Exercice 29

a) Pour trouver le point P, on va chercher l'équation du plan π passant par A et perpendiculaire à d, puis chercher l'intersection de π et d.

Un vecteur directeur de d est : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

C'est donc un vecteur normal de π.

L'équation de π est donc de la forme : $x + 2y + z + d = 0$.

Comme $A(4;2;-4)$ appartient à π, par substitution, on doit avoir :

$4 + 2\cdot 2 - 4 + d = 0$, i.e. $4+4-4+d=0$, i.e. $4+d=0$, i.e. $d=-4$.

L'équation de π est donc $x + 2y + z - 4 = 0$.

En substituant les équations paramétriques de d dans π, on obtient :

$$
\begin{array}{rl|l}
(2+\lambda) + 2(-7+2\lambda) + (-2+\lambda) - 4 = 0 & & \text{distributivité} \\
2+\lambda - 14 + 4\lambda - 2 + \lambda - 4 = 0 & & \text{réduction} \\
6\lambda - 18 = 0 & & +18 \\
6\lambda = 18 & & :6 \\
\lambda = 3 & &
\end{array}
$$

Avec $\lambda = 3$, on trouve $x = 2+3 = 5$, $y = -7+2\cdot 3 = -7+6 = -1$ et $z = -2+3 = 1$.

Par conséquent, on a $\underline{\underline{P(5;-1;1)}}$.

b) Appelons A' le symétrique cherché de A.

On a : $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) =$

$= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} =$

$= 2\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Par conséquent : $\underline{\underline{A'(6;-4;6)}}$.

Exercice 26

Commençons par trouver l'équation paramétrique du plan Π.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal (donc perpendiculaire) à Π. On a $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi on a : $\Pi : 6x - 7y + 6z + d = 0$.

Comme Π passe par l'origine, i.e. $(0;0;0)$, en substituant $x=0$, $y=0$ et $z=0$, on obtient $d=0$.

L'équation cartésienne de Π est donc $6x - 7y + 6z = 0$.

Pour calculer la distance de Π à un point $(x_0; y_0; z_0)$, on utilise la formule

$$\frac{|6x_0 - 7y_0 + 6z_0|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2 + 6^2}} = \frac{|6x_0 - 7y_0 + 6z_0|}{\sqrt{121}} = \frac{|6x_0 - 7y_0 + 6z_0|}{11}.$$

Ainsi :

distance de Π à $P(1;0;3) = \frac{|6 \cdot 1 - 7 \cdot 0 + 6 \cdot 3|}{11} = \frac{|6+18|}{11} = \underline{\underline{\frac{24}{11}}}$;

distance de Π à $Q(-2;3;5) = \frac{|6 \cdot (-2) - 7 \cdot 3 + 6 \cdot 5|}{11} = \frac{|-12-21+30|}{11} = \underline{\underline{\frac{3}{11}}}$;

distance de Π à $R(4;-1;0) = \frac{|6 \cdot 4 - 7 \cdot (-1) + 6 \cdot 0|}{11} = \frac{|24+7|}{11} = \underline{\underline{\frac{31}{11}}}$.

Pour déterminer la nature du triangle PQR, il faut commencer par calculer la longueur de ses côtés.

On a :

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$;

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{36+16+25} = \sqrt{77}$;

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{RP}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$.

L'hypothénuse du triangle PQR (le plus grand côté) est $\sqrt{77}$.

Vérifions si les côtés du triangle satisfont le théorème de Pythagore.

On a : $\|\overrightarrow{QR}\|^2 = (\sqrt{77})^2 = 77$ et

$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{RP}\|^2 = (\sqrt{22})^2 + (\sqrt{19})^2 = 22 + 19 = 41$.

Comme $77 \neq 41$, on en conclut que le <u>triangle PQR n'est pas rectangle.</u>

Exercice 27

L'équation cartésienne d'un plan orthogonal (perpendiculaire) à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ est de la forme $3x - 4y + 12z + d = 0$.

Pour trouver d, on va utiliser le fait que la distance du plan au point $P(-6; 2; 1)$ doit être deux.

La distance du plan au point $(x_0; y_0; z_0)$ est donnée par :

$$\frac{|3x_0 - 4y_0 + 12z_0 + d|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{|3x_0 - 4y_0 + 12z_0 + d|}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{|3x_0 - 4y_0 + 12z_0 + d|}{\sqrt{169}} =$$

$$= \frac{|3x_0 - 4y_0 + 12z_0 + d|}{13}.$$

Avec le point $P(-6; 2; 1)$, on doit donc avoir :

$$\frac{|3\cdot(-6) - 4\cdot 2 + 12\cdot 1 + d|}{13} = 2 \qquad \text{calculs}$$

$$\frac{|-18 - 8 + 12 + d|}{13} = 2 \qquad \text{calculs}$$

$$\frac{|-14 + d|}{13} = 2 \qquad \cdot 13$$

$$|-14 + d| = 26$$

On a alors 2 possibilités :

$$-14 + d = 26 \quad | \; +14 \qquad\qquad -14 + d = -26 \quad | \; +14$$

$$d = 40 \qquad\qquad d = -12$$

On obtient donc les 2 plans suivants : $3x - 4y + 12z + 40 = 0$

$3x - 4y + 12z - 12 = 0$

Exercice 28

Un vecteur orthogonal (perpendiculaire) au plan Π est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ est aussi orthogonal à tout plan parallèle à Π (un point à distance 3 de Π est forcément parallèle à Π).

Ainsi l'équation cartésienne de tout plan parallèle à Π est de la forme :

$$7x - 24z + d = 0.$$

Pour trouver d, on va utiliser que la distance de Π au plan parallèle vaut 3, autrement dit que la distance du plan parallèle à n'importe quel point de Π est 3.

Un point de Π est par exemple : on pose $y = z = 0$;
ainsi $7x + 11 = 0$, i.e. $x = -\frac{11}{7}$;
on peut prendre le point $\left(-\frac{11}{7} ; 0 ; 0\right)$.

La distance d'un point $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ au plan parallèle est donnée par

$$\frac{|7x_0 - 24y_0 + d|}{\sqrt{7^2 + 0^2 + (-24)^2}} = \frac{|7x_0 - 24y_0 + d|}{\sqrt{49 + 576}} = \frac{|7x_0 - 24y_0 + d|}{\sqrt{625}} = \frac{|7x_0 - 24y_0 + d|}{25}.$$

Avec le point $\left(-\frac{11}{7} ; 0 ; 0\right)$, on doit donc avoir :

$$\frac{\left|7 \cdot \left(-\frac{11}{7}\right) - 24 \cdot 0 + d\right|}{25} = 3 \qquad \Big| \text{ calcul}$$

$$\frac{|-11 + d|}{25} = 3 \qquad \Big| \cdot 25$$

$$|-11 + d| = 75$$

On a alors deux possibilités :

$$-11 + d = 75 \quad | +11 \qquad \text{et} \qquad -11 + d = -75 \quad | +11$$

$$d = 86 \qquad\qquad\qquad d = -64$$

Ainsi, les équations cartésiennes des plans cherchés sont :

$$7x - 24z + 86 = 0$$

$$7x - 24z - 64 = 0.$$

Exercice 29

On doit démontrer que $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$ pour un triplet de vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$.

Prenons par exemple $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

On a:

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0-1\cdot 1\\1\cdot 1-1\cdot 0\\1\cdot 1-1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1-0\cdot 0\\0\cdot 1-(-1)\cdot 1\\-1\cdot 0-1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1-0\cdot 0\\0\cdot 1-1\cdot 1\\1\cdot 0-1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot(-1)-1\cdot(-1)\\1\cdot 1-1\cdot(-1)\\1\cdot(-1)-1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Ainsi $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$, donc le produit vectoriel n'est pas commutatif.

Exercice 30

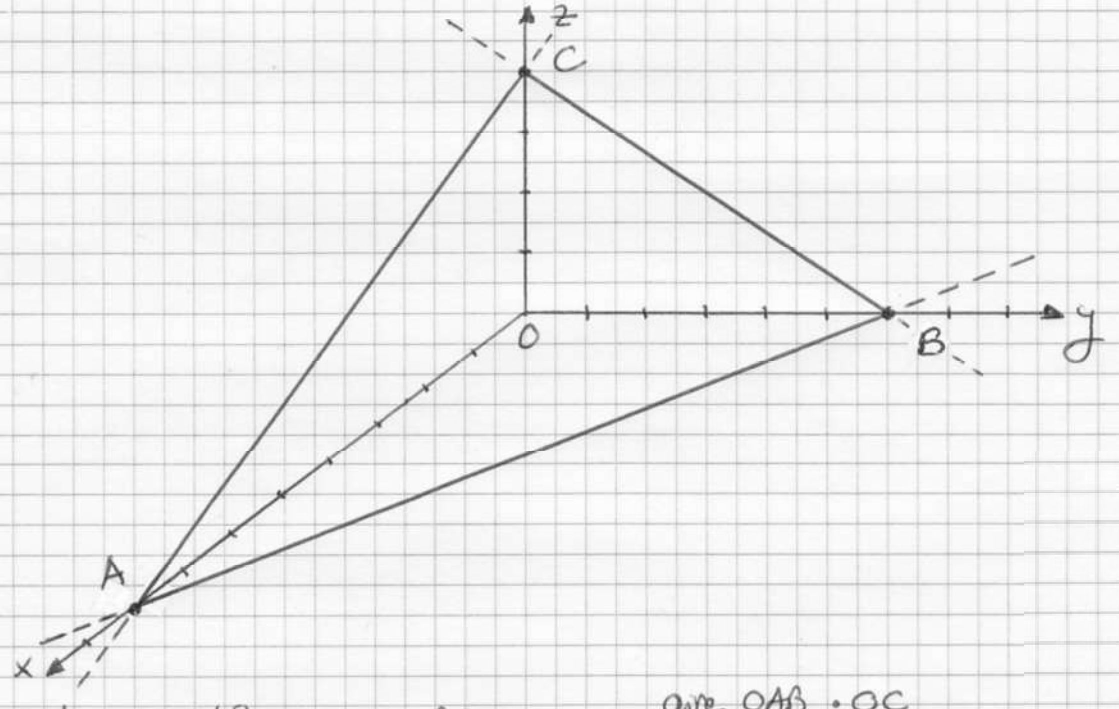
Cherchons les coordonnées des points A, B, C.

