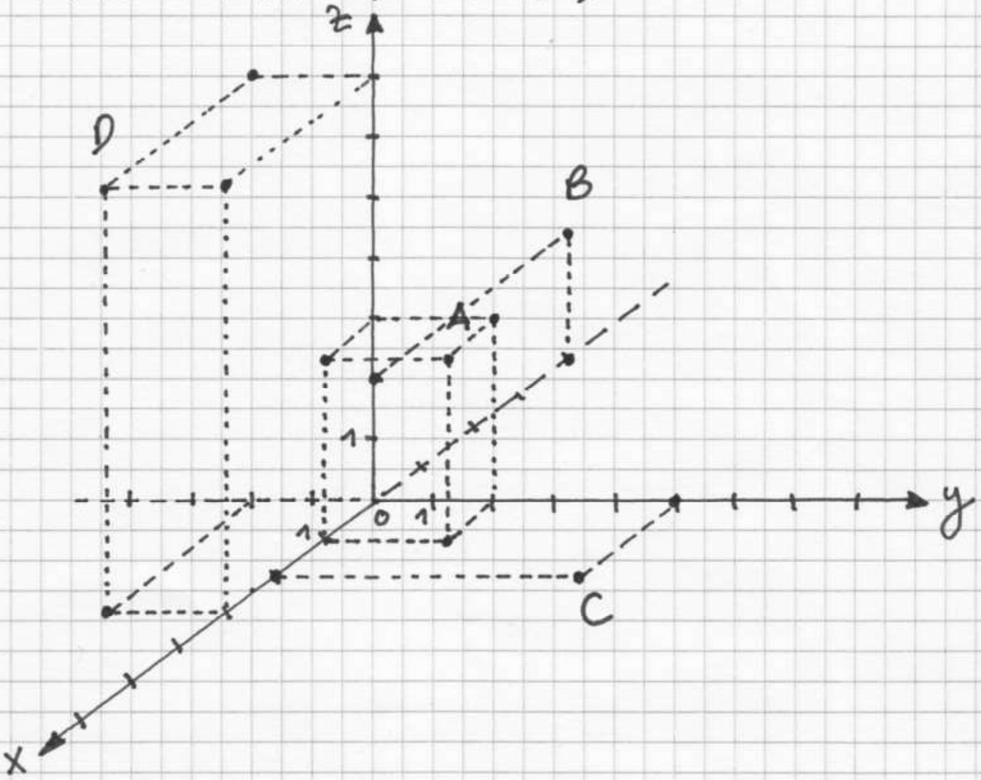
Exercices de GEOMETRIE DANS L'ESPACE
CORRIGÉ

Exercice 1

On a : $A(1;2;3)$, $B(-4;0;2)$, $C(2;5;0)$ et $D(3;-2;7)$.



Exercice 2

a) 2 points A et B ont même projection sur le sol si A et B appartiennent à une droite parallèle à l'axe z (droite verticale).

2 points A et B ont même projection sur le mur si A et B appartiennent à une droite parallèle à l'axe x.

2 points A et B ont même projection sur la paroi si A et B appartiennent à une droite parallèle à l'axe y.

b) Si $A(a; b; 0)$ est la projection sur le sol d'un point $P(x; y; z)$, on doit avoir $x = a$ et $y = b$.

Si $B(0; c; d)$ est la projection sur le mur d'un point $P(x; y; z)$, on doit avoir $y = c$ et $z = d$.

Comme les points P sont identiques, on doit avoir $\underline{\underline{b = c}}$.

Exercice 3

a) On a : $A(1;2;2)$, $\vec{t} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

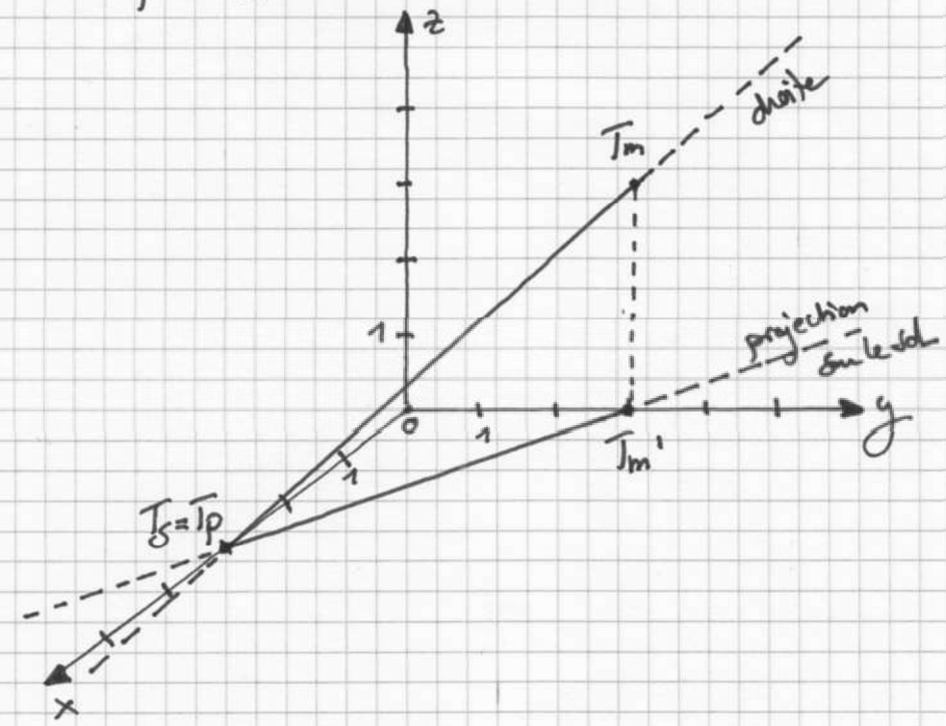
Ainsi les équations paramétriques sont : $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

Trace dans le sol : on pose $z = 0$; on obtient $2 + \lambda = 0$, i.e. $\lambda = -2$;
ainsi $x = 1 - (-2) = 3$ et $y = 2 + (-2) = 0$;
donc $T_S(3;0;0)$.

Trace dans la paroi : on pose $y = 0$; on obtient $2 + \lambda = 0$, i.e. $\lambda = -2$;
ainsi $x = 1 - (-2) = 3$ et $z = 2 + (-2) = 0$;
donc $T_P(3;0;0)$.

Trace dans le mur : on pose $x = 0$; on obtient $1 - \lambda = 0$, i.e. $\lambda = 1$;
ainsi $y = 2 + 1 = 3$ et $z = 2 + 1 = 3$;
donc $T_m(0;3;3)$.

Pour dessiner la droite, on représente T_S, T_P et T_m et on les relie.
Pour dessiner la projection de la droite dans le sol, on représente T_P' et T_m', les projections de T_P et T_m dans le sol et on les relie avec T_S :



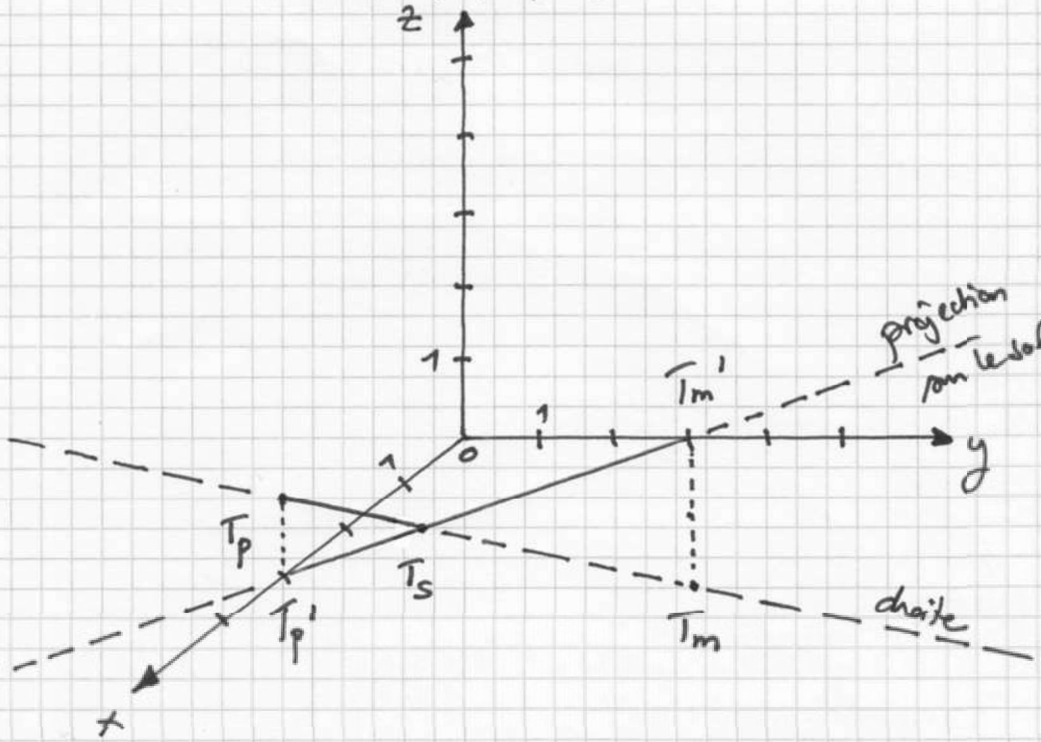
b) On a: $A(2;1;0)$, $\vec{t} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi les équations paramétriques sont: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda . \end{cases}$

Trace dans le sol: on pose $z = 0$; on obtient $\lambda = 0$;
ainsi $x = 2 + 0 = 2$ et $y = 1 - 0 = 1$;
donc $\underline{T_s(2;1;0)}$.

Trace dans la paroi: on pose $y = 0$; on obtient $1 - \lambda = 0$, $\lambda = 1$;
ainsi $x = 2 + 1 = 3$ et $z = 1$;
donc $\underline{T_p(3;0;1)}$.

Trace dans le mur: on pose $x = 0$; on obtient $2 + \lambda = 0$, i.e. $\lambda = -2$;
ainsi $y = 1 - (-2) = 3$ et $z = -2$;
donc $T_m = (0;3;-2)$.



c) On a: $A(3;0;4)$, $\vec{t} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

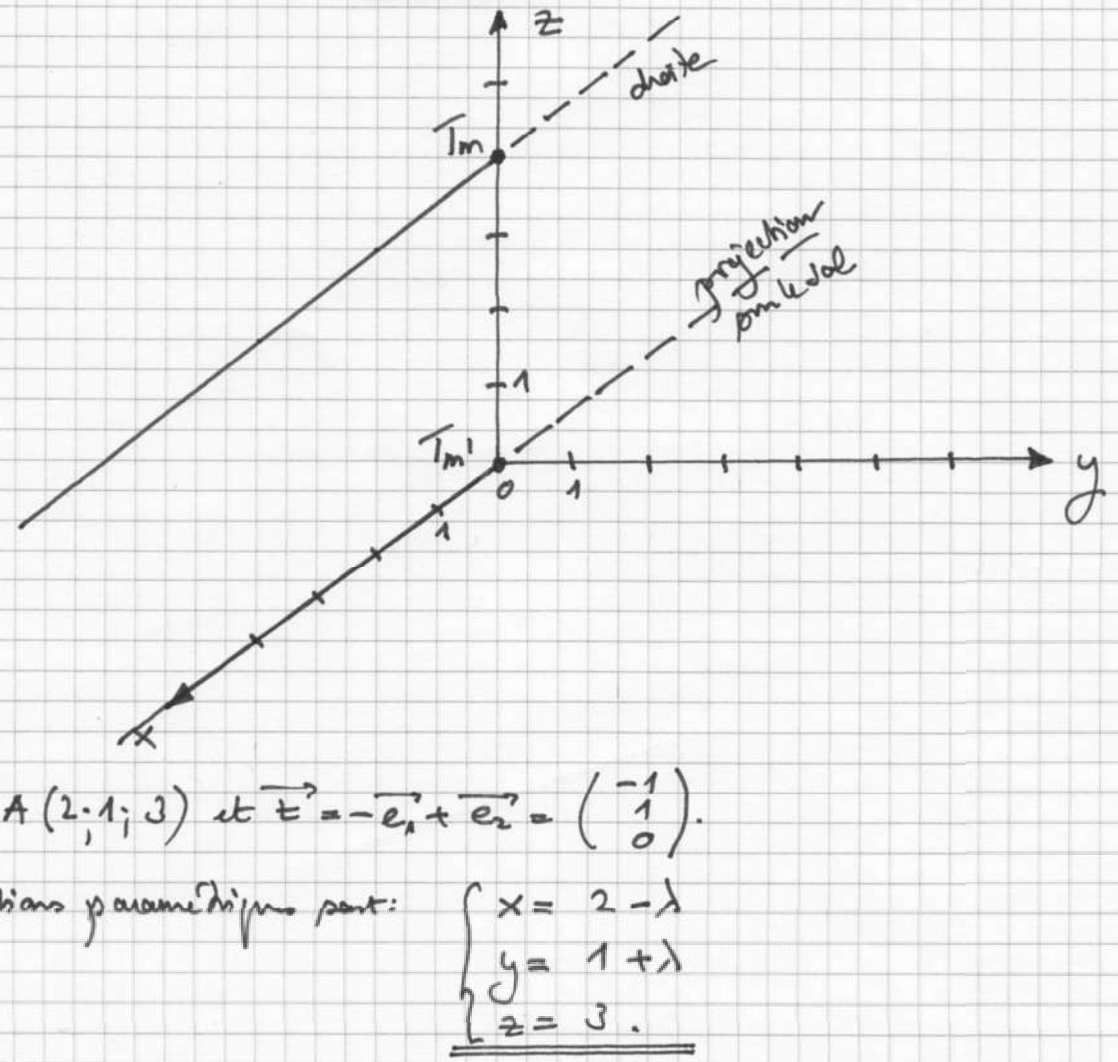
Ainsi les équations paramétriques sont: $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 4 . \end{cases}$

