle aigu déterminé par ces deux plans.

Exercice 22

On donne le plan $\pi : x + 3y - 7z + 1 = 0$ ainsi que les points $A(5;0;4)$ et $B(-6;1;3)$. Calculer la valeur de l'angle aigu sous lequel la droite AB coupe le plan π.

Exercice 23

On donne quatre points : $A(1;2;0)$, $B(6;2;5)$, $C(3;-2;0)$ et $D(-2;-2;-5)$.

a) Vérifier que ces points appartiennent à un même plan π dont on donnera une équation cartésienne. Dessiner également les traces de π dans les trois plans de référence.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites AC et BD.

c) Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un losange et calculer la valeur de ses angles ainsi que son aire.

d) Calculer la valeur de l'angle aigu déterminé par la droite BD et le sol.

e) Établir une équation cartésienne du plan qui coupe le plan π à angle droit selon la droite AC.

Exercice 24

On donne le plan $\pi : x - 2y + 3z + 20 = 0$ et le point $A(-1;3;5)$.

a) Calculer les coordonnées du point B qui est la projection orthogonale de A sur le plan π.

b) Calculer la plus courte distance entre le plan π et le point A.

c) Trouver le symétrique de A par rapport à π (symétrie planaire).

Exercice 25

On donne la droite $d : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -7 + 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ et le point $A(4;2;-4)$.

a) Trouver le point P de la droite qui est le plus proche du point A.

b) Trouver le symétrique de A par rapport à d (symétrie axiale).

Exercice 26

On considère le plan π passant par l'origine et orthogonal à $\vec{n} = 6\vec{u_1} - 7\vec{u_2} + 6\vec{u_3}$.
Calculer la distance de π aux points $P(1;0;3)$, $Q(-2;3;5)$ et $R(4;-1;0)$.
Le triangle PQR est-il rectangle ?

Exercice 27

Trouver les équations cartésiennes des plans orthogonaux à $\vec{n} = 3\vec{u_1} - 4\vec{u_2} + 12\vec{u_3}$ et dont la distance jusqu'au point $P(-6;2;1)$ vaut 2.

Exercice 28

Trouver les équations cartésiennes des plans se trouvant à la distance 3 du plan $\pi: 7x - 24z + 11 = 0$.

Exercice 29

Démontrer par un contre-exemple que le produit vectoriel n'est pas associatif.

Exercice 30

A, B et C sont les points d'intersection du plan $\pi: 3x + 4y + 6z - 24 = 0$ et des axes de référence.

a) Dessiner le tétraèdre $OABC$ et calculer son volume.
b) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 31

On donne les points $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$ et $C(2;1;0)$.

a) Calculer l'aire du triangle ABC.
b) Trouver une équation cartésienne du plan π contenant ce triangle.
c) Trouver des équations paramétriques de la droite d, incluse dans le plan π et médiatrice du segment BC.

Exercice 32

On donne la pyramide $SOAB$ de sommet $S(0;0;8)$ et de base OAB avec $A(6;0;0)$ et $B(0;4;0)$. On coupe cette pyramide par le plan π d'équation $2x + 3y + 3z - 18 = 0$.

a) Dessiner la section de la pyramide par le plan et calculer son aire.
b) Calculer la distance de la droite AB à chaque sommet de la section.

Exercice 33

On donne les plans $\alpha : x + y - z - 8 = 0$ et $\beta : 2x - 3y + z - 11 = 0$.

a) En employant un produit vectoriel, trouver un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans.

b) Calculer la distance de cette droite au point $A(4;\ ?\ ;\ ?)$, A dans β et dans le sol.

Exercice 34

On donne les plans $\alpha : 2x + y - 2z - 19 = 0$ et $\beta : 8x - y + 4z - 11 = 0$.

a) Trouver les équations cartésiennes de π_1 et π_2 qui sont les plans bissecteurs de α et β.

b) Trouver une représentation paramétrique algébrique de la droite incluse dans les 4 plans α, β, π_1 et π_2.

Exercice 35

On donne les points $A(4;6;3)$, $B(8;3;1)$, $C(6;-8;5)$ et $D(-6;1;7)$. Calculer la plus courte distance entre les droites AB et CD.

Exercice 36

On donne les droites $a : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 0 \\ z = 2 - s \end{cases}$ et $b : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

a) Calculer la plus courte distance entre ces droites.

b) Trouver des équations paramétriques de la droite p qui coupe a et b à angle droit.

Exercice 37

Trouver le centre et le rayon de la sphère $s : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 14z + 25 = 0$ puis déterminer la position relative du plan $\pi : x + y + z - 7 = 0$ par rapport à la sphère.