A : intersection de Π avec l'axe x : on pose $y=0$ et $z=0$;
on obtient $3x-24=0$, i.e. $3x=24$, i.e. $x=8$;
ainsi $A(8;0;0)$.

B : intersection de Π avec l'axe y : on pose $x=0$ et $z=0$;
on obtient $4y-24=0$, i.e. $4y=24$, i.e. $y=6$;
ainsi $B(0;6;0)$.

C : intersection de Π avec l'axe z : on pose $x=0$ et $y=0$;
on obtient $6z-24=0$, i.e. $6z=24$, i.e. $z=4$;
ainsi $C(0;0;4)$.

a)



Le volume du tétraèdre OABC vaut : $\dfrac{\text{aire } OAB \cdot OC}{3} =$

$$= \frac{OA \cdot OB}{3} \cdot \frac{OC}{2} = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{6} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{6} = \underline{\underline{32}}.$$

b) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est l'aire du parallélogramme formé sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Ainsi l'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-8) - (-8) \cdot 4 \\ -8 \cdot 0 - 6 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \\ 48 \end{pmatrix}$;

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{24^2 + 32^2 + 48^2} = \sqrt{576 + 1024 + 2304} = \sqrt{3904} \cong 62,482.$$

Ainsi l'aire du triangle ABC est $\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3904}}{2} \cong 32,241.}}$

Exercice 31

a) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ correspond à l'aire du parallélogramme formé sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
Ainsi l'aire du triangle ABC sera $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$.
On a:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-3)-3\cdot(-1)\\3\cdot1-3\cdot(-3)\\3\cdot(-1)-3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9+3\\3+9\\-3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-6)^2+12^2+(-6)^2}=\sqrt{36+144+36}=\sqrt{216}\cong14,697.$$

Ainsi l'aire du triangle ABC est $\underline{\underline{\frac{\sqrt{216}}{2}\cong7,35.}}$

b) Le vecteur $\vec{a}\times\vec{b}$ est orthogonal (perpendiculaire) à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$. Il est donc perpendiculaire au plan contenant $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
Ainsi $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan Π contenant le triangle ABC.

L'équation du plan Π est donc $-6x+12y-6z+d=0$.
Par substitution des coordonnées de $A(1;2;3)$, on obtient:

$$-6\cdot1+12\cdot2-6\cdot3+d=0 \quad | \text{ calculs}$$
$$-6+24-18+d=0 \quad | \text{ calculs}$$
$$d=0$$

Ainsi l'équation paramétrique de Π est $-6x+12y-6z=0$, ou, par division par -6, $\underline{\underline{x-2y+z=0.}}$

c) Pour obtenir des équations paramétriques d'une droite, il faut un point et un vecteur directeur.
Le point est le milieu de BC.
Comme $B(4;5;6)$ et $C(2;1;0)$, M milieu de BC est $M\left(\frac{4+2}{2};\frac{5+1}{2};\frac{6+0}{2}\right)$, i.e. $M(3;3;3)$.
Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est perpendiculaire à la médiatrice.
En outre, la médiatrice appartient au plan Π et est donc perpendiculaire au vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, vecteur orthogonal de Π.

Le vecteur directeur de la médiatrice sera $\overrightarrow{BC}\times\vec{n}$ (qui est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}$ et à $\vec{n}$).

On a: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (51)

$$\overrightarrow{BC} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 1 - (-6)\cdot(-2) \\ -6\cdot 1 - (-2)\cdot 1 \\ -2\cdot(-2) - (-4)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 12 \\ -6 + 2 \\ 4 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ainsi des équations paramétriques de la médiatrice sont :

$$\begin{cases} x = 3 - 16\lambda \\ y = 3 - 4\lambda \\ z = 3 + 8\lambda. \end{cases}$$

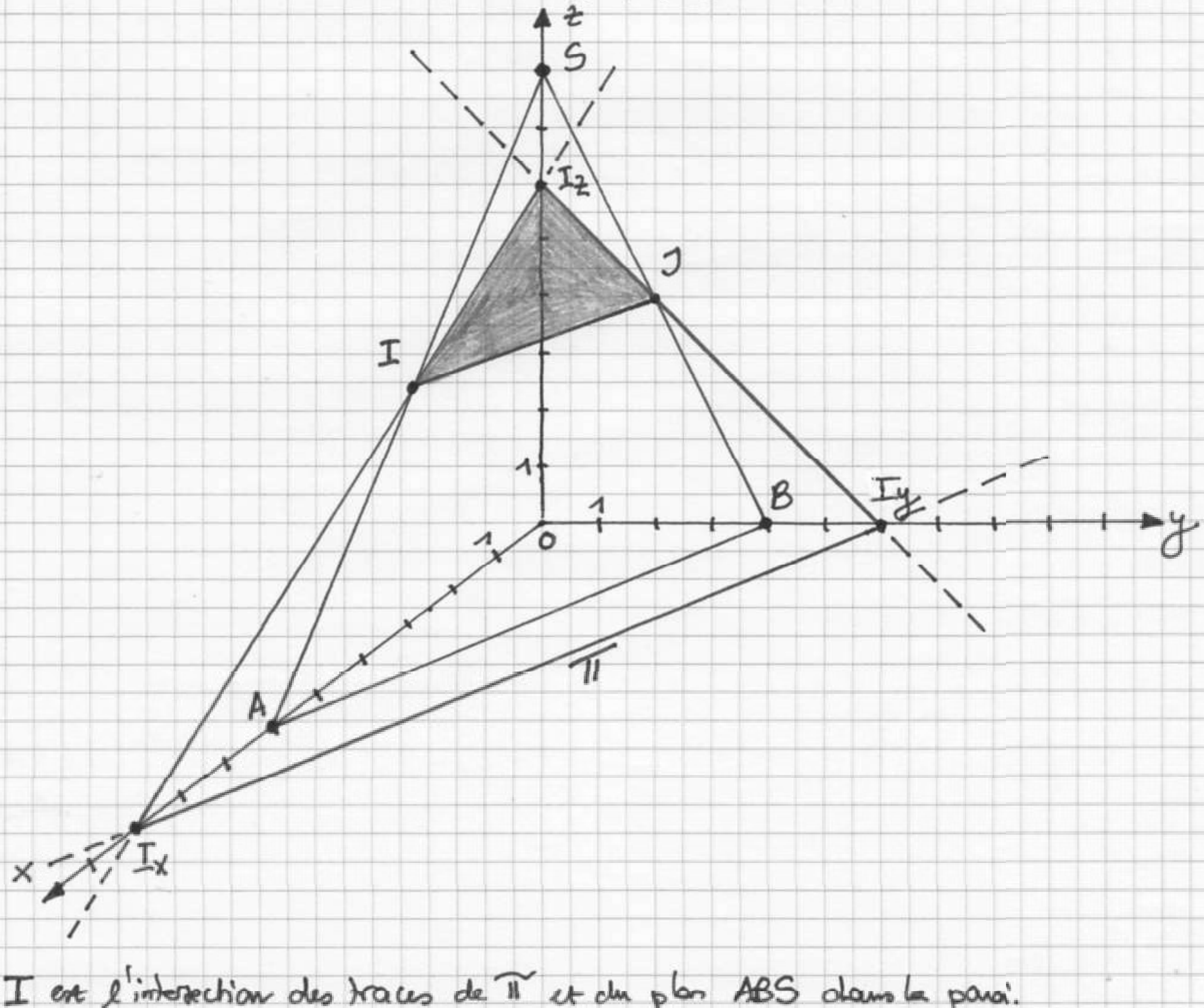
Exercice 32

a) Cherchons les intersections du plan Π avec les axes de référence.

Intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$;
on obtient $2x - 18 = 0$, i.e. $2x = 18$, i.e. $x = 9$;
ainsi $I_x(9;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$;
on obtient $3y - 18 = 0$, i.e. $3y = 18$, i.e. $y = 6$;
ainsi $I_y(0;6;0)$.

Intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$;
on obtient $3z - 18 = 0$, i.e. $3z = 18$, i.e. $z = 6$;
ainsi $I_z(0;0;6)$.



I est l'intersection des traces de Π et du plan ABS dans la paroi.
J est l'intersection des traces de Π et du plan ABS dans le mur.
Ainsi le segment IJ est partie du bord de la section de la pyramide par Π.
I_z appartient à Π et à la surface de la pyramide.
Ainsi le triangle IJI_z est l'intersection de Π et de la pyramide.

L'aire du triangle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$.

Ici $\vec{a} = \overrightarrow{I_2I}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{I_2J}$ par exemple.

Il faut trouver les coordonnées de I et J.

I est l'intersection de la droite AS et de la trace du plan dans la paroi.

Un vecteur directeur de la droite AS est $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\8\end{pmatrix}$.

Ainsi des équations paramétriques de la droite AS sont : $\begin{cases} x = 6-6\lambda \\ y = 0 \\ z = 8\lambda. \end{cases}$

La trace du plan Π dans la paroi est : $2x+3z-18=0$ (on pose $y=0$).

En substituant les équations de la droite AS dans cette trace, on obtient :

$2(6-6\lambda)+3\cdot 8\lambda-18=0$	distributivité
$12-12\lambda+24\lambda-18=0$	réduction
$12\lambda-6=0$	$+6$
$12\lambda=6$	$:12$
$\lambda=\frac{1}{2}$	

Avec $\lambda=\frac{1}{2}$, $x = 6-6\cdot\frac{1}{2} = 6-3 = 3$, $y=0$ et $z = 8\cdot\frac{1}{2}=4$.

Par conséquent $I(3;0;4)$.

J est l'intersection de la droite BS et de la trace du plan dans le mur.

Un vecteur directeur de la droite BS est $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix}$.

Ainsi des équations paramétriques de la droite BS sont : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4-4\lambda \\ z = 8\lambda. \end{cases}$

La trace du plan Π dans le mur est : $3y+3z-18=0$ (on pose $x=0$).