Trace dans le sol: on pose $z = 0$, on obtient $4 = 0$, ce qui est impossible;

donc <u>il n'y a pas de trace dans le sol.</u>

Trace dans la paroi : on pose $y = 0$; on obtient $0 = 0$;
ainsi $x = 3 + \lambda$ et $z = 4$, ce qui donne une infinité de solution;
donc <u>la trace dans la paroi comprend une infinité de points de la forme $(3+\lambda ; 0 ; 4)$.</u>

Trace dans le mur : on pose $x = 0$; on obtient $3 + \lambda = 0$, i.e. $\lambda = -3$;
ainsi, avec $y = 0$ et $z = 4$, la trace dans le mur est <u>$T_m(0 ; 0 ; 4)$.</u>



d) On a : $A(2 ; 1 ; 3)$ et $\vec{t} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques sont : $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 . \end{cases}$

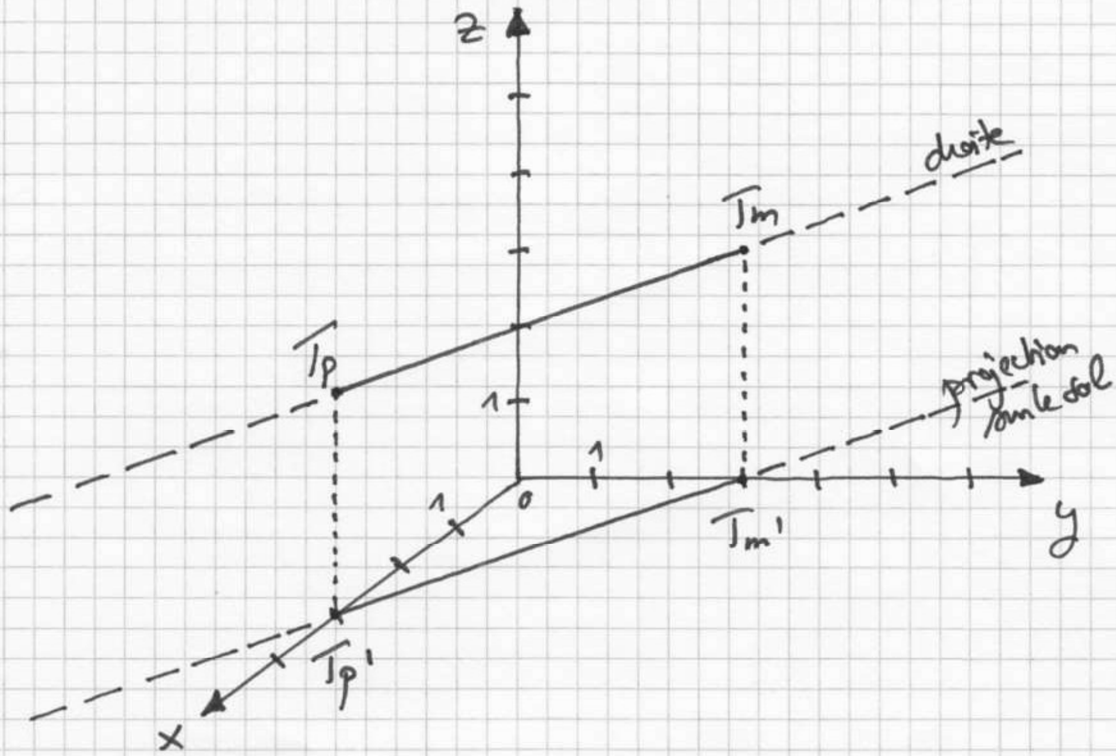
Trace dans le sol : on pose $z = 0$; on obtient $3 = 0$, ce qui est impossible;
donc, <u>il n'y a pas de trace dans le sol.</u>

Trace dans la paroi : on pose $y = 0$, on obtient $1 + \lambda = 0$, i.e. $\lambda = -1$;
ainsi, $x = 2 - (-1) = 3$ et $z = 3$;
donc <u>$T_p(3 ; 0 ; 3)$.</u>

Trace dans le mur : on pose $x = 0$, on obtient $2 - \lambda = 0$, i.e. $\lambda = 2$;

ainsi, $y = 1 + 2 = 3$ et $z = 3$;

donc $\underline{\underline{T_m(0\,;3\,;3)}}$.



Exercice 4

a) La droite d passe par $A(6;2;2)$ et $B(3;4;1)$.
Elle passe donc par $A(6;-2;-2)$ et est parallèle à $\overrightarrow{AB}$.
On a:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut prendre ce vecteur comme vecteur directeur de d.
Ainsi les équations paramétriques de d sont:

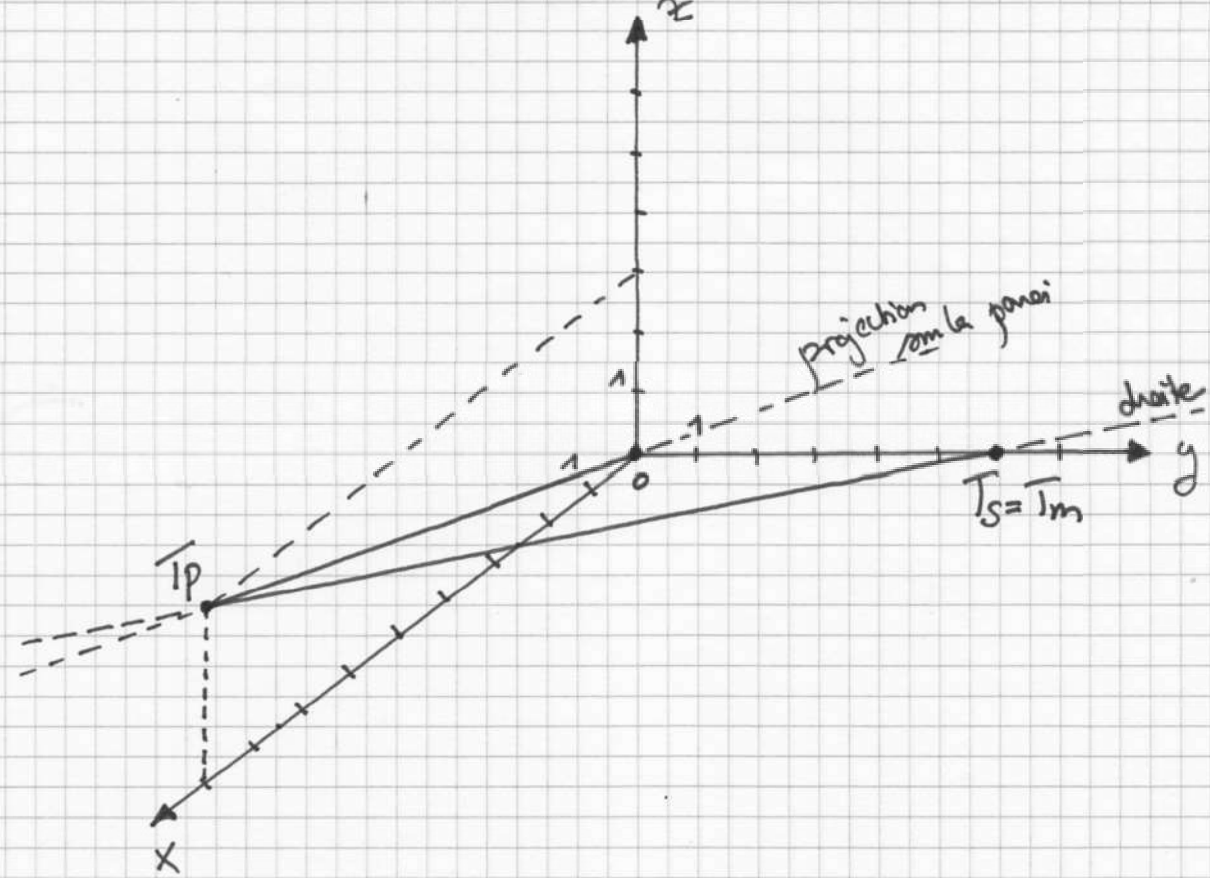
$$\begin{cases} x = 6 - 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda. \end{cases}$$

Trace dans le sol: on pose $z=0$; on obtient $2-\lambda=0$, i.e. $\lambda=2$;
ainsi $x = 6-3.2=0$ et $y=2+2.2=6$;
donc $T_S(0;6;0)$.

Trace dans la paroi: on pose $y=0$, on obtient $2+2\lambda=0$, i.e. $2\lambda=-2$, i.e. $\lambda=-1$;
ainsi $x=6-3.(-1)=9$ et $z=2-(-1)=3$;
donc $T_P(9;0;3)$.