Exercice 38

On considère la sphère de rayon 6 centrée à l'origine ainsi que la droite passant par les points $A(3;0;-1)$ et $B(4;4;2)$. Trouver les points d'intersection de la droite et de la sphère.

Exercice 39

On donne le plan $\pi : 36x + 48y + 25z - 600 = 0$ et la droite d passant par les points $A(3;4;12)$ et $B(6;8;0)$.

a) Déterminer la position relative de π et d.

b) Montrer que π et d sont tangents à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + (z-11)^2 = 25$.

c) Trouver les points de contact.

Exercice 40

On considère la sphère s de centre O et de rayon 7 ainsi que la droite d passant par les points $A(8;5;8)$ et $B(5;1;7)$.

a) Montrer que la droite est tangente à la sphère et trouver le point de contact T.

b) Trouver une équation cartésienne du plan tangent à la sphère en T.

c) Trouver des équations paramétriques de la droite p qui est perpendiculaire à d et tangente à la sphère en T.

Exercice 41

On donne le plan π d'équation $2x - 2y - z + 15 = 0$ et la sphère s d'équation $(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$.

a) Déterminer la position relative du plan et de la sphère.

b) Trouver les équations cartésiennes des plans parallèles à π et tangents à la sphère.

c) Trouver les points de contact entre les plans et la sphère.

Exercice 42

On donne la sphère s de centre $M(9;5;4)$ et de rayon 9. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère et du plan $\pi : 4x + z - 6 = 0$.

Exercice 43

On donne le plan π d'équation $3x - 6y + 2z + 5 = 0$ ainsi que le point $T(1;2;?)$ inclus dans π. Établir l'équation d'une sphère de rayon 21 tangente au plan π, le point de contact étant T.

Exercice 44 (Bac 2000)

1. Dessiner les traces du plan $\alpha : 2x + y + 2z - 10 = 0$.
2. La droite horizontale h passe par $A(3;0;2)$ et est contenue dans le plan α.
   a) Dessiner cette droite ainsi que sa projection sur le sol.
   b) Montrer que $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de h.
3. La sphère s est centrée en $C(-2;0;7)$ et passe par A.
   a) Établir l'équation de cette sphère.
   b) Calculer les coordonnées du deuxième point d'intersection de la droite h et de la sphère.
4. La droite d est tangente à la sphère s en A et perpendiculaire à h. Trouver un vecteur directeur de d.
5. On considère le plan $\beta : 2x + y + k = 0$.
   a) Trouver k sachant que le plan contient la droite h.
   b) Dessiner les traces du plan β.
   c) De quel angle φ faut-il faire tourner le plan α autour de la droite h pour l'amener sur le plan β ?
6. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère s et du plan β.

Exercice 45

On donne la sphère $s : (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ et le plan $\alpha : x + 2y - 2z + 40 = 0$.

a) Après avoir vérifié que le plan α ne coupe pas la sphère, calculer la plus courte distance les séparant.

b) $C(1;-6;5)$ est le centre du cercle d'intersection du plan β et de la sphère. Déterminer le rayon de ce cercle ainsi qu'une équation cartésienne du plan β.

Exercice 46 (Bac 1999)

On donne le cube $ABCDEFGH$ avec $A(0;0;0)$, $B(5;0;0)$, $D(0;5;0)$ et $E(0;0;5)$ ainsi que le plan $\alpha: x+y-8=0$ et la droite $d:\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=-6+3\lambda \\ z=12-3\lambda \end{cases}$.

a) Dessiner le cube.

b) Dessiner la section du cube par le plan α et calculer l'aire de cette section.

c) Dessiner la droite d après avoir déterminé ses points d'intersection avec les plans de référence.

d) Calculer la distance entre la droite d et le point D.

e) Calculer les coordonnées du point d'intersection de d et α.

f) Calculer l'angle φ entre le mur et le plan α.

g) On donne la sphère $s_1: x^2+y^2+(z-3)^2=32$. Montrer que le plan α est tangent à s_1 et calculer les coordonnées du point de contact.

h) Rechercher l'équation du plan β sachant que α et β sont parallèles et que β est aussi tangent à s_1.

i) Rechercher l'équation de la sphère s_2 sachant que s_1 et s_2 sont symétriques par rapport à α.

Exercice 47

On considère la sphère s de rayon 5 et de centre $M(5;2;9)$, ainsi que le point $T(2;6;?)$, T étant un point de la sphère. Trouver des équations paramétriques algébriques de la droite t qui est horizontale et tangente à la sphère en T.