En substituant les équations de la droite BS dans cette trace, on obtient :

$3(4-4\lambda)+3\cdot 8\lambda-18=0$	distributivité
$12-12\lambda+24\lambda-18=0$	réduction
$12\lambda-6=0$	$+6$
$12\lambda=6$	$:12$
$\lambda=\frac{1}{2}$	

Avec $\lambda=\frac{1}{2}$, $x=0$, $y=4-4\cdot\frac{1}{2} = 4-2=2$ et $z=8\cdot\frac{1}{2}=4$.

Par conséquent $J(0;2;4)$.

On a :

$\overrightarrow{I_2I} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI_2} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{I_2J} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{I_2I} \times \overrightarrow{I_2J} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.(-2)-(-2).2 \\ -2.0-3.(-2) \\ 3.2-0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{I_2I} \times \overrightarrow{I_2J}\| = \sqrt{4^2+6^2+6^2} = \sqrt{16+36+36} = \sqrt{88} = \sqrt{4.22} = \sqrt{4}.\sqrt{22} = 2\sqrt{22}$.

Ainsi, l'aire du triangle intersection du plan et de la pyramide est

$\frac{1}{2}.2\sqrt{22} = \underline{\sqrt{22}}.$

b) La distance d'un point P à la droite d $\frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$, où A est un point de d et $\vec{d}$ est un vecteur directeur de d.

Ici $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi la distance de I à la droite AB est : $\frac{\|\overrightarrow{AI} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$.

On a : $\|\vec{d}\| = \sqrt{(-6)^2+4^2+0^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$;

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AI} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0-4.4 \\ 4.(-6)-(-3).0 \\ -3.4-0.(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AI} \times \vec{d}\| = \sqrt{(-16)^2+(-24)^2+(-12)^2} = \sqrt{256+576+144} = \sqrt{976}$.

Donc $\frac{\|\overrightarrow{AI} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \frac{\sqrt{976}}{\sqrt{52}} = \sqrt{\frac{976}{52}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{244}{13}} \cong 4,33}}$.

La distance de J à la droite AB est : $\frac{\|\overrightarrow{AJ} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$.

On a : $\|\vec{d}\| = \sqrt{52}$;

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AJ} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0-4.4 \\ 4.(-6)-(-6).0 \\ -6.4-2.(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -24 \\ -24+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AJ} \times \vec{d} = \overrightarrow{AI} \times \vec{d}$, on a :

$\frac{\|\overrightarrow{AJ} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \frac{\sqrt{976}}{\sqrt{52}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{244}{13}} \cong 4,33}}.$

La distance de I_2 à la droite AB est : $\frac{\|\overrightarrow{AI_2} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$.

On a : $\|\vec{d}\| = \sqrt{52}$;

$\overrightarrow{AI_2} = \overrightarrow{OI_2} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AI_2} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0-6.4 \\ 6.(-6)-(-6).0 \\ -6.4-0.(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -36 \\ -24 \end{pmatrix}$

55

$$\|\overrightarrow{AI_2} \times \vec{d}\| = \sqrt{(-24)^2 + (-36)^2 + (-24)^2} = \sqrt{576 + 1296 + 576} = \sqrt{2448}.$$

Donc $\dfrac{\|\overrightarrow{AI_2} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \dfrac{\sqrt{2448}}{\sqrt{52}} = \sqrt{\dfrac{2448}{52}} = \underline{\underline{\sqrt{\dfrac{612}{13}} \simeq 6{,}86.}}$

Exercice 33

a) La droite d'intersection des deux plans appartient aux deux plans et est donc perpendiculaire aux vecteurs normaux de chaque plan.

Ainsi, un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans sera perpendiculaire à $\vec{n_1}$, vecteur normale de α, et à n_2, vecteur normale de β.

Ainsi, un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans est parallèle à $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ (puisque $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ est perpendiculaire à $\vec{n_1}$ et à $\vec{n_2}$).

On a: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 - (-1).(-3) \\ -1.2 - 1.1 \\ 1.(-3) - 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -1-1 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Comme ce vecteur est parallèle à $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, on en conclut que :

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans.

b) $A(4; ?; ?)$ est dans le sol. Cela signifie que sa cote (3^e coordonnée) doit être nulle. Ainsi $A(4; ?; 0)$.

$A(4; y; 0)$ est dans β. On doit donc avoir : $2.4 - 3.y + 0 - 11 = 0$, i.e. $8 - 3y - 11 = 0$, i.e. $-3y - 3 = 0$, i.e. $3y = -3$, i.e. $y = -1$.

Par conséquent, on a $A(4; -1; 0)$.

La distance d'une droite d à un point A est donné par la formule

$$\frac{\|\vec{PA} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|},$$ où P est un point de d et $\vec{d}$ un vecteur directeur de d.

On a $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (voir a)).

Il faut encore trouver un point de d, donc de la droite d'intersection des plans α et β.

Pour trouver un point de la droite d'intersection de α et β, on fixe une de ses coordonnées et on résoud le système de 2 équations restant.

Posons $y = 0$. On doit donc résoudre : $\begin{cases} x - z - 8 = 0 \\ 2x + z - 11 = 0. \end{cases}$

En additionnant les 2 équations, on obtient $3x - 19 = 0$, i.e. $3x = 19$, i.e. $x = \frac{19}{3}$.

On a donc $\frac{19}{3} - z - 8 = 0$, i.e. $z = \frac{19}{3} - 8 = -\frac{5}{3}$.

On peut donc prendre pour point d'intersection de α et β le point
$P\left(\frac{19}{3} ; 0 ; -\frac{5}{3}\right)$.

On a alors:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19/3 \\ 0 \\ -5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -1 \\ 5/3 \end{pmatrix} ;$$

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -1 \\ 5/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 5 - \frac{5}{3} \cdot 2 \\ \frac{5}{3} \cdot 2 - \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot 5 \\ -\frac{7}{3} \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} + \frac{35}{3} \\ -\frac{14}{3} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25/3 \\ 15 \\ -8/3 \end{pmatrix} ;$$

$$\|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}\| = \sqrt{\left(\frac{-25}{3}\right)^2 + 15^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{9} + 225 + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{2714}{9}} = \frac{\sqrt{2714}}{3} ;$$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{4+4+25} = \sqrt{33}.$$

Donc la distance de A à la droite est:

$$\frac{\sqrt{2714}/3}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{2714}}{3} : \sqrt{33} = \frac{\sqrt{2714}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{2714}}{3 \cdot \sqrt{33}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2714}{33}} \cong 3,02.}}$$

Exercice 34

a) Un plan bissecteur de deux plans α et β est l'ensemble des points à égale distance de α et β.

La distance d'un point P à α est donné par $\dfrac{|2x+y-2z-19|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|2x+y-2z-19|}{\sqrt{4+1+4}} =$

$= \dfrac{|2x+y-2z-19|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|2x+y-2z-19|}{3}$.

La distance d'un point P à β est donné par $\dfrac{|8x-y+4z-11|}{\sqrt{8^2+(-1)^2+4^2}} = \dfrac{|8x-y+4z-11|}{\sqrt{64+1+16}} =$

$= \dfrac{|8x-y+4z-11|}{\sqrt{81}} = \dfrac{|8x-y+4z-11|}{9}$.

L'ensemble des points à égale distance de α et β est ainsi donné par :

$$\frac{|2x+y-2z-16|}{3} = \frac{|8x-y+4z-11|}{9} \qquad \Big| \cdot 9$$

$$3|2x+y-2z-16| = |8x-y+4z-11| \qquad \Big| \text{ Distributivité}$$

$$|6x+3y-6z-48| = |8x-y+4z-11|$$

On a alors 2 possibilités :

(1) $6x+3y-6z-48 = 8x-y+4z-11$; et

(2) $6x+3y-6z-48 = -(8x-y+4z-11)$.

(1) $6x+3y-6z-48 = 8x-y+4z-11 \qquad \Big| -8x+y-4z+11$

$-2x+4y-10z-37 = 0 \qquad \Big| \cdot(-1)$

$2x-4y+10z+37 = 0$

(2) $6x+3y-6z-48 = -(8x-y+4z-11) \qquad \Big| \text{ Distributivité}$

$6x+3y-6z-48 = -8x+y-4z+11 \qquad \Big| +8x-y+4z-11$

$14x+2y-2z-59 = 0$

Par conséquent, les équations des deux plans bissecteurs de α et β sont :

$$\Pi_1 : 2x-4y+10z+37 = 0$$
$$\Pi_2 : 14x+2y-2z-59 = 0.$$

b) La droite incluse dans les plans α, β, Π_1 et Π_2 est la droite d'intersection de α et β (par exemple).

Un vecteur directeur de cette droite d d'intersection est perpendiculaire au vecteur $\vec{n_1}$, vecteur normal de α, et au vecteur $\vec{n_2}$, vecteur normal de β.

Ainsi un vecteur directeur de d sera $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ (puisque $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{n_1}$ et à $\overrightarrow{n_2}$).

On a:

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \ \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \ \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4-(-2)\cdot(-1) \\ -2\cdot 8-2\cdot 4 \\ 2\cdot(-1)-1\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4-2 \\ -16-8 \\ -2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -24 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Comme ce vecteur est parallèle à $\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$, on peut prendre ce dernier vecteur comme vecteur directeur de d.

Reste à trouver un point de cette droite, qui est l'intersection des plans α et β. Une manière de le trouver est de mettre une coordonnée égale à zéro et de résoudre le système d'équations résultants.

Posons $z=0$.

Dans α, on obtient $2x+y-19=0$.

Dans β, on obtient $8x-y-11=0$.

En additionnant ces 2 relations, on obtient $10x-30=0$, i.e. $10x=30$, i.e. $x=3$.

Ainsi $2\cdot 3+y-19=0$, i.e. $6+y-19=0$, i.e. $y-13=0$, i.e. $y=13$.

On peut donc prendre le point $(3;13;0)$.

Par conséquent, des équations paramétriques de la droite incluse dans α, β, Π_1 et Π_2 sont:

$$\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 13-12\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases}$$

Exercice 35

La distance entre deux droites d_1 et d_2 est donné par $\dfrac{|(\vec{d_1} \times \vec{d_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_2}|}{\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\|}$,

où A_1 est un point de d_1, $\vec{d_1}$ un vecteur directeur de d_1, A_2 est un point de d_2 et $\vec{d_2}$ est un vecteur directeur de d_2.