Trace dans le mur: on pose $x=0$, on obtient $6-3\lambda=0$, i.e. $3\lambda=6$, i.e. $\lambda=2$;
ainsi $y=2+2.2=6$ et $z=2-2=0$;
donc $T_P(0;6;0)$.

b)



Exercice 5

a) d et d' passent par $A(a;b;c)$.
Les projections de d et d' passent donc par $\underline{A'(a;b;0)}$, projection de A sur le sol.

b) Prenons la droite d_1 qui passe par $A(2;0;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Prenons la droite d_2 qui passe par $B(2;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

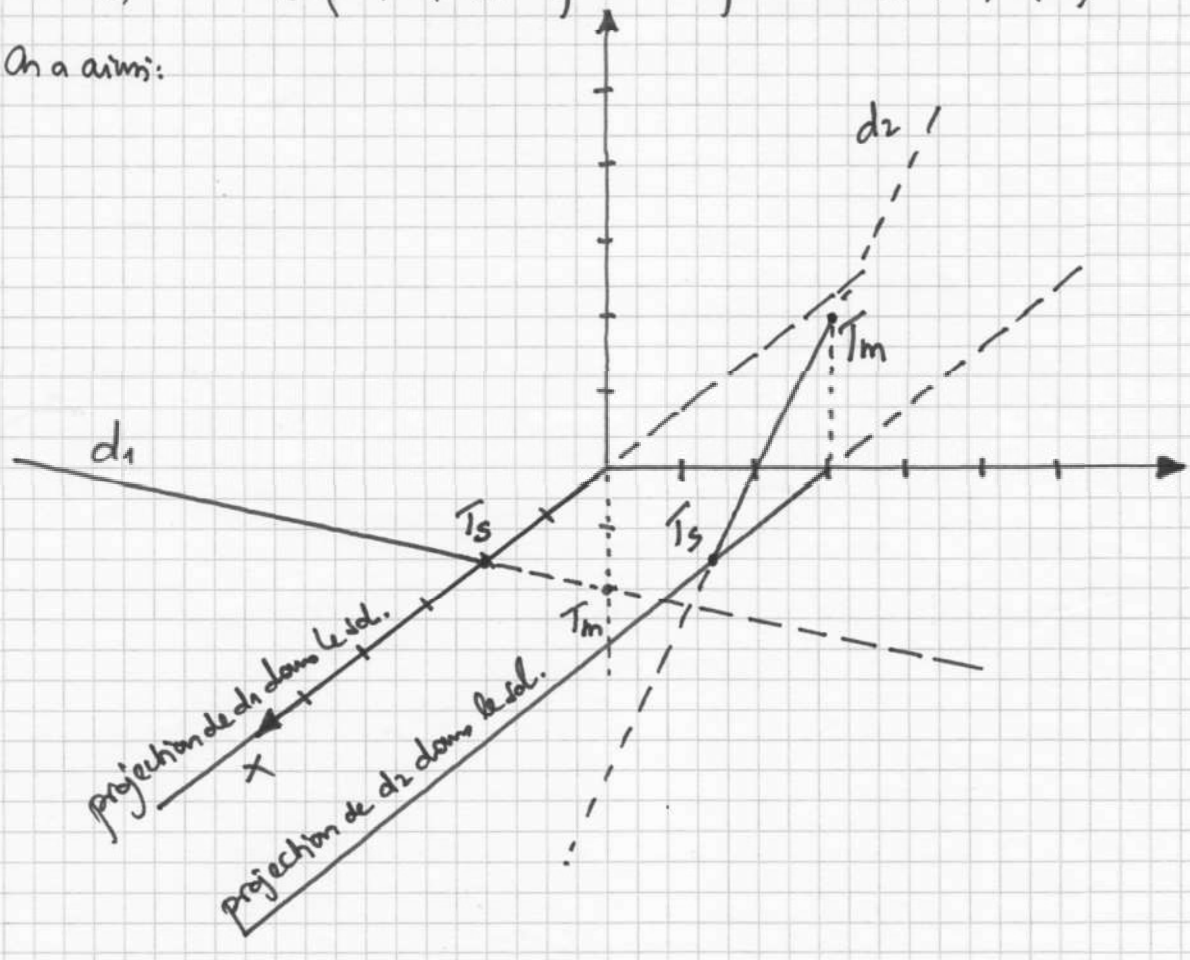
Comme $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas parallèle et $A \neq B$, les droites sont gauches.
Les équations paramétriques de d_1 sont : $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda. \end{cases}$

Pour d_1, on a $T_S(2;0;0)$, $T_P(2+\lambda;0;\lambda)$ et $T_m(0;0;-2)$.

Les équations paramétriques de d_2 sont : $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3 \\ z = -\lambda. \end{cases}$

Pour d_2, on a $T_S(2;3;0)$, T_P n'existe pas et $T_m(0;3;2)$.

On a ainsi :



Exercice 6

a) Un vecteur parallèle à a est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur parallèle à b est $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme ces deux vecteurs ne sont pas parallèles, on en déduit que a et b ne sont pas parallèles (et pas confondues).

Des équations paramétriques de a sont : $\begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda . \end{cases}$

Des équations paramétriques de b sont : $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 4 - \mu . \end{cases}$

Cherchons si ces droites se coupent : si elles se coupent, on doit avoir :

$\begin{cases} 6 - \lambda = \mu \\ 3 + \lambda = \mu \\ \lambda = 4 - \mu \end{cases}$, pour des valeurs de λ et μ.

En substituant la première relation dans la deuxième, on obtient :

$6 - \lambda = 3 + \lambda$, i.e. $6 - 2\lambda = 3$, i.e. $-2\lambda = -3$, i.e. $\lambda = \frac{3}{2}$.

Ainsi, on a $\mu = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Si on introduit ces 2 valeurs ($\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = \frac{9}{2}$) dans la 3e relation, on a :

$\frac{3}{2} = 4 - \frac{9}{2}$, i.e. $\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, ce qui est faux.

Ainsi a et b ne se coupent pas.

On en conclut que <u>a et b sont gauches.</u>

b) Un vecteur parallèle à a est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur parallèle à b est $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ces 2 vecteurs sont parallèles, puisque le second est le double de le premier.

Ainsi a et b sont soit parallèles, soit confondues.

Des équations paramétriques de a sont : $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 - \lambda . \end{cases}$

Voyons si le point C de b appartient à la droite a.

Comme $C(4;-1;0)$, avec $x=4$, on a $-3+2\lambda = 4$, i.e. $2\lambda = 7$, i.e. $\lambda = \frac{7}{2}$; avec $y=-1$, on a $-1+\lambda = -1$, i.e. $\lambda = 2$; avec $z=0$, on a $0 = 2-\lambda$, i.e. $\lambda = 2$.

Comme les valeurs de λ sont différentes, on en conclut que C de b n'appartient pas à la droite a, et donc que <u>a et b sont strictement parallèles.</u>

c) Un vecteur parallèle à a est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Un vecteur parallèle à b est $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Comme ces deux vecteurs ne sont pas parallèles, on en déduit que a et b ne sont pas parallèles (et pas confondues).

Des équations paramétriques de a sont : $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

Des équations paramétriques de b sont : $\begin{cases} x = -1 - 7\mu \\ y = 15 + 20\mu \\ z = 5 + 11\mu \end{cases}$.

Cherchons si ces droites se coupent : si elles se coupent, on doit avoir :

$\begin{cases} 1+4\lambda = -1-7\mu \\ 4+2\lambda = 15+20\mu \\ 1 = 5+11\mu \end{cases}$, pour des valeurs de λ et μ.

De la troisième relation, on obtient $11\mu = -4$, i.e. $\mu = -\frac{4}{11}$.

En substituant dans la première relation, on trouve :

$1+4\lambda = -1-7\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)$, i.e. $1+4\lambda = -1+\frac{28}{11}$, i.e. $1+4\lambda = \frac{17}{11}$, i.e. $4\lambda = \frac{6}{11}$, i.e. $\lambda = \frac{6}{44} = \frac{3}{22}$.

Si on introduit ces 2 valeurs ($\lambda = \frac{3}{22}$ et $\mu = -\frac{4}{11}$) dans la 2^e relation, on a :

$4+2\cdot\frac{3}{22} = 15+20\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)$, i.e. $4+\frac{3}{11} = 15-\frac{80}{11}$, i.e. $\frac{47}{11} = \frac{85}{11}$,

ce qui est faux.

Ainsi a et b ne se coupent pas.

On en conclut que <u>a et b sont gauches.</u>

d) Un vecteur parallèle à a est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur parallèle à b est $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Comme ces 2 vecteurs sont parallèles (le second est 1,5 fois le premier), on en déduit que a et b sont parallèles ou confondues.

Des équations paramétriques de a sont : $\begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = -3-2\lambda . \end{cases}$

Voyons si le point C de b appartient à la droite a.

Comme $C(4;0;-4)$, avec $x=4$, on a $4=2+4\lambda$, i.e. $4\lambda=2$, i.e. $\lambda=\frac{1}{2}$; avec $y=0$, on a $0=-1+2\lambda$, i.e. $2\lambda=1$, i.e. $\lambda=\frac{1}{2}$; avec $z=-4$, on a $4=-3-2\lambda$, i.e. $-2\lambda=7$, i.e. $\lambda=-\frac{7}{2}$.

Comme les valeurs de λ ne sont pas toutes identiques, on en conclut que C de b n'appartient pas à la droite a, et donc que <u>a et b sont strictement parallèles</u>.

Exercice 7

Lorsqu'on connaît 3 points A, B et C d'un plan, des équations paramétriques du plan les contenant sont données par : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ (par exemple), où $P(x;y;z)$.
On obtient l'équation cartésienne du plan par élimination de λ et μ dans les équations paramétriques.

a) $A(6;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.
On a : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi des équations paramétriques du plan sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ i.e.}$$

$$\begin{cases} x = 6 - 6\lambda - 6\mu \\ y = 4\lambda \\ z = 3\mu. \end{cases}$$

De la 2^e relation, on tire $\lambda = \frac{y}{4}$.
De la 3^e relation, on tire $\mu = \frac{z}{3}$.
En introduisant dans la 1^e relation, on obtient :

$$x = 6 - 6 \cdot \frac{y}{4} - 6 \cdot \frac{z}{3} = 6 - \frac{3}{2}y - 2z, \text{ i.e. } 2x = 12 - 3y - 4z,$$

i.e. $2x + 3y + 4z - 12 = 0$.
L'équation cartésienne du plan est donc : $\underline{2x + 3y + 4z - 12 = 0.}$

b) $A(2;3;5)$, $B(1;0;5)$, $C(6;-2;5)$.
On a : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi des équations paramétriques du plan sont : $\begin{cases} x = 2 - \lambda + 4\mu \\ y = 3 - 3\lambda - 5\mu \\ z = 5. \end{cases}$

Comme il n'y a pas de paramètres dans la 3^e relation, on en conclut que l'équation cartésienne du plan est $\underline{\underline{z = 5}}$.

c) $A = (2; 1; 3)$, $B(5; -1; 6)$, $C(1; 4; 2)$.

On a : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Des équations paramétriques du plan sont : $\underline{\underline{\begin{cases} x = 2 + 3\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu. \end{cases}}}$

Eliminons λ et μ de ces équations :

$$\begin{array}{l|l|l} x = 2 + 3\lambda - \mu & \cdot 3 & \cdot 1 \\ y = 1 - 2\lambda + 3\mu & \cdot 1 & \\ z = 3 + 3\lambda - \mu & & \cdot(-1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow 3x + y = 7 - 7\lambda \\ \longrightarrow x - z = -1. \end{array}$$

Comme il n'y a plus de paramètres dans cette dernière équation, on en conclut que l'équation cartésienne du plan est $\underline{\underline{x - z + 1 = 0}}$.

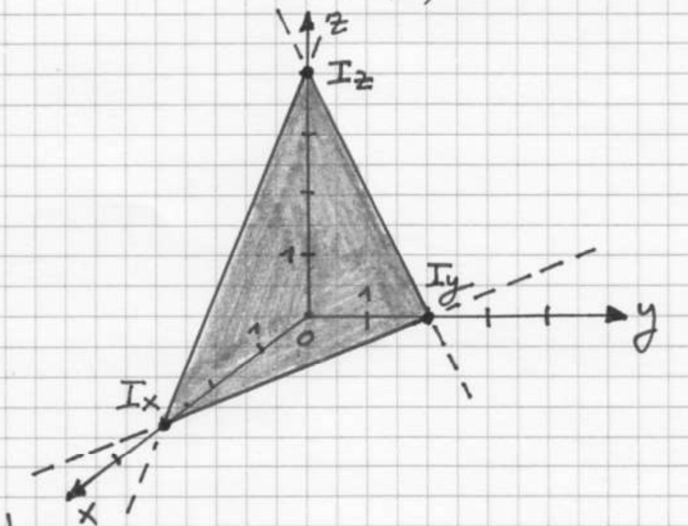
Exercice 8

Pour dessiner les traces d'un plan, on cherche ses intersections avec les axes de référence.

a) Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$;
on obtient $4x - 12 = 0$, i.e. $4x = 12$, i.e. $x = 3$;
ainsi $I_x\,(3;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$;
on obtient $6y - 12 = 0$, i.e. $6y = 12$, i.e. $y = 2$;
ainsi $I_y\,(0;2;0)$.

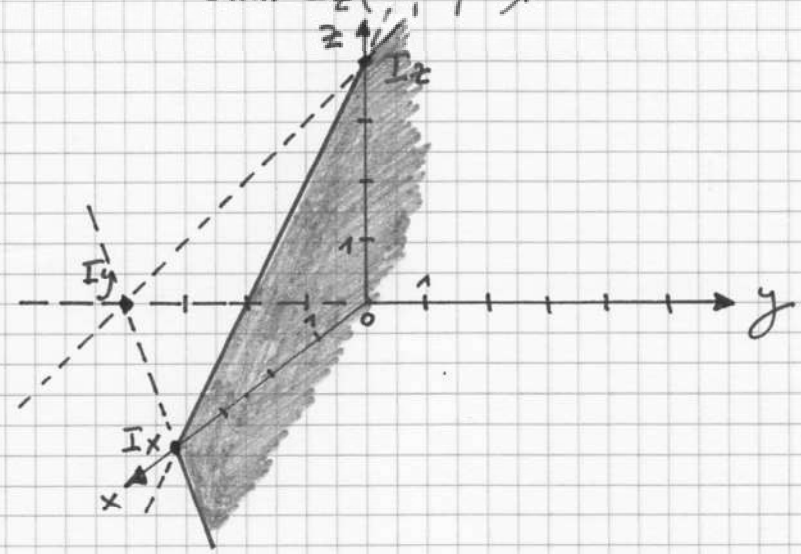
Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$;
on obtient $3z - 12 = 0$, i.e $3z = 12$, i.e. $z = 4$;
ainsi $I_z\,(0;0;4)$.



b) Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$; on obtient $x - 4 = 0$, i.e. $x = 4$;
ainsi $I_x\,(4;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$; on obtient $-y - 4 = 0$, i.e. $y = -4$;
ainsi $I_y\,(0;-4;0)$.

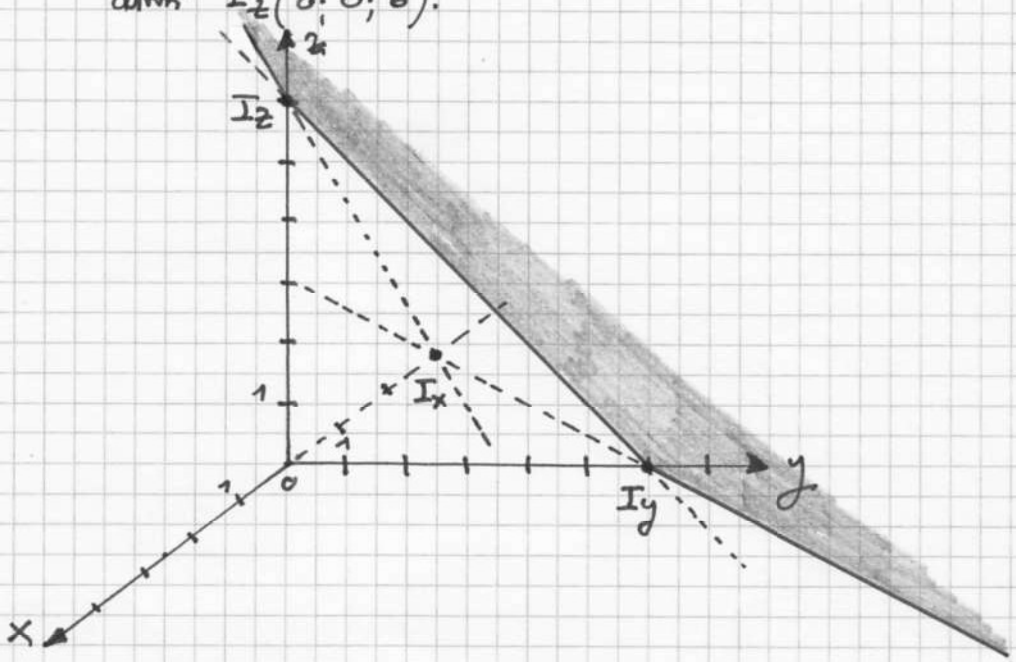
Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$; on obtient $z - 4 = 0$, i.e. $z = 4$;
ainsi $I_z\,(0;0;4)$.



c) Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$; on obtient $2x + 6 = 0$, i.e. $x = -3$;
ainsi $I_x(-3;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$; on obtient $-y + 6 = 0$, i.e. $y = 6$;
ainsi $I_y(0;6;0)$.

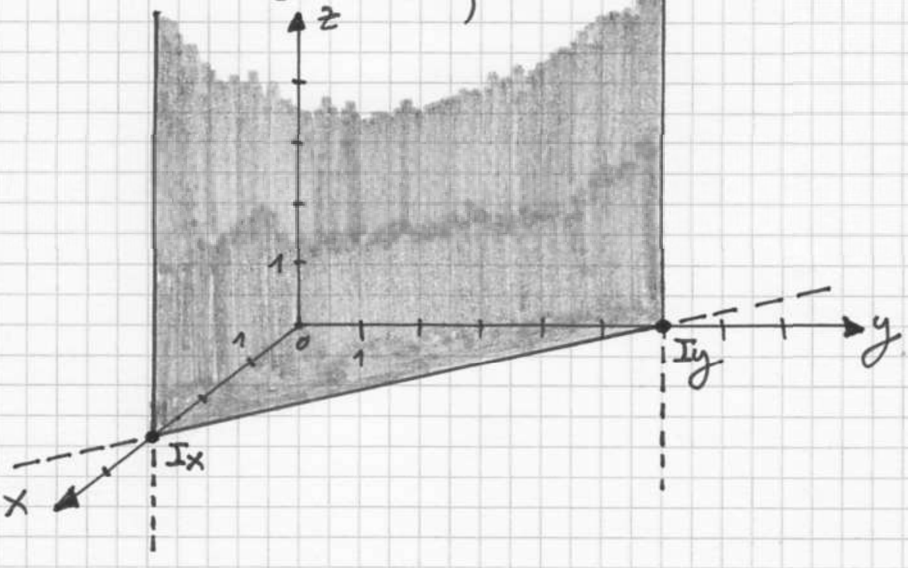
Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$; on obtient $-z + 6 = 0$, i.e. $z = 6$;
ainsi $I_z(0;0;6)$.



d) Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$, on obtient $2x - 6 = 0$, i.e. $x = 3$;
ainsi $I_x(3;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$, on obtient $y - 6 = 0$, i.e. $y = 6$;
ainsi $I_y(0;6;0)$.

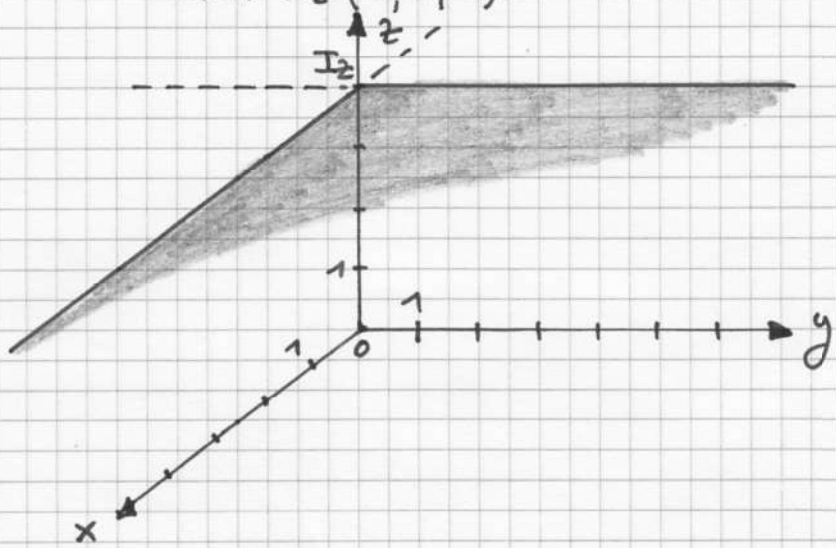
Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$, on obtient $-6 = 0$, impossible ;
ainsi I_z n'existe pas.



e) Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$; on obtient $0 - 4 = 0$, impossible ; ainsi I_x n'existe pas.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$; on obtient $0 - 4 = 0$, impossible ; ainsi I_y n'existe pas.

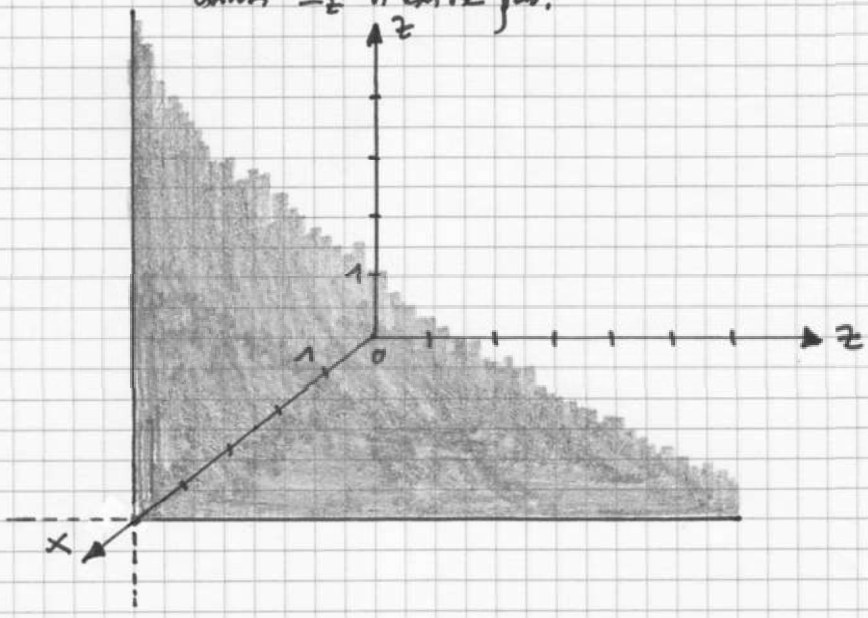
Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$; on obtient $z - 4 = 0$, i.e. $z = 4$; ainsi $I_z\,(0;0;4)$.



f) Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$; on obtient $x = 5$; ainsi $I_x\,(5;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$, on obtient $0 - 5 = 0$, impossible ; ainsi I_y n'existe pas.

Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$, on obtient $0 - 5 = 0$, impossible ; ainsi I_z n'existe pas.



Exercice 9

Si on a un vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, le plan $ax+by+cz+d=0$ est perpendiculaire à $\vec{n}$.

a) Un vecteur perpendiculaire au sol est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi l'équation cartésienne d'un plan parallèle au sol est $\underline{\underline{z+d=0.}}$

b) Un vecteur perpendiculaire au mur est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi l'équation cartésienne d'un plan parallèle au mur est $\underline{\underline{x+d=0.}}$

c) Un vecteur perpendiculaire à la paroi est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi l'équation cartésienne d'un plan parallèle à la paroi est $\underline{\underline{y+d=0.}}$

d) Un vecteur perpendiculaire à l'axe Ox est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
Ainsi l'équation cartésienne d'un plan parallèle à l'axe Ox est $\underline{\underline{by+cz+d=0.}}$

e) Un vecteur perpendiculaire à l'axe Oy est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$.
Ainsi l'équation cartésienne d'un plan parallèle à l'axe Oy est $\underline{\underline{ax+cz+d=0.}}$

f) Un vecteur perpendiculaire à l'axe Oz est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi l'équation cartésienne d'un plan parallèle à l'axe Oz est $\underline{\underline{ax+by+d=0.}}$

Exercice 10

On va chercher les équations paramétriques du plan.
Il faut un point et 2 vecteurs.
Le point est $A(6;0;0)$ ou $B(1;2;5)$.
Le premier vecteur est $\vec{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le deuxième vecteur est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ainsi, les équations paramétriques du plan sont :

$$\begin{cases} x = 6 - \lambda - 5\mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 5\mu \end{cases}$$

Eliminons λ et μ :