Par conséquent, la plus courte distance entre les droites AB et CD est donné par $\dfrac{|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AC}|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\|}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.2 - (-2).9 \\ -2.(-12) - 4.2 \\ 4.9 - (-3).(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+18 \\ 24-8 \\ 36-36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix} = 12.2 + 16.(-14) + 0.2 = $$
$$= 24 - 224 = -200$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\| = \sqrt{12^2 + 16^2 + 0^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20.$$

La distance cherchée est donc $\dfrac{|-200|}{20} = \dfrac{200}{20} = \underline{\underline{10.}}$

Exercice 36

a) La plus courte distance entre deux droites a et b est donnée par $\dfrac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\overrightarrow{AB}|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}$,

où A est un point de a, $\vec{a}$ un vecteur directeur de a, B est un point de b et $\vec{b}$ est un vecteur directeur de b.

On a : $A(1;0;2)$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $B(4;4;1)$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$;

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1-(-1)\cdot(-2)\\(-1)\cdot1-1\cdot1\\1\cdot(-2)-0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix};$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}=(-2)\cdot3+(-2)\cdot4+(-2)\cdot(-1)=$$
$$=-6-8+2=-12;$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}.$$

Ainsi la plus courte distance entre a et b est $\dfrac{|-12|}{\sqrt{12}}=\dfrac{12}{\sqrt{12}}=\underline{\underline{\sqrt{12}.}}$

b) Un vecteur directeur $\vec{p}$ de la droite p doit être perpendiculaire à a et b, donc perpendiculaire aux vecteurs directeurs de a et b, donc perpendiculaire à $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\vec{a}\times\vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, on va prendre $\vec{p}=\vec{a}\times\vec{b}$.

On a : $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ (voir question a)).

Un vecteur directeur de p sera donc $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, ou, par division par -2, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

On prend donc $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques de p sont donc : $\begin{cases}x=x_0+\lambda\\y=y_0+\lambda\\z=z_0+\lambda\end{cases}$, où le point $(x_0;y_0;z_0)$ est un point de p.

La droite p doit couper la droite a. On doit donc avoir :

$$1+s=x_0+\lambda \quad (1)$$
$$0=y_0+\lambda \quad (2)$$
$$2-s=z_0+\lambda. \quad (3)$$

La droite p doit couper la droite b. On doit donc avoir :

$$4+t = x_0 + \lambda' \quad (5)$$
$$4-2t = y_0 + \lambda' \quad (6)$$
$$1+t = z_0 + \lambda'. \quad (7)$$

(On met ici λ', car cela ne sera pas la même valeur que λ ci-dessous).

Eliminons s et λ dans les équations (1)-(2)-(3).

En additionnant (1) et (3), on obtient $3 = x_0 + z_0 + 2\lambda$ (8).

En soustrayant $2\cdot$(2) de (8), on obtient $3 = x_0 - 2y_0 + z_0$ (9).

Eliminons t et λ' dans les équations (5)-(6)-(7).

En additionnant $2\cdot$(5) et (6), on obtient $12 = 2x_0 + y_0 + 2\lambda'$ (10).

En additionnant $2\cdot$(7) et (6), on obtient $6 = y_0 + 2z_0 + 2\lambda'$ (11).

En soustrayant (11) de (10), on obtient $6 = 2x_0 - 2z_0$ (12).

Il faut donc trouver x_0, y_0, z_0 qui satisfont (9) et (12) :

(9) $x_0 - 2y_0 + z_0 = 3$

(12) $2x_0 - 2z_0 = 6$.

Comme on a 2 équations et 3 inconnues, on peut en fixer une arbitrairement.

Posons $z_0 = 0$.

(12) devient alors $2x_0 = 6$, et, ainsi $x_0 = 3$.

Par substitution dans (9), on obtient $3 - 2y_0 + 0 = 3$, i.e. $3 - 2y_0 = 3$, i.e. $-2y_0 = 0$, et, ainsi $y_0 = 0$.

On peut donc prendre $x_0 = 3$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

Ainsi des équations paramétriques de p sont : $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda. \end{cases}$

Exercice 37

Pour trouver le centre et le rayon de la sphère, il faut l'écrire sous la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$, où $(x_0;y_0;z_0)$ est le centre et r le rayon de la sphère.

Pour cela, on va utiliser l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, que l'on écrit sous la forme $a^2-2ab=(a-b)^2-b^2$.

On a : S : $x^2+y^2+z^2-6x-8y-14z+25=0$, i.e.

$x^2-6x+y^2-8y+z^2-14z+25=0$, i.e.

$(x-3)^2-9+(y-4)^2-16+(z-7)^2-49+25=0$, i.e.

$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-7)^2-49=0$, i.e.

$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=7^2$.

Ainsi le centre de la sphère est $(3;4;7)$ et son rayon vaut 7.

Pour déterminer la position relative d'une sphère et d'un plan, on calcule la distance du centre de la sphère au plan. On a alors 3 cas possibles :

1) cette distance est strictement inférieure au rayon de la sphère et on en conclut que le plan coupe la sphère ;
2) cette distance est égale au rayon de la sphère et on en conclut que le plan est tangent à la sphère ;
3) cette distance est strictement supérieure au rayon de la sphère et on en conclut que le plan et la sphère sont disjoints.

Calculons la distance entre $(3;4;7)$ et le plan Π : $x+y+z-7=0$.

En utilisant la formule de la distance d'un point à un plan, on a :

$$\frac{|3+4+7-7|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Comme $\frac{7}{\sqrt{3}}<7$ (= le rayon de la sphère), on conclut que le plan Π coupe la sphère S.

Exercice 38

Commençons par chercher les équations de la sphère et de la droite.
La sphère est centrée à l'origine, i.e. en $(0;0;0)$, et son rayon est 6.
Son équation est donc $x^2+y^2+z^2=36$ $(=6^2)$.
Un vecteur directeur de la droite est $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$.
Ainsi des équations paramétriques de la droite passant par A et B sont :

$$\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -1+3\lambda. \end{cases}$$

Pour trouver les points d'intersection de la droite et de la sphère, on substitue les équations de la droite dans celle de la sphère. On obtient :

$(3+\lambda)^2+(4\lambda)^2+(-1+3\lambda)^2=36$	identités remarquables
$9+6\lambda+\lambda^2+16\lambda^2+1-6\lambda+9\lambda^2=36$	réduction
$26\lambda^2+10=36$	-10
$26\lambda^2=26$	$:26$
$\lambda^2=1$	$\sqrt{}$
$\lambda=1$ ou -1	

Si $\lambda=1$, on obtient $x=3+1=4$, $y=4.1=4$ et $z=-1+3.1=2$.
Si $\lambda=-1$, on obtient $x=3-1=2$, $y=4.(-1)=-4$ et $z=-1+3\cdot(-1)=-4$).

Ainsi les points d'intersection sont $\underline{\underline{(4;4;2) \text{ et } (2;-4;-4)}}$.

Exercice 39

a) Cherchons des équations paramétriques de d.

On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Ainsi des équations paramétriques de d sont : $\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 12 - 12\lambda. \end{cases}$

Pour déterminer la position relative de d et du plan $\Pi : 36x + 48y + 25z - 600 = 0$, on substitue les équations de d dans Π :

$$\begin{array}{rl|l} 36(3+3\lambda) + 48(4+4\lambda) + 25(12-12\lambda) - 600 = 0 & & \text{distributivité} \\ 108 + 108\lambda + 192 + 192\lambda + 300 - 300\lambda - 600 = 0 & & \text{réduction} \\ 0 = 0 & & \end{array}$$

On en conclut qu'il y a une infinité de solution et, donc, que la droite d est incluse dans Π.

b) Si on montre que d est tangente à la sphère, on aura aussi que Π est tangent à la sphère (puisque d est incluse dans Π).

Pour montrer que d est tangente à la sphère, il suffit de montrer que la distance du centre de la sphère à la droite d est égale au rayon.

Comme l'équation de la sphère est $x^2 + y^2 + (z-11)^2 = 25$, son centre est $(0;0;11)$ et son rayon est 5.

La formule de calcul de la distance d'un point à une droite est :

$\dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$, où A est un point de la droite, $\vec{d}$ un vecteur directeur de la droite et P le point extérieur à la droite.

Ici, on a $P(0;0;11)$ (le centre de la sphère), $A(3;4;12)$ (le point A de l'énoncé) et $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ (voir question a)).

On a : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AP} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)\cdot(-12) - (-1)\cdot 4 \\ (-1)\cdot 3 - (-3)\cdot(-12) \\ -3\cdot 4 - (-4)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 + 4 \\ -3 - 36 \\ -12 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ -39 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\| = \sqrt{52^2 + (-39)^2 + 0^2} = \sqrt{2704 + 1521} = \sqrt{4225} = 65$;

$\|\vec{d}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Ainsi $\dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \dfrac{65}{13} = 5 =$ rayon de la sphère.

Donc, <u>d, et par conséquent Π, sont tangents à la sphère.</u>

c) Pour trouver les points de contacts, qui se résumeront à un point unique de contact (puisque d est contenue dans Π), on va chercher des équations paramétriques de la droite perpendiculaire à Π et passant par le centre de la sphère et chercher l'intersection de cette droite avec Π.

Un vecteur normal (= perpendiculaire à Π) est donné par le vecteur $\begin{pmatrix} 36 \\ 48 \\ 25 \end{pmatrix}$.
Cela sera donc un vecteur directeur de la droite perpendiculaire à Π.
Comme cette droite passe par le centre de la sphère, i.e. $(0;0;11)$, les équations de cette droite sont donc: $\begin{cases} x = 36\lambda \\ y = 48\lambda \\ z = 11 + 25\lambda . \end{cases}$

Par substitution dans l'équation du plan Π: $36x + 48y + 25z - 600 = 0$, on obtient:

$$\begin{aligned} 36 \cdot 36\lambda + 48 \cdot 48\lambda + 25(11 + 25\lambda) - 600 &= 0 && \text{distributivité} \\ 1296\lambda + 2304\lambda + 275 + 625\lambda - 600 &= 0 && \text{réduction} \\ 4225\lambda - 325 &= 0 && +325 \\ 4225\lambda &= 325 && :4225 \\ \lambda &= \frac{1}{13} \end{aligned}$$

Avec $\lambda = \frac{1}{13}$, on trouve $x = 36 \cdot \frac{1}{13} = \frac{36}{13}$, $y = 48 \cdot \frac{1}{13} = \frac{48}{13}$ et $z = 11 + 25 \cdot \frac{1}{13} = 11 + \frac{25}{13} = \frac{168}{13}$.