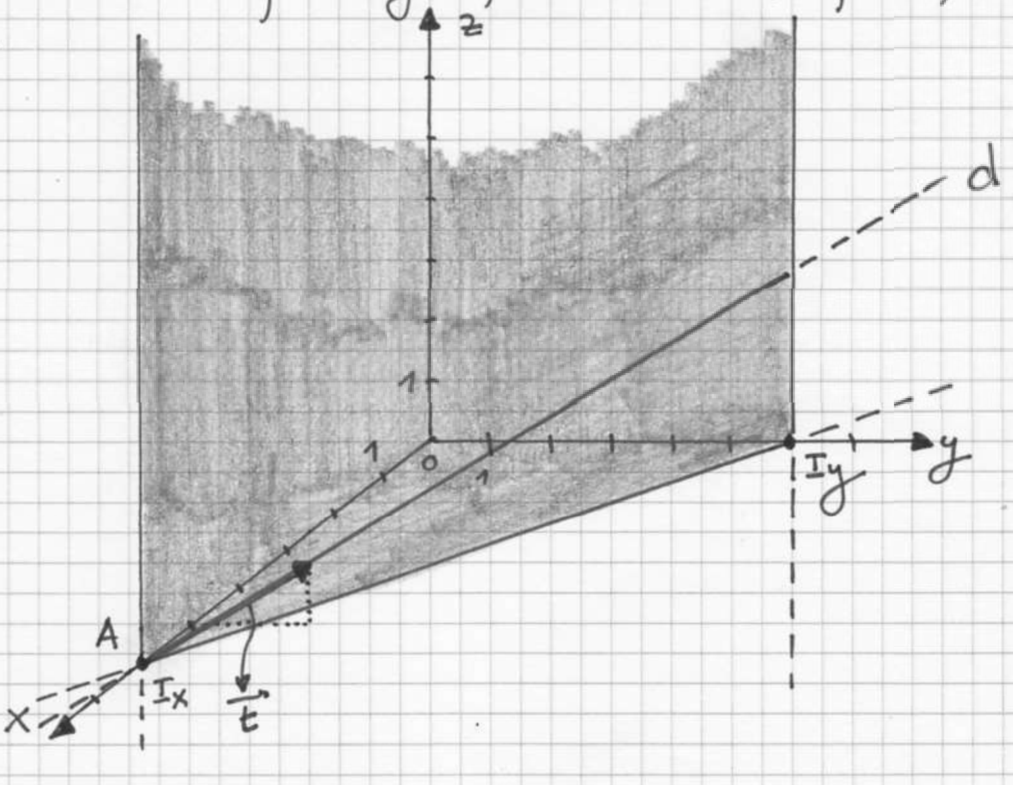
$$\begin{array}{l|c|c} x = 6 - \cancel{\lambda} - 5\mu & \cdot 2 & \cdot 1 \\ y = \cancel{2\lambda} + 2\mu & 1 & \\ z = \cancel{\lambda} + 5\mu & & \cdot 1 \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{cases} 2x + y = 12 - \cancel{8\mu} \\ x + y = 6 \longrightarrow \text{n'a plus de paramètre.} \end{cases}$$

Ainsi l'équation cartésienne du plan est : $\underline{\underline{x + y = 6}}$.

Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$; on obtient $x = 6$; donc $I_x(6;0;0)$ $(= A)$.
Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$; on obtient $y = 6$; donc $I_y(0;6;0)$.
Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$; on obtient $0 = 6$, impossible ; donc I_z n'existe pas.



Exercice 11

On a $\alpha : 2x + 3y + 3z - 12 = 0$.

a) Il nous faut 2 points de la droite pour pouvoir trouver ses équations paramétriques. La cote de la droite est 2. Cela veut dire que la 3e coordonnée des 2 points est 2.

En outre les points sont dans le plan. Si les points sont de la forme $(x;y;2)$, on doit avoir $2x+3y+3\cdot 2-12=0$, i.e.

$2x+3y+6-12=0$, i.e. $2x+3y-6=0$, i.e. $2x+3y=6$.

Il suffit de trouver 2 couples de x et y qui satisfont cette dernière relation: Si on prend $x=0$, on a $3y=6$, i.e. $y=2$;

Si on prend $y=0$, on a $2x=6$, i.e. $x=3$.

On a donc les 2 points $(0;2;2)$ et $(3;0;2)$.

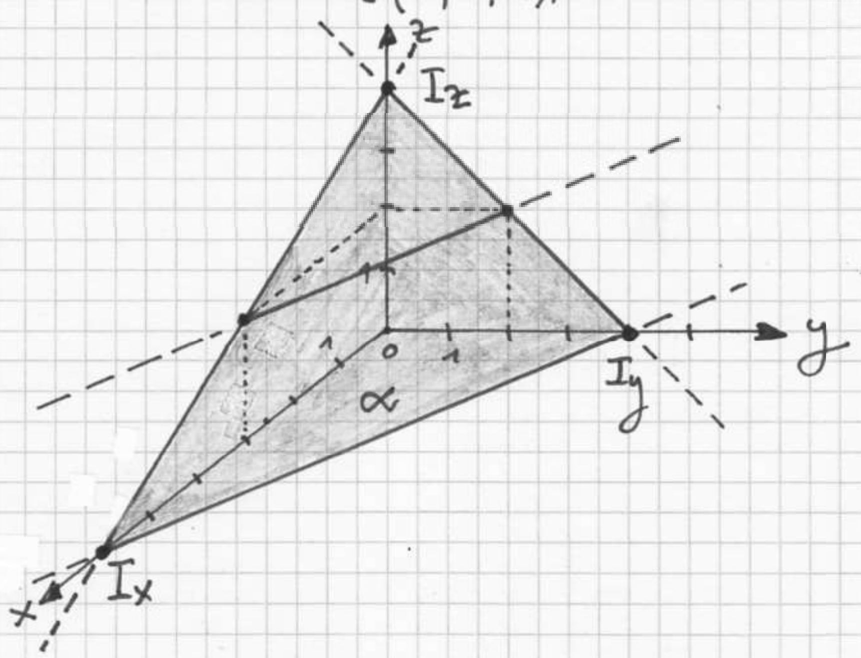
Le vecteur reliant ces 2 points est $\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi, des équations paramétriques de la droite sont: $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 2. \end{cases}$

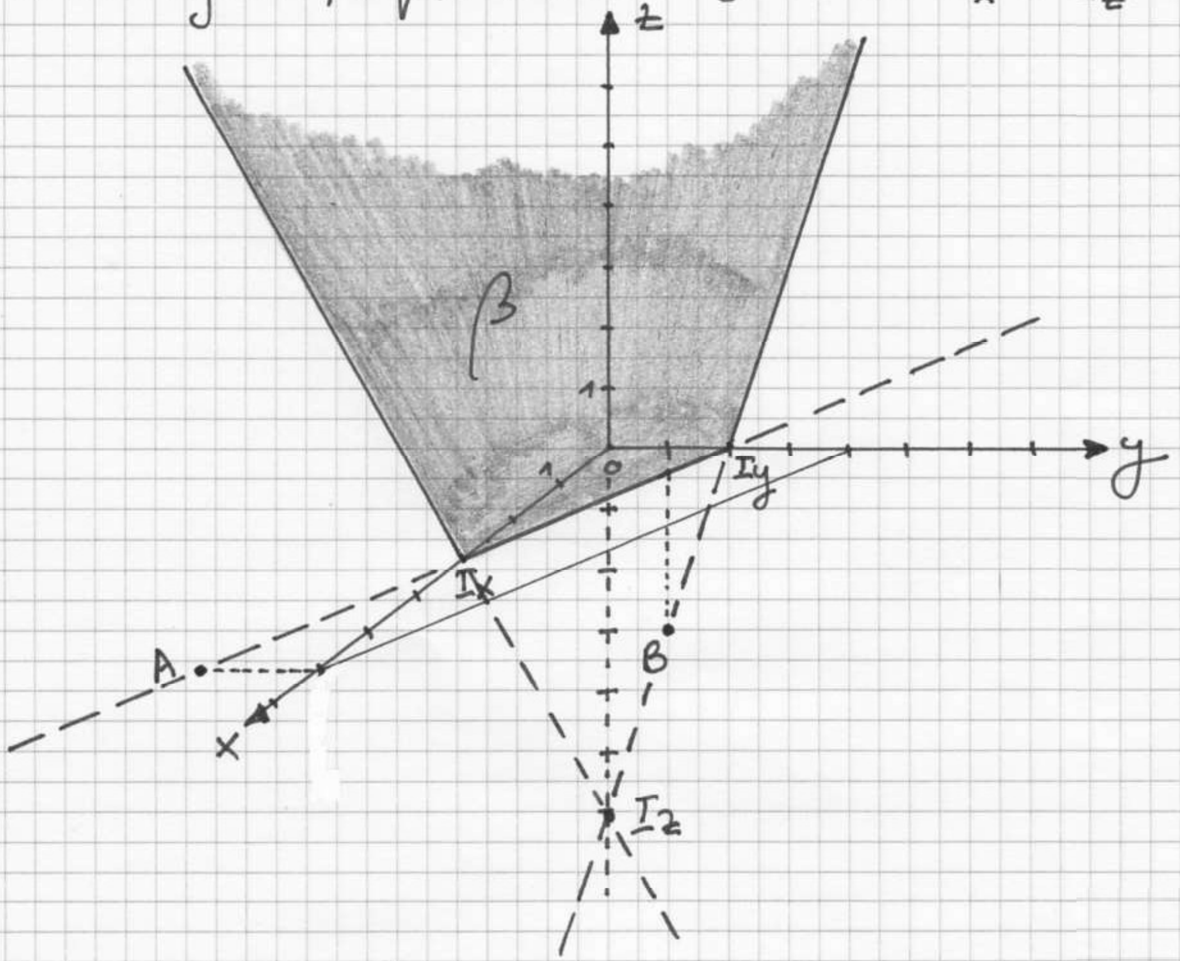
b) Intersection avec l'axe x: on pose $y=z=0$; on obtient $2x-12=0$, i.e. $x=6$; ainsi $I_x(6;0;0)$.

Intersection avec l'axe y: on pose $x=z=0$; on obtient $3y-12=0$, i.e. $y=4$; ainsi $I_y(0;4;0)$.

Intersection avec l'axe z: on pose $x=y=0$; on obtient $3z-12=0$, i.e. $z=4$; ainsi $I_z(0;0;4)$.



c) On représente les points $A(6;-2;0)$ et $B(0;1;-3)$.
A est dans le sol et B dans le mur.
On dessine par A la trace au sol de β parallèle à celle de α.
On trouve ainsi I_x et I_y, intersection de β avec les axes x et y.
On relie I_y et B, ce qui nous donne I_z. On relie I_x et I_z.



d) Le plan passe par $A(6;-2;0)$, $B(0;1;-3)$ et $I_x(3;0;0)$ (par exemple).
On a :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{AI_x} = \overrightarrow{OI_x} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de β sont ainsi : $\begin{cases} x = 6 + 6\lambda - 3\mu \\ y = -2 + 3\lambda + 2\mu \\ z = \quad -3\lambda \end{cases}$

Eliminons μ entre les 2 premières équations : $\begin{cases} x = 6 + 6\lambda - 3\mu \\ y = -2 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{vmatrix}$

On obtient : $2x + 3y = 6 + 21\lambda$
Avec $z = -3\lambda$, i.e. $3\lambda = -z$, on trouve :

$2x+3y = 6 + 7\cdot 3\lambda$, i.e. $2x+3y = 6+7\cdot(-z)$, i.e.
$2x+3y = 6-7z$, i.e. $\underline{\underline{2x+3y+7z-6=0}}$.

Exercice 12

a) Ecrivons des équations paramétriques de d.

On a:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Des équations paramétriques de d sont donc: $\begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 5 - 3\lambda. \end{cases}$

Substituons-les dans l'équation du plan Π.

On obtient:

$$\begin{array}{rcl|l} 3(5-\lambda) + 4(2-2\lambda) - 5(5-3\lambda) - 6 &=& 0 & D \\ 15 - 3\lambda + 8 - 8\lambda - 25 + 15\lambda - 6 &=& 0 & R \\ 4\lambda - 8 &=& 0 & +8 \\ 4\lambda &=& 8 & :4 \\ \lambda &=& 2 & \end{array}$$

Ainsi l'intersection de Π et d est $x = 5 - 3 = 2$, $y = 2 - 2\cdot 2 = -2$ et $z = 5 - 3\cdot 2 = -1$.

On en conclut que Π et d sont sécants.

b) On a:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Des équations paramétriques de d sont: $\begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + 10\lambda. \end{cases}$

On obtient:

$$\begin{array}{rcl|l} 2(2-5\lambda) - 3\cdot 2 + (3 + 10\lambda) - 1 &=& 0 & D \\ 4 - 10\lambda - 6 + 3 + 10\lambda - 1 &=& 0 & R \\ 0 &=& 0 & \end{array}$$

Il y a une infinité de solutions.

On en conclut que d est incluse dans Π.

Exercice 13

a) Cherchons des équations paramétriques de la droite SA.

On a :

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -14 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Les équations paramétriques de la droite SA sont : $\begin{cases} x = 8 + 4\lambda \\ y = 8 - 4\lambda \\ z = -7\lambda. \end{cases}$

Par substitution dans l'équation du plan α, on trouve :

$8 + 4\lambda = 5$, i.e. $4\lambda = -3$, i.e. $\lambda = -\frac{3}{4}$.

Ainsi, on a $x = 5$, $y = 8 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 8 + 3 = 11$ et $z = -7 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{21}{4}$.

Par conséquent, $A'\left(5 ; 11 ; \frac{21}{4}\right)$.

Cherchons des équations paramétriques de la droite SB.

On a :

$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Les équations paramétriques de la droite SB sont : $\begin{cases} x = 12 + 6\lambda \\ y = 16 \\ z = -7\lambda. \end{cases}$

Par substitution dans l'équation du plan β, on trouve :

$12 + 6\lambda = 5$, i.e. $6\lambda = -7$, i.e. $\lambda = -\frac{7}{6}$.

Ainsi, on a $x = 5$, $y = 16$ et $z = -7 \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{49}{6}$.

Par conséquent, $B'\left(5 ; 16 ; \frac{49}{6}\right)$.

b) Cherchons des équations paramétriques de la droite AB.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les équations paramétriques de la droite AB sont : $\begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 8 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$

Cherchons des équations paramétriques de la droite A'B'.

On a :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 49/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 21/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 35/12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

Les équations paramétriques de la droite A'B' sont : $\begin{cases} x = 5 \\ y = 11 + 60\mu \\ z = \frac{21}{4} + 35\mu. \end{cases}$

Si les droites AB et A'B' se coupent, on doit avoir :

$$8 + \lambda = 5 \quad (1)$$
$$8 + 2\lambda = 11 + 60\mu \quad (2)$$
$$0 = \frac{21}{4} + 35\mu \quad (3).$$

De (1), on obtient $\lambda = -3$.

De (3), on obtient $35\mu = -\frac{21}{4}$, i.e. $\mu = -\frac{3}{20}$.

Si on introduit ces 2 valeurs dans (2), on obtient

$$8 + 2\cdot(-3) = 11 + 60\cdot\left(-\frac{3}{20}\right), \text{ i.e. } 8 - 6 = 11 - 9, \text{ i.e } 2 = 2.$$

Avec $\lambda = -3$, on obtient $x = 8 - 3 = 5$, $y = 8 + 2\cdot(-3) = 2$ et $z = 0$.

Donc, <u>les droites AB et A'B' se coupent au point $P(5; 2; 0)$.</u>

Exercice 14.

a) Intersection de α avec l'axe x : on pose $y = z = 0$; on obtient $0 - 3 = 0$, ce qui est impossible ; ainsi I_x^α n'existe pas.

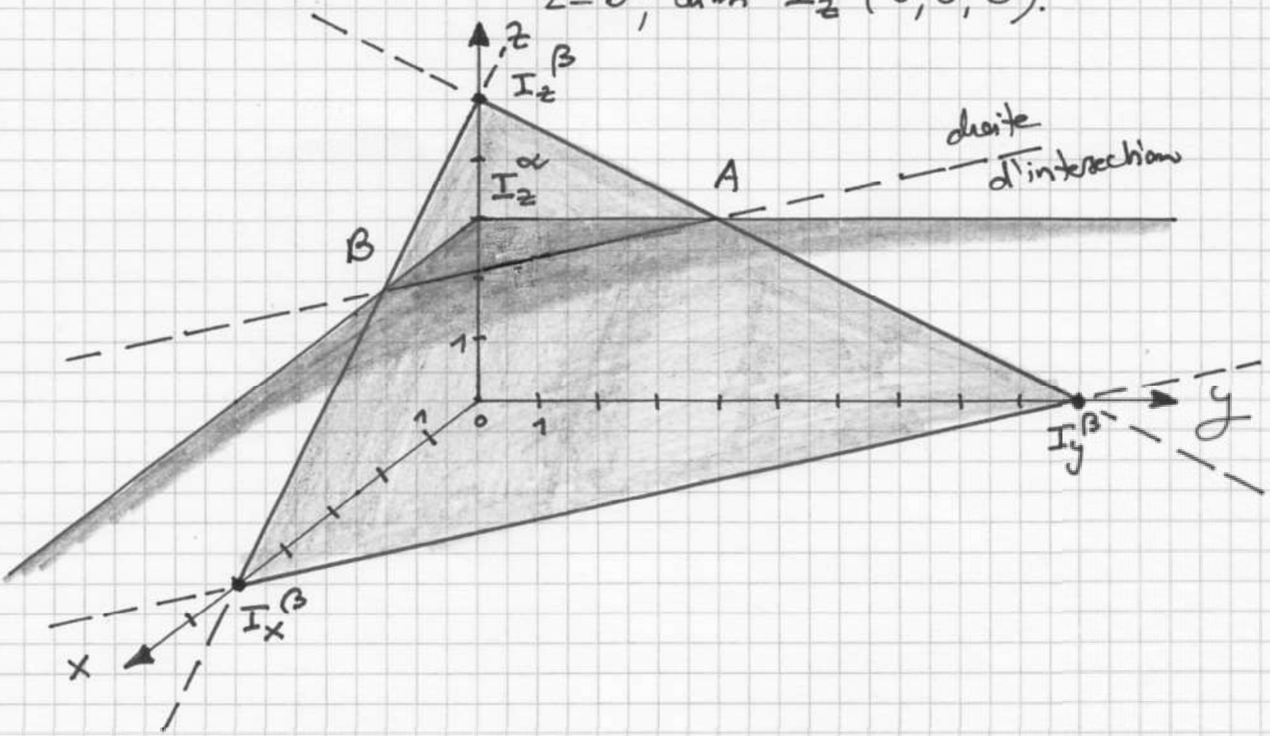
Intersection de α avec l'axe y : on pose $x = z = 0$; on obtient $0 - 3 = 0$, ce qui est impossible ; ainsi I_y^α n'existe pas.

Intersection de α avec l'axe z : on pose $x = y = 0$; on obtient $z - 3 = 0$, i.e. $z = 3$; ainsi $I_z^\alpha(0;0;3)$.

Intersection de β avec l'axe x : on pose $y = z = 0$; on obtient $2x - 10 = 0$, i.e. $x = 5$; ainsi $I_x^\beta(5;0;0)$.

Intersection de β avec l'axe y : on pose $x = z = 0$; on obtient $y - 10 = 0$, i.e. $y = 10$; ainsi $I_y^\beta(0;10;0)$.

Intersection de β avec l'axe z : on pose $x = y = 0$; on obtient $2z - 10 = 0$, i.e. $z = 5$; ainsi $I_z^\beta(0;0;5)$.



b) Pour trouver des équations paramétriques de la droite d'intersection de α et β, il nous faut deux points de cette droite.

Cherchons les coordonnées du point A, intersection des traces dans le mur des plans α et β.

L'équation de la trace de α dans le mur est : $z - 3 = 0$ (on met $x = 0$).

L'équation de la trace de β dans le mur est : $y + 2z - 10 = 0$ (on met $x = 0$).

De la 1e de ces équations, on trouve $z = 3$.

De la 2ᵉ équation, on trouve $y+2\cdot 3-10=0$, i.e $y-4=0$, i.e. $y=4$.
Ainsi on a : $A(0;4;3)$.
Cherchons les coordonnées du point B, intersection des traces dans la paroi des plans α et β.
L'équation de la trace de α dans la paroi est : $z-3=0$ (on met $y=0$).
L'équation de la trace de β dans la paroi est : $2x+2z-10=0$ (on met $y=0$).
De la 1ᵉ équation, on trouve $z=3$.
De la 2ᵉ équation, on trouve $2x+2\cdot 3-10=0$, i.e. $2x-4=0$, i.e. $x=2$.
Ainsi on a : $B(2;0;3)$.
De plus :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi des équations paramétriques de la droite d'intersection des plans α et β sont :

$$\begin{cases}x=\lambda\\ y=4-2\lambda\\ z=3.\end{cases}$$

Exercice 15

On va chercher la droite d'intersection de α et β, la droite d'intersection de α et γ, puis montrer que ces 2 droites sont confondues.

On a : $\alpha : 3x - y + 9z + 4 = 0$

$\beta : x + y - z = 0$

Par addition de ces 2 équations, on obtient $4x + 8z + 4 = 0$, i.e. $x + 2z + 1 = 0$.

Avec $x = 3$, on obtient $3 + 2z + 1 = 0$, i.e. $2z = -4$, i.e. $z = -2$.

Avec $z = 0$, on obtient $x + 1 = 0$, i.e. $x = -1$.

On a donc 2 points : $x = 3, z = -2$, et, donc $3 + y + 2 = 0$, i.e. $y = -5$

$\Rightarrow A(3 ; -5 ; -2)$;

$x = -1$, $z = 0$, et, donc, $-1 + y = 0$, i.e. $y = 1$

$\Rightarrow B(-1 ; 1 ; 0)$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques de la droite d'intersection de α et β sont :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

On a : $\alpha : 3x - y + 9z + 4 = 0$

$\gamma : x + 2y - 4z - 1 = 0$

Par combinaison de ces 2 équations ($2 \times$ la 1^e + $1 \times$ la 2^e), on obtient

$7x + 14z + 7 = 0$, i.e. $x + 2z + 1 = 0$.

Avec $x = 3$, on obtient comme ci-dessus $z = -2$, et, donc

$3 \cdot 3 - y + 9 \cdot (-2) + 4 = 0$, i.e. $9 - y - 18 + 4 = 0$, i.e. $-y - 5 = 0$, i.e

$y = -5 \Rightarrow A(3 ; -5 ; -2)$.

Avec $z = 0$, on obtient comme ci-dessus $x = -1$, et, donc

$3 \cdot (-1) - y + 9 \cdot 0 + 4 = 0$, i.e. $-3 - y + 4 = 0$, i.e. $-y + 1 = 0$, i.e. $y = 1$.

$\Rightarrow B(-1 ; 1 ; 0)$.

On obtient les mêmes points que ci-dessus.

On en conclut que les plans α, β et γ se coupent selon une droite d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = \lambda . \end{cases}$$

Exercice 16

a) Cherchons des équations paramétriques de d.

On a:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les équations paramétriques de d sont: $\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + \lambda. \end{cases}$

Par substitution dans le plan α, on obtient:

$$\begin{aligned} 2(3+3\lambda) + 3(1-\lambda) + 6(4+\lambda) - 18 &= 0 && \text{distributivité} \\ 6 + 6\lambda + 3 - 3\lambda + 24 + 6\lambda - 18 &= 0 && \text{réduction} \\ 9\lambda + 15 &= 0 && -15 \\ 9\lambda &= -15 && :9 \\ \lambda &= -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Avec $\lambda = -\frac{5}{3}$, on obtient $x = 3 + 3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = 3 - 5 = -2$,
$y = 1 - \left(-\frac{5}{3}\right) = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ et $z = 4 + \left(-\frac{5}{3}\right) = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$.

Ainsi d coupe α au point $\left(-2;\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$.

b) Le plan β contient d ; ainsi $A(3;1;4)$ appartient à β et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est parallèle à β.

En outre β est parallèle à l'axe Oz ; ainsi β est parallèle à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques de β sont donc: $\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + \lambda + \mu \end{cases}$

Par combinaison des 2 premières relations ($1\times$ la 1^e + $3\times$ la 3^e), on obtient $x + 3y = 6$, i.e. $x + 3y - 6 = 0$.

Ainsi l'équation cartésienne de β est $x + 3y - 6 = 0$.

c) Pour trouver des équations paramétriques de la droite d'intersection de α et β, on cherche 2 points de cette droite.

Le premier sera P, intersection des traces de α et β dans le sol.

Le second sera Q, intersection des traces de α et β dans le mur.