Le point de contact est donc $\underline{\underline{\left(\frac{36}{13}; \frac{48}{13}; \frac{168}{13}\right)}}$.

a) Pour montrer que la droite est tangente à la sphère, il suffit de montrer que la distance du centre de la sphère à la droite est égale au rayon de la sphère.

La formule de calcul de la distance d'un point à une droite est donnée par $\frac{\|\overrightarrow{AP}\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$, où A est un point de la droite, $\vec{d}$ un vecteur directeur de la droite et P le point en question.

Ici, on a : $A(8;5;8)$; $P(0;0;0)$ (le centre de la sphère) et

$\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\5\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\5\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-5\\-8\end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{d}=\begin{pmatrix}-8\\-5\\-8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-5)\cdot(-1)-(-8)\cdot(-4)\\(-8)\cdot(-3)-(-8)\cdot(-1)\\(-8)\cdot(-4)-(-5)\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-32\\24-8\\32-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27\\16\\17\end{pmatrix};$$

$\|\overrightarrow{AP}\times\vec{d}\|=\sqrt{(-27)^2+16^2+17^2}=\sqrt{729+256+289}=\sqrt{1274}$;

$\|\vec{d}\|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$.

Ainsi, on a $\frac{\|\overrightarrow{AP}\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}=\frac{\sqrt{1274}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{1274}{26}}=\sqrt{49}=7=$ rayon de la sphère.

Donc, <u>d est tangente à la droite S.</u>

Pour trouver le point de contact T de d avec S, on va chercher l'équation cartésienne du plan α perpendiculaire à d et passant par le centre de la sphère, puis chercher l'intersection de d et α.

Un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}$ (voir ci-dessus).

Ce vecteur est donc perpendiculaire à α.

α peut donc s'écrire : $-3x-4y-z+d=0$.

α doit contenir le centre de la sphère, i.e. $(0;0;0)$.

Par substitution dans l'équation de α, on en conclut que $d=0$.

Ainsi, l'équation cartésienne de α est $-3x-4y-z=0$, et, donc, par multiplication par -1, $3x+4y+z=0$.

Des équations paramétriques de d sont : $\begin{cases}x=8-3\lambda\\y=5-4\lambda\\z=8-\lambda.\end{cases}$

Par substitution de ces équations dans celle de α, on trouve :

$3(8-3\lambda)+4(5-4\lambda)+8-\lambda=0$	distributivité
$24-9\lambda+20-16\lambda+8-\lambda=0$	réduction
$-26\lambda+52=0$	$+26\lambda$
$26\lambda=52$	$:2$
$\lambda=2$	

Avec $\lambda=2$, on trouve $x=8-3.2=8-6=2$, $y=5-4.2=5-8=-3$ et $z=8-2=6$.

Ainsi le point de contact est $\underline{\underline{T(2;-3;6)}}$.

b) Le plan tangent à la sphère en T sera perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OT}$ ($O(0;0;0)$ est le centre de la sphère) et il passe par $T(2;-3;6)$.

Comme $\overrightarrow{OT}=\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$, l'équation cartésienne du plan perpendiculaire est $2x-3y+6z+d=0$.

Par substitution des coordonnées de T dans cette relation, on obtient :

$2.2-3(-3)+6.6+d=0$, i.e. $4+9+36+d=0$, i.e. $49+d=0$, i.e. $d=-49$.

L'équation du plan perpendiculaire est donc $\underline{\underline{2x-3y+6z-49=0}}$.

c) La droite p doit être perpendiculaire à d et tangente à la sphère en T. Elle doit donc être perpendiculaire à un vecteur directeur de d et perpendiculaire à un vecteur perpendiculaire au plan tangent trouvé en b).

Elle doit donc être perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$.

Elle sera donc parallèle à $\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$ (puisque $\vec{a}\times\vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$).

On a :

$$\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4.6-(-1).(-3)\\(-1).2-(-3).6\\(-3).(-3)-(-4).2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24-3\\-2+18\\9+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27\\16\\17\end{pmatrix}.$$

Comme p passe par $T(2;-3;6)$, ses équations paramétriques sont, par exemple:

$$\underline{\underline{\begin{cases}x=2-27\lambda\\y=-3+16\lambda\\z=6+17\lambda\end{cases}}}$$

Exercice 41

a) On va déterminer la distance du centre de la sphère au plan Π.
Le centre de la sphère est $(2;0;1)$.
En utilisant la formule de calcul de la distance d'un point à un plan, la distance du centre de la sphère au plan Π est:

$$\frac{|2.2-2.0-1+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{|4-1+15|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{18}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6.$$

Comme cette distance est supérieure au rayon de la sphère (qui vaut $\sqrt{9}=3$), on en conclut que <u>le plan Π ne coupe pas la sphère S.</u>

b) Les plans tangents à la sphère ont la particularité que la distance du centre de la sphère à ces plans est égale au rayon de la sphère.
Les plans cherchés doivent être parallèle à Π: $2x-2y-z+15=0$.
Un vecteur normal (perpendiculaire) à Π est $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.
Ce vecteur sera aussi normale aux plans tangents.
Ainsi les équations des plans tangents seront de la forme $2x-2y-z+d=0$.
La distance du centre de la sphère à ces plans doit être égale au rayon de la sphère, i.e. 3.
En utilisant la formule de la distance d'un point à un plan, on doit avoir:

$$\frac{|2.2-2.0-1+d|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = 3 \quad \text{, i.e.}$$

$$\frac{|3+d|}{\sqrt{4+4+1}} = 3 \text{ , i.e. } \frac{|3+d|}{\sqrt{9}} = 3 \text{, i.e. } |3+d| = 9.$$

On a alors 2 solutions:
1) $3+d=9$, et
2) $3+d=-9$.
On obtient: 1) $d=6$, et
2) $d=-12$.

Ainsi les plans parallèles à Π et tangents à la sphère S sont:

$$2x-2y-z+6=0 \text{ et}$$
$$2x-2y-z-12=0.$$

c) On va chercher des équations de la droite perpendiculaire aux plans tangents et passant par le centre de la sphère, puis chercher les intersections de cette droite avec les plans tangents.

Un vecteur normal (= perpendiculaire) aux plans tangents est $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le centre de la sphère est $(2;0;1)$.

Des équations paramétriques de la droite perpendiculaire aux plans tangents et passant par le centre de la sphère sont:

$$\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1-\lambda. \end{cases}$$

Intersection avec $2x-2y-z-12=0$:

par substitution, on trouve:

$2(2+2\lambda)-2(-2\lambda)-(1-\lambda)-12=0$	distributivité
$4+4\lambda+4\lambda-1+\lambda-12=0$	réduction
$9\lambda-9=0$	$+9$
$9\lambda=9$	$:9$
$\lambda=1$	

avec $\lambda=1$, on obtient $x=2+2\cdot1=4$, $y=-2\cdot1=-2$ et $z=1-1=0$.

Intersection avec $2x-2y-z+6=0$:

par substitution, on trouve:

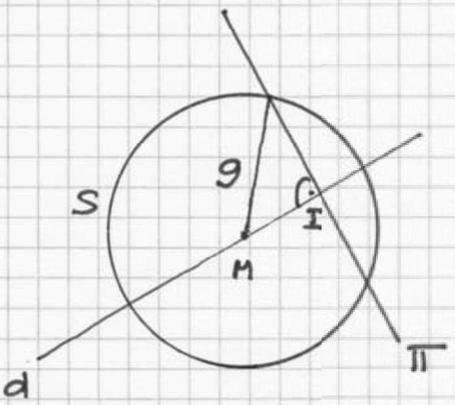
$2(2+2\lambda)-2(-2\lambda)-(1-\lambda)+6=0$	distributivité
$4+4\lambda+4\lambda-1+\lambda+6=0$	réduction
$9\lambda+9=0$	-9
$9\lambda=-9$	$:9$
$\lambda=-1$	

avec $\lambda=-1$, on obtient $x=2+2\cdot(-1)=0$, $y=-2\cdot(-1)=2$ et $z=1-(-1)=2$.

Les points de contact sont donc : $\underline{\underline{(4;-2;0) \text{ et } (0;2;2)}}$.

Exercice 42

Pour trouver le centre du cercle d'intersection de Π et S (le point I), on cherche des équations paramétriques de la droite d perpendiculaire à Π et passant par M.



Un vecteur normale à Π est $\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$. C'est donc un vecteur directeur de d.

On a $M(9;5;4)$.

Des équations paramétriques de d sont donc : $\begin{cases} x = 9+4\lambda \\ y = 5 \\ z = 4+\lambda. \end{cases}$

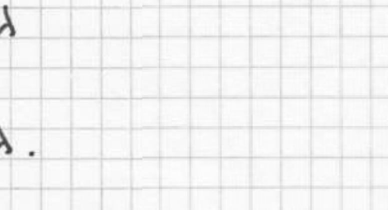
Par substitution dans l'équation de Π, on trouve :

$4(9+4\lambda)+4+\lambda-6=0$	distributivité
$36+16\lambda+4+\lambda-6=0$	réduction
$17\lambda-34=0$	$+34$
$17\lambda=34$	$:17$
$\lambda=2$	

Avec $\lambda=2$, on trouve $x=9+4.2=17$, $y=5$ et $z=4+2=6$.

Le centre du cercle d'intersection est donc $\underline{\underline{(17;\,5;\,6)}}$.

Pour trouver le rayon du cercle d'intersection, on va utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ci-joint.



On a $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}17\\5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{MI}\|=\sqrt{8^2+0^2+2^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}$.