La trace de α dans le sol est $2x+3y-18=0$ (on pose $z=0$).
La trace de β dans le sol est $x+3y-6=0$ (on pose $z=0$).
En soustrayant ces 2 relations, on obtient $x-12=0$, i.e. $x=12$.
Avec $x=12$, on a $12+3y-6=0$, i.e. $3y+6=0$, i.e. $y=-2$.
Ainsi $A(12;-2;0)$.
La trace de α dans le mur est $3y+6z-18=0$ (on pose $x=0$).
La trace de β dans le mur est $3y-6=0$ (on pose $x=0$).
On obtient $3y=6$, i.e. $y=2$, et, donc, $3.2+6.z-18=0$, i.e. $6z-12=0$, i.e. $z=2$.
Ainsi $B(0;2;2)$.
On a:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\4\\2\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi les équations paramétriques de la droite d'intersection de α et β sont:

$$\begin{cases}x=12-6\lambda\\y=-2+2\lambda\\z=\lambda.\end{cases}$$

d) On cherche les intersections des plans avec les axes:

Intersection de α avec l'axe x: on pose $y=z=0$; on obtient: $2x-18=0$, i.e. $x=9$; ainsi $I_x^\alpha(9;0;0)$.

Intersection de α avec l'axe y: on pose $x=z=0$; on obtient $3y-18=0$, i.e. $y=6$; ainsi $I_y^\alpha(0;6;0)$.

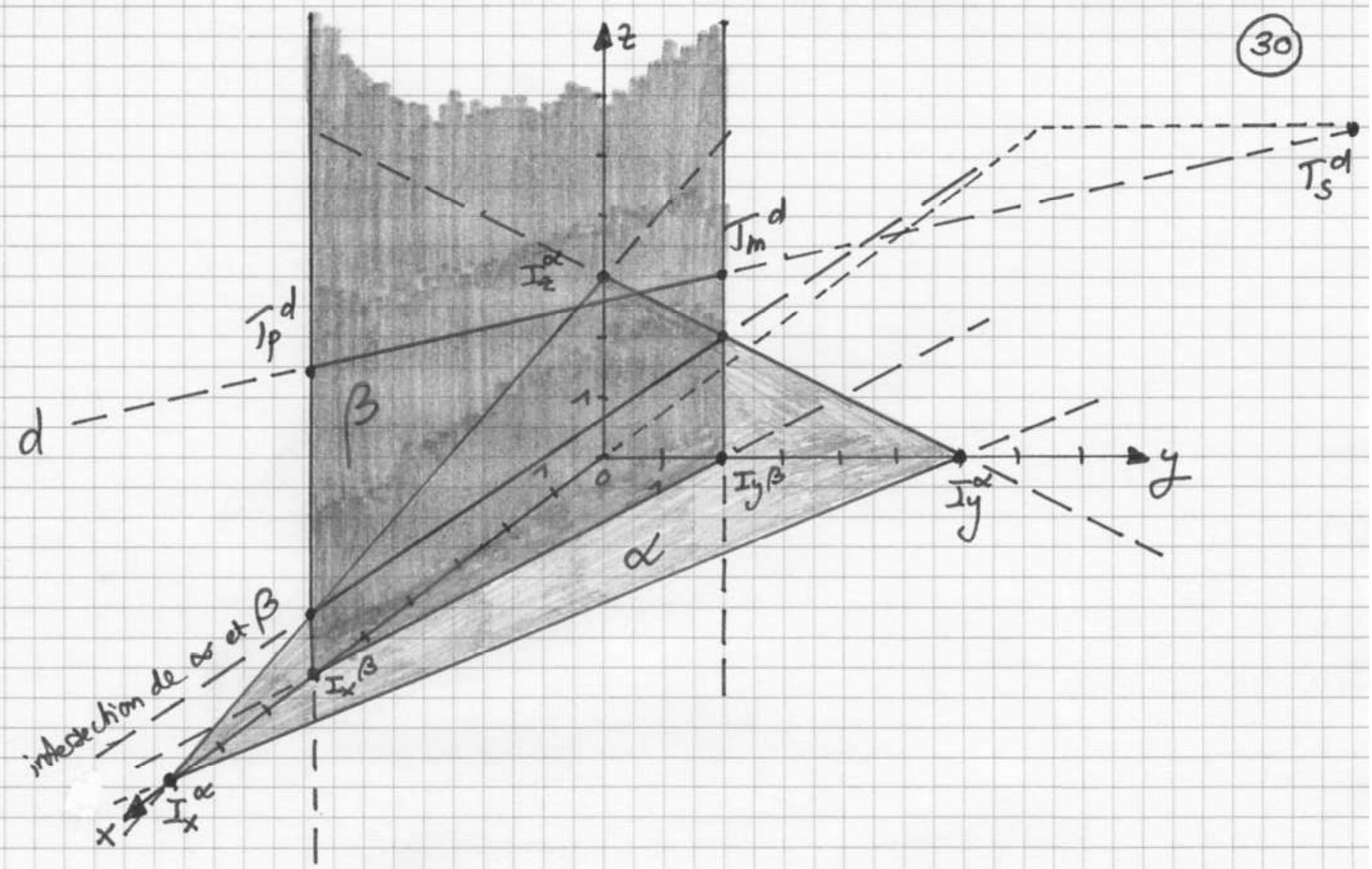
Intersection de α avec l'axe z: on pose $x=y=0$; on obtient $6z-18=0$, i.e. $z=3$; ainsi $I_z^\alpha(0;0;3)$.

Intersection de β avec l'axe x: on pose $y=z=0$; on obtient $x-6=0$, i.e. $x=6$; ainsi $I_x^\beta(6;0;0)$.

Intersection de β avec l'axe y: on pose $x=z=0$; on obtient $3y-6=0$, i.e. $y=2$; ainsi $I_y^\beta(0;2;0)$.

Intersection de β avec l'axe z: on pose $x=y=0$; on obtient $-6=0$, impossible; ainsi I_z^β n'existe pas.

On peut alors dessiner les plans α et β:



Pour dessiner la droite d, il faut chercher ses traces dans les plans de référence.

On a : $$d \begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 4+\lambda. \end{cases}$$

Dans le sol : on pose $z=0$; on obtient $4+\lambda=0$, i.e. $\lambda=-4$;
ainsi $x = 3+3\cdot(-4) = 3-12 = -9$ et $y = 1-(-4) = 1+4 = 5$;
donc $T_s^d(-9;5;0)$.

Dans le mur : on pose $x=0$; on obtient $3+3\lambda=0$, i.e. $3\lambda=-3$, i.e. $\lambda=-1$;
ainsi $y = 1-(-1) = 1+1 = 2$ et $z = 4+(-1) = 4-1 = 3$;
donc $T_m^d(0;2;3)$.

Dans la paroi : on pose $y=0$; on obtient $1-\lambda=0$, i.e. $\lambda=1$;
ainsi $x = 3+3\cdot 1 = 3+3 = 6$ et $z = 4+1 = 5$;
donc $T_p^d(6;0;5)$.

Exercice 17

Pour calculer un déterminant d'ordre 3, on utilise la règle de Sarrus :

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \qquad \diagup \; + \qquad \diagdown \; -$$

Ainsi le déterminant est $a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$.

a) $$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 7.5.3 - 8.6.1 - 9.4.2 =$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = \underline{\underline{0.}}$$

b) $$\left|\begin{matrix} 3 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 3.2.1 + 5.(-3).1 + (-6).(-1).0 - 1.2.(-6) - 0.(-3).3$$
$$- 1.(-1).5 =$$
$$= 6 - 15 + 0 + 12 + 0 + 5 = \underline{\underline{8.}}$$

c) $$\left|\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 8 \end{matrix} = 0.2.7 + 1.2.3 + 2.2.8 - 3.2.2 - 8.2.0 - 7.2.1 =$$
$$= 0 + 6 + 32 - 12 - 0 - 14 = \underline{\underline{12.}}$$

Exercice 18

a) D'après l'indication, on doit donc trouver le nombre d de telle manière que le déterminant de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ soit nul (puisque le déterminant de 3 vecteurs donne, en valeur absolue, le volume du parallélipipède formé par ces 3 vecteurs).

On a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ d-3 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}) =$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -4 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & d-3 & 3 & -8 \end{array}\right. = 0\cdot5\cdot(d-3) + (-4)\cdot5\cdot3 + (-3)\cdot2\cdot(-8)$$
$$- 3\cdot5\cdot(-3) - (-8)\cdot5\cdot0 - (d-3)\cdot2\cdot(-4) =$$
$$= -60 + 48 + 45 + 8(d-3) =$$
$$= 33 + 8d - 24 = 8d - 9.$$

Comme le déterminant doit être nul, on a : $8d - 9 = 0$, i.e. $8d = 9$, i.e. $\underline{\underline{d = \frac{9}{8}}}$.

b) Si le point P appartient au plan ABC, le volume du parallélipipède formé par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP}$ doit être nul, et, donc, $\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AP}) = 0$.

On a:

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y+3 \\ z-3 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AP}) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -4 & x-4 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & y+3 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & z-3 & 3 & -8 \end{array}\right. =$$

$$= 0\cdot5\cdot(z-3) + (-4)\cdot(y+3)\cdot3 + (x-4)\cdot2\cdot(-8) - 3\cdot5\cdot(x-4) - (-8)\cdot(y+3)\cdot0$$
$$- (z-3)\cdot2\cdot(-4) = -12(y+3) - 16(x-4) - 15(x-4) - 8(z-3) =$$
$$= -12y - 36 - 16x + 64 - 15x + 60 - 8z + 24 = -16x - 12y - 8z + 112$$

On doit donc avoir $-16x - 12y - 8z + 112 = 0$, et, donc, par division par -4, $\underline{\underline{4x + 3y + 2z - 28 = 0}}$, ce qui est l'équation cartésienne du plan ABC.

Exercice 19

Pour calculer l'angle α entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on utilise la formule:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}.$$

On a : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 7 + 3\cdot(-1) = 2 - 14 - 3 = -15.$

En outre: $\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ et

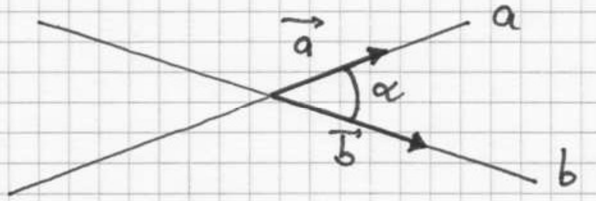
$$\|\vec{b}\| = \sqrt{2^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+49+1} = \sqrt{54}.$$

Donc: $\cos(\alpha) = \dfrac{-15}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{54}} = -0,546.$

Ainsi : $\alpha = \cos^{-1}(-0,546) = \underline{\underline{123,06°}}.$

Exercice 20

Pour calculer l'angle aigu entre deux droites, on calcule l'angle aigu entre leurs vecteurs directeurs :



Ainsi : angle entre a et b = angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ = α.

On aura : $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$, la valeur absolue assurant qu'on obtient l'angle aigu.

On a : $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-1\\2\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$;

$\vec{b} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\0\\1\end{pmatrix}$;

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\0\\1\end{pmatrix} = -4\cdot 11 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1 = -44 + 2 = -42$;

$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$;

$\|\vec{b}\| = \sqrt{11^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{121+1} = \sqrt{122}$.

Donc : $\cos(\alpha) = \dfrac{|-42|}{\sqrt{24}\sqrt{122}} = \dfrac{42}{\sqrt{24}\sqrt{122}} = 0{,}776$.

Ainsi : $\alpha = \cos^{-1}(0{,}776) = \underline{\underline{39{,}08^\circ}}$.

Exercice 21

Pour calculer l'angle aigu entre 2 plans, on calcule l'angle aigu entre des normales à ces plans.

On a : $\alpha : 2x - 3y + 4z + 4 = 0$, vecteur normal : $\overrightarrow{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\beta : -3x + y + 2z = 0$, vecteur normal : $\overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi : angle entre α et β = angle entre $\overrightarrow{n_\alpha}$ et $\overrightarrow{n_\beta} = \gamma$.

On a : $\cos(\gamma) = \dfrac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}|}{\|\overrightarrow{n_\alpha}\| \cdot \|\overrightarrow{n_\beta}\|}$.

$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 2 = -6 - 3 + 8 = -1$;

$\|\overrightarrow{n_\alpha}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$;

$\|\overrightarrow{n_\beta}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$.

Donc : $\cos(\gamma) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{29}\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{29}\sqrt{14}} = 0,05$.

Ainsi : $\gamma = \cos^{-1}(0,05) = \underline{\underline{87,16^\circ}}$.

Exercice 22

L'angle aigu entre un plan et une droite est le complémentaire de l'angle aigu entre un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan.

Un vecteur directeur de la droite est le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur normal au plan $\Pi : x+3y-7z+1=0$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Si α est l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ (angle aigu), $90-\alpha$ est l'angle entre la droite AB et Π (angle aigu).

On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\vec{n}\|}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = (-11)\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-7) = -11+3+7 = -1.$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-11)^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{121+1+1} = \sqrt{123}.$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2+3^2+(-7)^2} = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}.$$

Ainsi : $\cos(\alpha) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{123}\sqrt{59}} = \dfrac{1}{\sqrt{123}\cdot\sqrt{59}} = 0{,}012.$

Donc : $\alpha = \cos^{-1}(0{,}012) = 89{,}33°.$

D'où : angle entre la droite AB et Π est $90-\alpha = 90-89{,}33° = \underline{0{,}67°}.$

Exercice 23

a) On va chercher l'équation cartésienne du plan Π contenant A, B et C, puis vérifier que D appartient à Π.

On a: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques de Π sont donc: $\begin{cases} x = 1 + 5\lambda + 2\mu \\ y = 2 - 4\mu \\ z = 5\lambda \end{cases}$

De la $2^{\text{ème}}$ relation, on tire $4\mu = 2 - y$, i.e. $2\mu = 1 - \frac{y}{2}$.

De la $3^{\text{ème}}$ relation, on tire $5\lambda = z$.

Par substitution dans la $1^{\text{ère}}$ relation, on obtient:

$x = 1 + z + 1 - \frac{y}{2}$, i.e. $x = 2 + z - \frac{y}{2}$, i.e.

$2x = 4 + 2z - y$, i.e. $2x + y - 2z - 4 = 0$.

Vérifions que D appartient au plan Π:

On a: $x = -2$, $y = -2$ et $z = -5$.

Ainsi $2x + y - 2z - 4 = 2 \cdot (-2) + (-2) - 2(-5) - 4 =$

$= -4 - 2 + 10 - 4 = 0$.

Ainsi les points A, B, C et D appartiennent au plan Π d'équation cartésienne $2x + y - 2z - 4 = 0$.

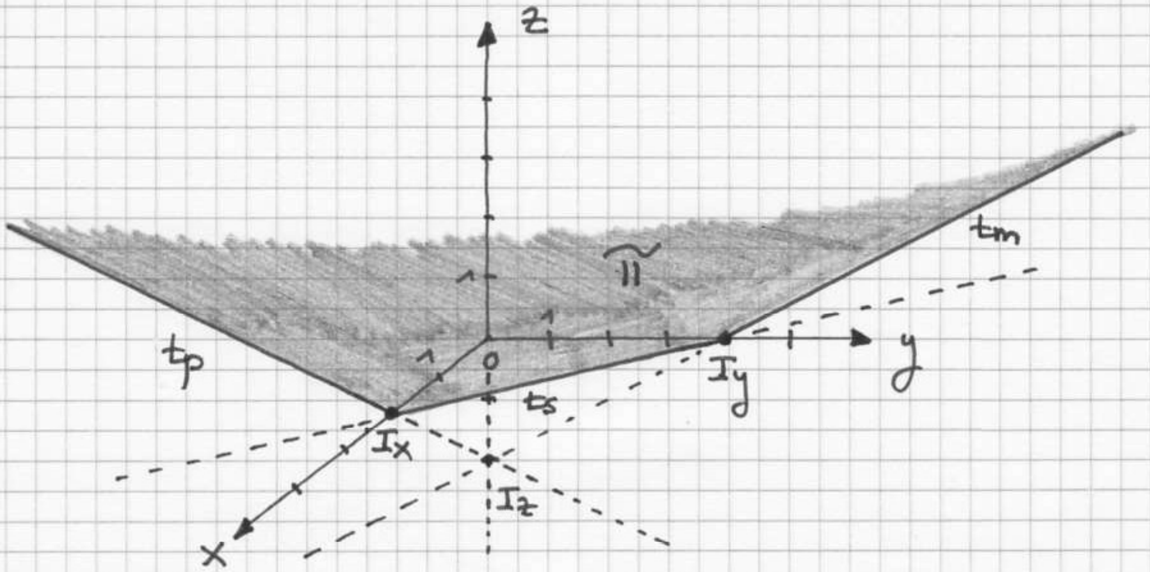
Pour dessiner les traces de Π, on cherche tout d'abord ses intersections avec les axes de référence:

intersection avec l'axe x: on pose $y = z = 0$; on obtient $2x - 4 = 0$, i.e. $x = 2$;
donc $I_x(2; 0; 0)$;

intersection avec l'axe y: on pose $x = z = 0$; on obtient $y - 4 = 0$, i.e. $y = 4$;
donc $I_y(0; 4; 0)$;

intersection avec l'axe z: on pose $x = y = 0$; on obtient $-2z - 4 = 0$, i.e. $z = -2$;
donc $I_z(0; 0; -2)$.

Ainsi:



b) On cherche des équations paramétriques des droites AC et BD.

Droite AC :

vecteur directeur $= \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = 0. \end{cases}$

Droite BD :

vecteur directeur $= \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$;

équations paramétriques : $\begin{cases} x = 6 - 8\mu \\ y = 2 - 4\mu \\ z = 5 - 10\mu. \end{cases}$

Intersection des droites AC et BD : on doit avoir :

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = 6 - 8\mu & (1) \\ 2 - 4\lambda = 2 - 4\mu & (2) \\ 0 = 5 - 10\mu & (3). \end{cases}$$

De (3), on tire $\mu = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

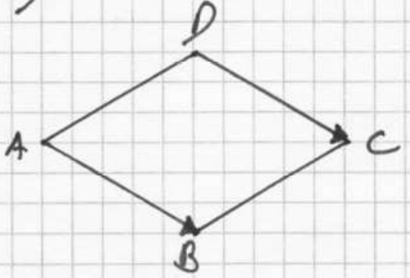
Par substitution dans (1), on trouve : $1 + 2\lambda = 6 - 8 \cdot \frac{1}{2}$, i.e. $1 + 2\lambda = 6 - 4$, i.e. $1 + 2\lambda = 2$, i.e. $2\lambda = 1$, i.e. $\lambda = \frac{1}{2}$.

Par substitution dans (2), on trouve : $2 - 4\lambda = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}$, i.e. $2 - 4\lambda = 2 - 2$, i.e. $2 - 4\lambda = 0$, i.e. $4\lambda = 2$, i.e. $\lambda = \frac{1}{2}$.

Avec $\lambda = \frac{1}{2}$, on trouve $x = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$, $y = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 - 2 = 0$ et $z = 0$.

Le point d'intersection des droites AB et CD sont donc $\underline{(2 ; 0 ; 0)}$.

c) Pour prouver qu'un quadrilatère ABCD est un losange, il suffit de prouver que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:



On a:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi ABCD est un losange.

Calculons l'angle $\widehat{BAD}$. On a: $\cos(\widehat{BAD}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\|}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-3) + 0 \cdot (-4) + 5 \cdot (-5) = -15 - 25 = -40.$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 0 + 25} = \sqrt{50}.$$

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}.$$

Ainsi $\cos(\widehat{BAD}) = \dfrac{-40}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{-40}{50} = -\dfrac{4}{5}$.

Donc $\widehat{BAD} = \cos^{-1}\left(-\dfrac{4}{5}\right) = 143{,}13°$.

On a par conséquent : $\widehat{BCD} = 143{,}13°$ et

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 180 - 143{,}13° = 36{,}87°.$$

Pour calculer l'aire du losange, on calcule, par exemple, $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\|$.

On a, selon b), $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 16 + 0} = \sqrt{20}$ et

$$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + (-10)^2} = \sqrt{64 + 16 + 100} = \sqrt{180}.$$

Donc, aire du losange $= \frac{1}{2}\sqrt{20}\sqrt{180} = \frac{1}{2}\sqrt{3600} = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30.$

d) L'angle entre la droite BD et le sol est le complémentaire de l'angle entre la droite BD et une normale au sol (angle aigu).

Un vecteur directeur de la droite BD est $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$ (voir c)).

Un vecteur normale au sol (équation cartésienne du sol : $z=0$) est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi l'angle aigu α entre la droite BD et une normale au sol est donné par
$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n}|}{\|\overrightarrow{BD}\| \cdot \|\vec{n}\|}.$$

On a :

$\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -8.0 + (-4).0 + (-10).1 = -10$;

$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{180}$ (voir c)) ; $\|\vec{n}\| = 1$.

Ainsi $\cos(\alpha) = \frac{|-10|}{\sqrt{180} \cdot 1} = \frac{10}{\sqrt{180}} = 0{,}745$ et, donc, $\alpha = \cos^{-1}(0{,}745) = 41{,}81°$.

Par conséquent, l'angle entre la droite BD et le sol est $90 - 41{,}81 = \underline{\underline{48{,}19°}}$.

e) Le plan cherché, nommons-le β, doit contenir la droite AC.

Puisque ABCD est un losange, on a $AC \perp BD$.

Ainsi le plan β doit être perpendiculaire à BD (β et Π doivent se couper à angle droit).

On a :

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne de β est donc de la forme $-8x - 4y - 10z + d = 0$.

β contient le point $A(1;2;0)$.

Par substitution dans l'équation cartésienne de β, on doit avoir :

$-8.1 - 4.2 - 10.0 + d = 0$, i.e. $-8-8+d=0$, i.e. $-16+d=0$,

i.e. $d = 16$.

L'équation cartésienne de β est donc $-8x - 4y - 10z + 16 = 0$, i.e., par division par -2, $\underline{\underline{4x + 2y + 5z - 8 = 0.}}$

Exercice 24

a) Pour trouver la projection orthogonale de A sur π, le point B, on va chercher les équations paramétriques de la droite passant par A et perpendiculaire à π, puis on cherchera l'intersection de cette droite et de π, ce qui nous donnera les coordonnées de B.

Un vecteur normal (perpendiculaire) à π: $x-2y+3z+20=0$ est $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. On peut prendre ce vecteur comme vecteur directeur de la droite passant par A et perpendiculaire à π (que l'on nomme d).

Ainsi, les équations paramétriques de cette droite d sont:

$$d\begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = 5+3\lambda. \end{cases}$$

Substituons ces relations dans l'équation de π. On obtient:

$$\begin{array}{rl|l}
(-1+\lambda)-2(3-2\lambda)+3(5+3\lambda)+20=0 & & \text{distributivité} \\
-1+\lambda-6+4\lambda+15+9\lambda+20=0 & & \text{réduction} \\
14\lambda+28=0 & & -28 \\
14\lambda=-28 & & :14 \\
\lambda=-2 & &
\end{array}$$

Avec $\lambda=-2$, on trouve $x=-1-2=-3$, $y=3-2\cdot(-2)=3+4=7$ et $z=5+3\cdot(-2)=5-6=-1$.

Ainsi, on obtient $\underline{\underline{B(-3;7;-1)}}$.

b) La plus courte distance entre π et A est la distance de A à π et est donnée par la formule: $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,

où $a=1$, $b=-2$, $c=3$, $d=20$, $x_0=-1$, $y_0=3$ et $z_0=5$.

Ainsi, la distance vaut: $\dfrac{|-1-2\cdot3+3\cdot5+20|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\dfrac{|-1-6+15+20|}{\sqrt{1+4+9}}=$

$$=\frac{28}{\sqrt{14}}=\frac{28\sqrt{14}}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{28\sqrt{14}}{14}=\underline{\underline{2\sqrt{14}\cong 7{,}48.}}$$

c) Appelons A' le symétrique cherché. On a:

$$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=$$

$$=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$$

$$= 2\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $\underline{\underline{A'(-5;11;-7)}}$.