Ainsi $r^2=9^2-\|\overrightarrow{MI}\|^2=81-68=13$.

Par conséquent, le rayon du cercle d'intersection est $\underline{\underline{\sqrt{13}}}$.

Exercice 43

Le point $T(1;2;z)$ devant appartenir à Π : $3x-6y+2z+5=0$, on obtient :
$3\cdot 1-6\cdot 2+2\cdot z+5=0$, i.e. $3-12+2z+5=0$, i.e. $-4+2z=0$, i.e. $2z=4$,
i.e. $z=2$.

Ainsi on a $T(1;2;2)$.

Si C est le centre de la sphère, C doit se trouver sur la droite d perpendiculaire à Π et passant par T, et être en outre à une distance de 21 de T.

Un vecteur normal (= perpendiculaire) à Π est $\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}$.

C'est donc un vecteur directeur de d.

Sa longueur est $\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{9+36+4}=\sqrt{49}=7$.

Ainsi le vecteur $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/7\\-6/7\\2/7\end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire de longueur 1.

Donc le vecteur $21\begin{pmatrix}3/7\\-6/7\\2/7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-18\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d de longueur 21.

On obtient ainsi $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OT}+\begin{pmatrix}9\\-18\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9\\-18\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-16\\8\end{pmatrix}$.

Ainsi le centre de la sphère est $(10;-16;8)$ et l'équation de la sphère est :

$$(x-10)^2+(y+16)^2+(z-8)^2=21^2.$$

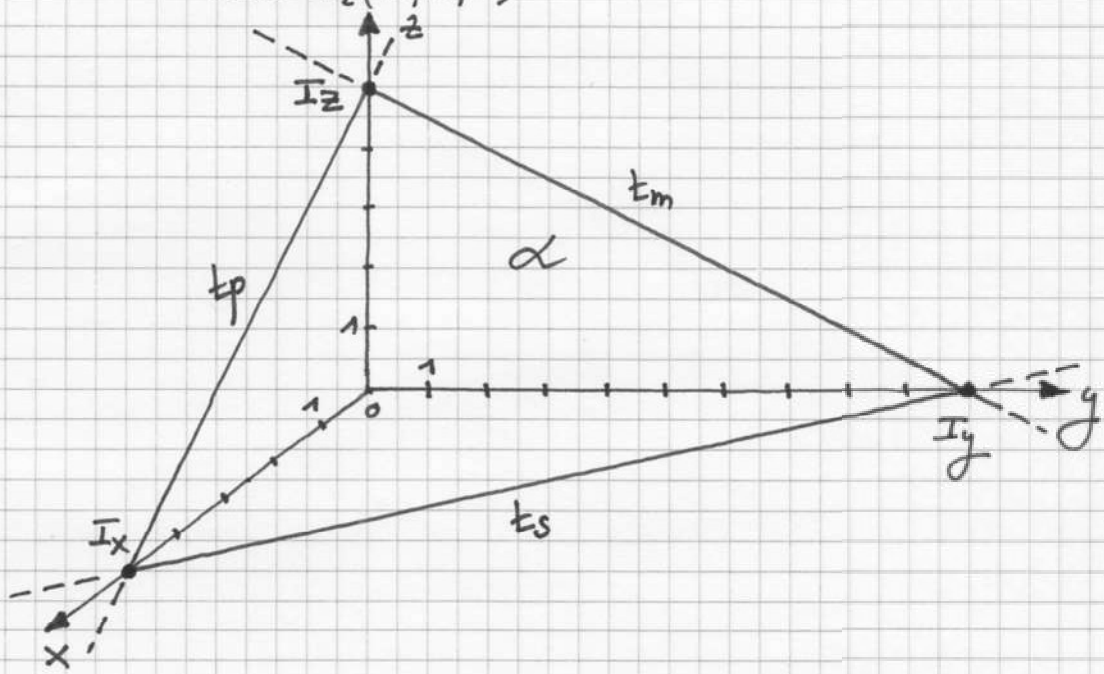
Exercice 44

1. Pour dessiner les traces du plan α : $2x+y+2z-10=0$, on cherche ses intersections avec les axes de référence.

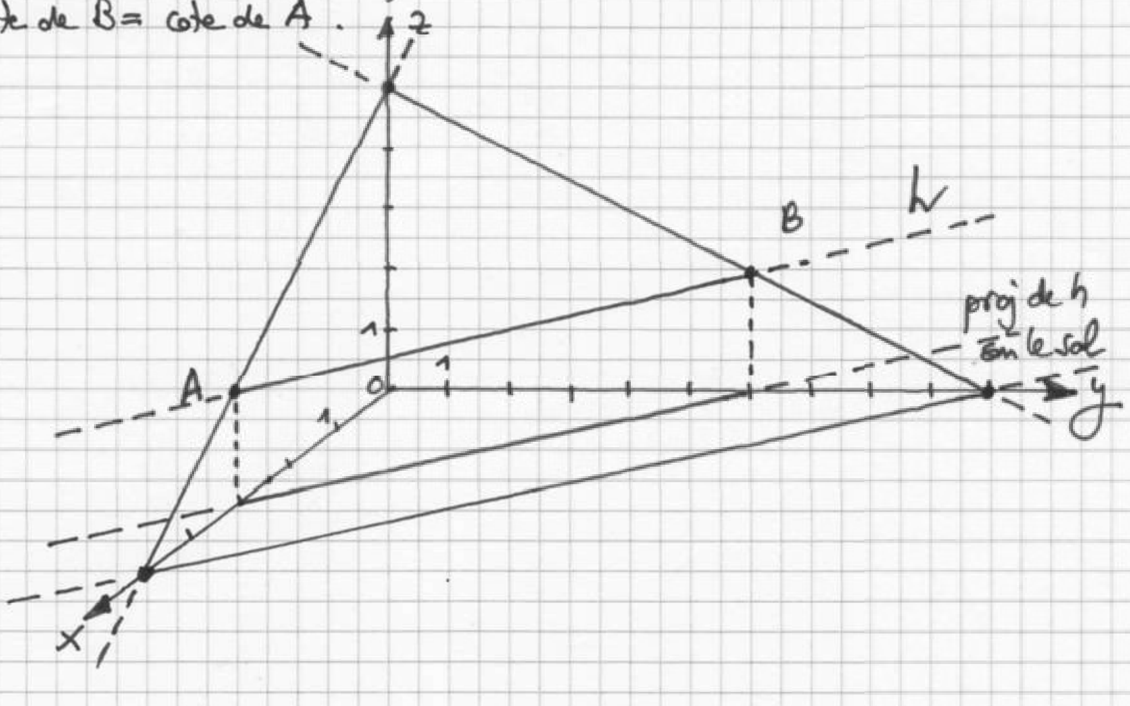
Intersection avec l'axe x : on pose $y=z=0$; ainsi $2x-10=0$, i.e. $x=5$; donc $I_x(5;0;0)$.

Intersection avec l'axe y : on pose $x=z=0$; ainsi $y-10=0$, i.e. $y=10$; donc $I_y(0;10;0)$.

Intersection avec l'axe z : on pose $x=y=0$; ainsi $2z-10=0$, i.e. $z=5$; donc $I_z(0;0;5)$.



2. a) La droite h passe par $A(3;0;2)$, est contenue dans α et est horizontale. Le point $B(0;6;2)$ est aussi un point de h : on a bien $2\cdot0+6+2\cdot2-10 = 0$ et cote de B = cote de A.



b) Un vecteur directeur de h est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. 73

Comme $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (par division par -2), on en conclut

que $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de h.

3. a) Le rayon de la sphère sera $\|\overrightarrow{CA}\|$.

On a : $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{5^2+0^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Ainsi l'équation de la sphère est :

$$(x+2)^2+y^2+(z-7)^2 = 50 \qquad \left((5\sqrt{2})^2 = 25.2 = 50\right).$$

b) Des équations paramétriques de h sont : $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2. \end{cases}$

Par substitution dans l'équation de la sphère, on a :

$(3+\lambda+2)^2+(-2\lambda)^2+(2-7)^2 = 50$	Calculs
$(\lambda+5)+4\lambda^2+25 = 50$	Identité remarquable
$\lambda^2+10\lambda+25+4\lambda^2+25 = 50$	Réduction
$5\lambda^2+10\lambda+50 = 50$	-50
$5\lambda^2+10\lambda = 0$	$:5$
$\lambda^2+2\lambda = 0$	Factorisation
$\lambda(\lambda+2) = 0$	

Ainsi, on a soit $\lambda = 0$, soit $\lambda+2 = 0$, i.e. $\lambda = -2$.

Avec $\lambda = 0$, on trouve $x = 3$, $y = 0$ et $z = 2$, qui est le point A.

Avec $\lambda = -2$, on trouve $x = 3-2 = 1$, $y = -2 \cdot (-2) = 4$ et $z = 2$.

Ainsi le deuxième point d'intersection de h et de la sphère est

$$(1; 4; 2).$$

4. Un vecteur directeur de d sera perpendiculaire à un vecteur directeur de h ($\vec{h}$) et perpendiculaire à $\overrightarrow{CA}$ (rayon de la sphère).

Un vecteur directeur de d sera donc $\vec{h} \times \overrightarrow{CA}$, puisque $\vec{h} \times \overrightarrow{CA}$ est perpendiculaire à $\vec{h}$ et à $\overrightarrow{CA}$.

On a : $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ (voir ci-dessus).

Ainsi $\vec{h}\times\vec{CA} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cdot(-5)-0\cdot0\\0\cdot5-1\cdot(-5)\\1\cdot0-(-2)\cdot5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\\10\end{pmatrix} \,//\, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de d est donc $\underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}}$.

5. a) h doit appartenir à $\beta : 2x+y+k=0$.

D'après 3b), des équations paramétriques de h sont : $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2. \end{cases}$

Par substitution, on doit avoir :

$$\begin{array}{c|l} 2(3+\lambda)+(-2\lambda)+k=0 & \text{distributivité} \\ 6+2\lambda-2\lambda+k=0 & \text{réduction} \\ -6=k & \end{array}$$

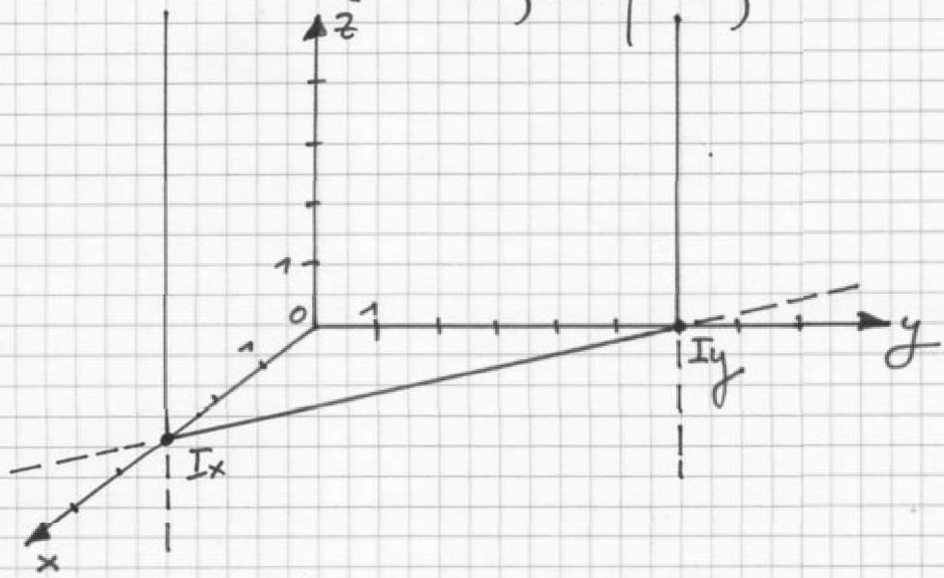
Ainsi, on doit avoir $\underline{\underline{k=-6}}$.

b) Les intersections de β avec les axes sont :

intersection avec l'axe x : on pose $y=z=0$; ainsi $2x-6=0$, i.e $x=3$; donc $I_x(3;0;0)$;

intersection avec l'axe y : on pose $x=z=0$; ainsi $y-6=0$, i.e. $y=6$; donc $I_y(0;6;0)$;

intersection avec l'axe z : on pose $x=y=0$; ainsi $6=0$, ce qui est exclut ; donc I_z n'existe pas et β est parallèle à l'axe z.



c) L'angle demandé correspond à l'angle (aigu) entre α et β.

Cette angle est donné par $\cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$.

On a :

$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 =$

$= 4 + 1 = 5$;

$\|\vec{n_1}\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$;

$\|\vec{n_2}\| = \sqrt{2^2+1^2+0^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Ainsi $\cos(\varphi) = \dfrac{5}{3\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \cong 0{,}745$, d'où $\underline{\underline{\varphi = 41{,}81°}}$

6. Cherchons l'équation de la droite g perpendiculaire à β et passant par le centre C de la sphère S.

Un vecteur perpendiculaire à β, et donc parallèle à g, est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

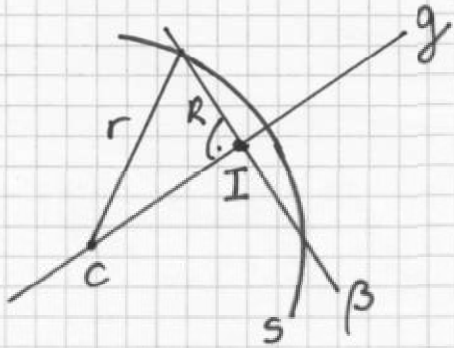
Des équations paramétriques de g sont donc: $\begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 7. \end{cases}$

Par substitution dans l'équation de β, on obtient:

$$\begin{array}{c|l} 2(-2+2\lambda) + \lambda - 6 = 0 & \text{distributivité} \\ -4 + 4\lambda + \lambda - 6 = 0 & \text{réduction} \\ 5\lambda - 10 = 0 & +10 \\ 5\lambda = 10 & :5 \\ \lambda = 2 & \end{array}$$

Avec $\lambda = 2$, on obtient $x = -2 + 2 \cdot 2 = 2$, $y = 2$, $z = 7$.

Le centre du cercle d'intersection est donc $\underline{\underline{(2;2;7)}}$ (noté I ci-dessous).



On a r = rayon de la sphère $= 5\sqrt{2}$ (voir 3a));

$\vec{CI} = \vec{OI} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\|\vec{CI}\| = \sqrt{4^2+2^2+0^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} =$

$= \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

Par le théorème de Pythagore, on a alors $R^2 = r^2 - \|\vec{CI}\|^2 = (5\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2$

$= 50 - 20 = 30$.

Le rayon du cercle d'intersection est donc $\underline{\underline{\sqrt{30}}}$.

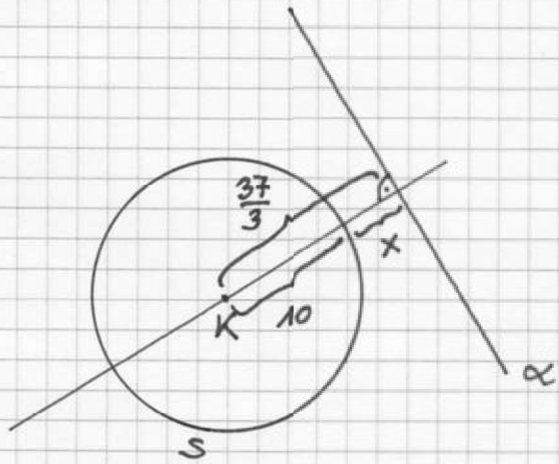
Exercice 45

a) Pour vérifier que le plan ne coupe pas la sphère, on vérifie que la distance du centre de la sphère au plan est strictement supérieure au rayon de la sphère.
Le centre de la sphère est $K(3;-2;1)$.
La distance de K au plan $\alpha : x+2y-2z+40=0$ est donnée par

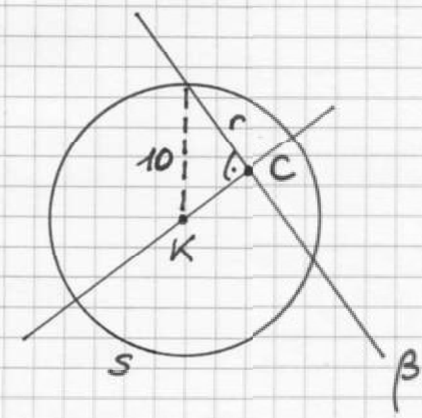
$$\frac{|3+2\cdot(-2)-2\cdot 1+40|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{|3-4-2+40|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|37|}{\sqrt{9}} = \frac{37}{3}.$$

Comme $\frac{37}{3} > 10$ qui est le rayon de la sphère, on en conclut que le plan ne coupe pas la sphère.

La plus courte distance entre le plan α et la sphère s est donné par la longueur x sur le schéma ci-joint.
On a $x = \frac{37}{3} - 10 = \frac{7}{3}$.



b) Dans le triangle rectangle de la figure suivante, on a:



$$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix}1\\-6\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{KC}\| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6.$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de Pythagore, le rayon du cercle d'intersection de β avec s est

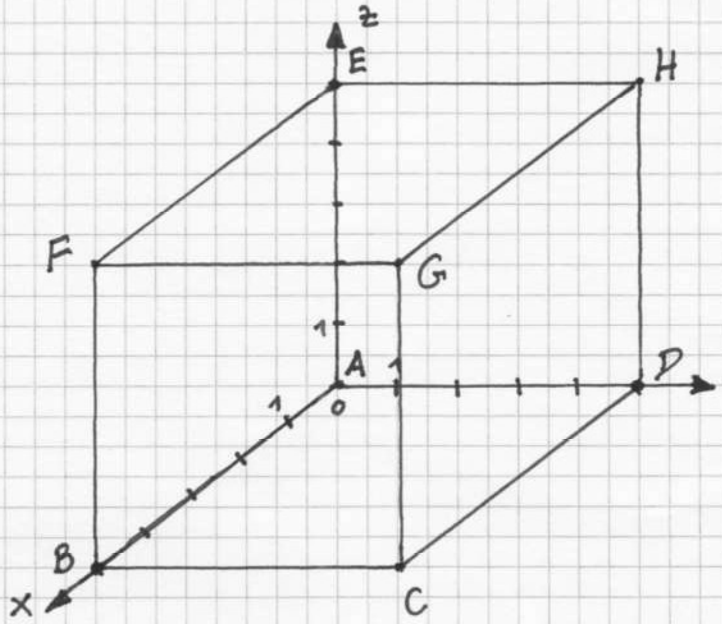
$$r = \sqrt{10^2-6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8.$$

Le vecteur $\overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à β. Par division par -2, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ aussi.

Ainsi l'équation cartésienne de β est donnée par: $x+2y-2z+d=0$.
$C(1;-6;5)$ étant un point de β, par substitution, on a:
$1+2\cdot(-6)-2\cdot 5+d=0$, i.e. $1-12-10+d=0$, i.e. $-21+d=0$, i.e. $d=21$.
L'équation cartésienne de β est donc $x+2y-2z+21=0$.

Exercice 46

a) A(0;0;0)
B(5;0;0)
C(5;5;0)
D(0;5;0)
E(0;0;5)
F(5;0;5)
G(5;5;5)
H(0;5;5)

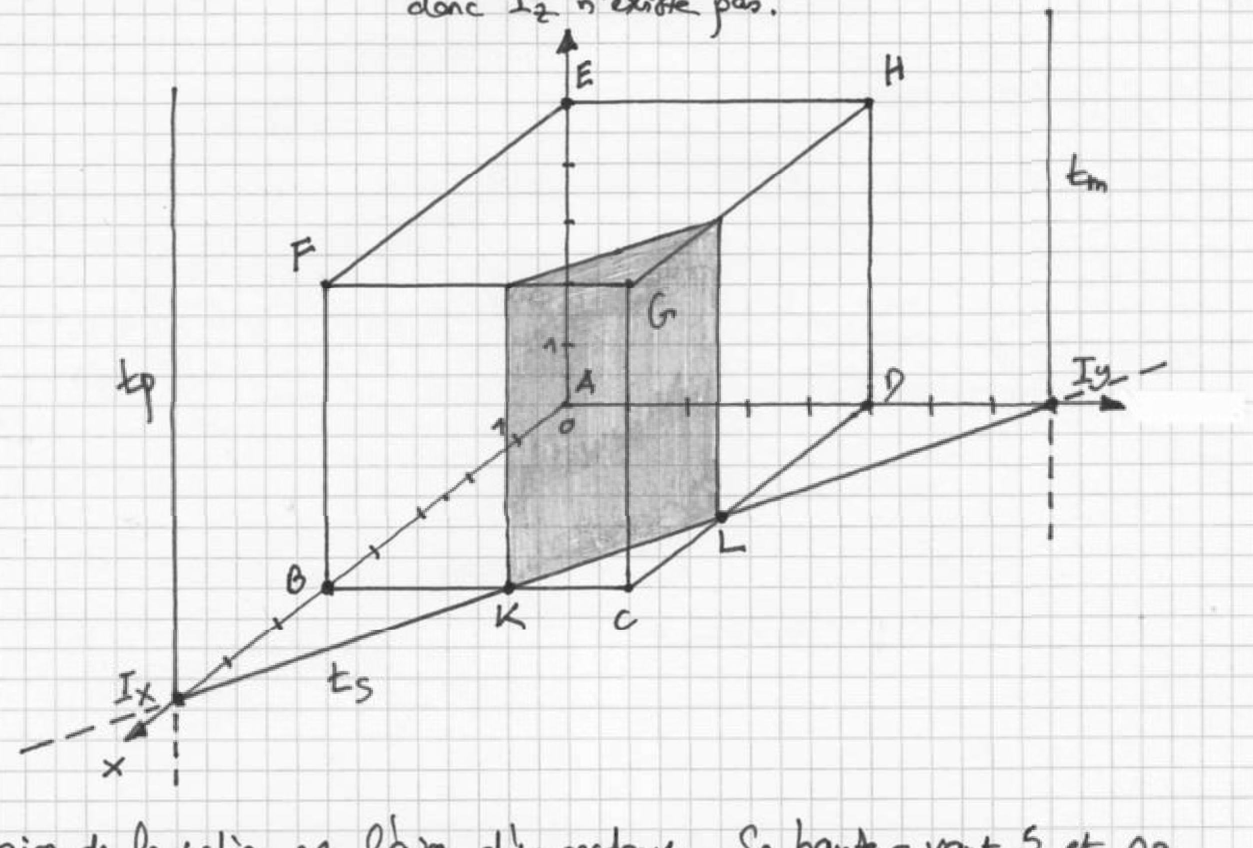


b) Pour dessiner le plan α, on cherche les intersections de α avec les axes :

intersection avec l'axe x : on pose $y = z = 0$; ainsi $x - 8 = 0$, i.e. $x = 8$;
donc $I_x(8;0;0)$;

intersection avec l'axe y : on pose $x = z = 0$; ainsi $y - 8 = 0$, i.e. $y = 8$;
donc $I_y(0;8;0)$;

intersection avec l'axe z : on pose $x = y = 0$; ainsi $-8 = 0$, ce qui est exclu ;
donc I_z n'existe pas.



L'aire de la section est l'aire d'un rectangle. Sa hauteur vaut 5 et sa largeur est calculée de la manière suivante :

L'équation de t_s, trace dans le sol de β est $x+y-8=0$ (on pose $z=0$).
Le point K est $K(5;y;0)$. Par substitution, on obtient $5+y-8=0$, i.e $y-3=0$, i.e. $y=3$. Ainsi $K(5;3;0)$.
Le point L est $L(x;5;0)$. Par substitution, on obtient $x+5-8=0$, i.e $x-3=0$, i.e. $x=3$. Ainsi $L(3;5;0)$.
Comme $C(5;5;0)$, on a $KC=2$ et $LC=2$.
Par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle KLC, on a
$KL=\sqrt{KC^2+LC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$.

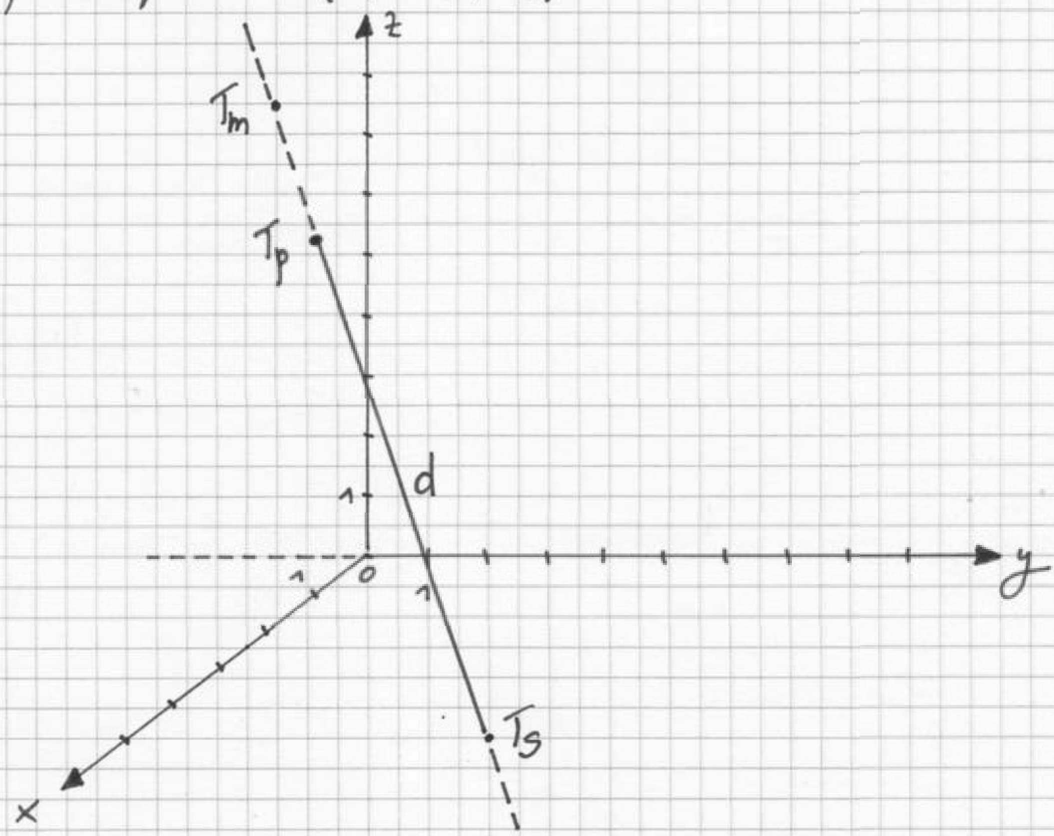
L'aire de la section est donc : $5\cdot\sqrt{8}=5\cdot\sqrt{4\cdot 2}=5\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=5\cdot 2\cdot\sqrt{2}=$
$=\underline{\underline{10\sqrt{2}\cong 14,142}}$.

c) Cherchons les points d'intersection de d avec les plans de référence :

avec le sol : on pose $z=0$; ainsi $12-3\lambda=0$, i.e. $3\lambda=12$, i.e. $\lambda=4$;
donc $x=-3+2\cdot 4=-3+8=5$ et $y=-6+3\cdot 4=-6+12=6$;
par conséquent $T_s(5;6;0)$;

avec la paroi : on pose $y=0$; ainsi $-6+3\lambda=0$, i.e. $3\lambda=6$, i.e. $\lambda=2$;
donc $x=-3+2\cdot 2=-3+4=1$ et $z=12-3\cdot 2=12-6=6$;
par conséquent $T_p(1;0;6)$;

avec le mur : on pose $x=0$; ainsi $-3+2\lambda=0$, i.e. $2\lambda=3$, i.e. $\lambda=\frac{3}{2}$;
donc $y=-6+3\cdot\frac{3}{2}=-6+\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}$ et $z=12-3\cdot\frac{3}{2}=12-\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$;
par conséquent $T_m\left(0;-\frac{3}{2};\frac{15}{2}\right)$.



d) Pour calculer la distance entre la droite d et le point $\mathcal{D}$, on utilise la formule de la distance d'un point à une droite:

$$\frac{\|\overrightarrow{A\mathcal{D}} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$, où A est un point de la droite et $\vec{d}$ un vecteur directeur de la droite.

On peut choisir ici $A(-3;-6;12)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Comme $\mathcal{D}(0;5;0)$, on a:

$\overrightarrow{A\mathcal{D}} = \overrightarrow{O\mathcal{D}} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{A\mathcal{D}} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\cdot(-3) - (-12)\cdot 3 \\ -12\cdot 2 - 3(-3) \\ 3\cdot 3 - 11\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33+36 \\ -24+9 \\ 9-22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -13 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{A\mathcal{D}} \times \vec{d}\| = \sqrt{3^2+(-15)^2+(-13)^2} = \sqrt{9+225+169} = \sqrt{403}$;

$\|\vec{d}\| = \sqrt{2^2+3^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$.

Ainsi la distance de d à $\mathcal{D}$ est $\frac{\sqrt{403}}{\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{403}{22}} \cong 4,28$.

e) Par substitution des équations de d dans α, on a:

$-3+2\lambda-6+3\lambda-8=0$	réduction
$5\lambda-17=0$	$+17$
$5\lambda=17$	$:5$
$\lambda=\frac{17}{5}$	

Avec $\lambda=\frac{17}{5}$, on trouve $x=-3+2\cdot\frac{17}{5}=-3+\frac{34}{5}=\frac{19}{5}$, $y=-6+3\cdot\frac{17}{5}=$
$=-6+\frac{51}{5}=\frac{21}{5}$ et $z=12-3\cdot\frac{17}{5}=12-\frac{51}{5}=\frac{9}{5}$.

Le point d'intersection de d et α est donc $\left(\frac{19}{5};\frac{21}{5};\frac{9}{5}\right)$.

f) L'angle entre 2 plans est donné par $\cos(\varphi)=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$ où $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont des vecteurs perpendiculaires aux plans.

Ici, on a $\vec{n_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi: $|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = |1\cdot1+0\cdot1+0\cdot0| = 1$;

$\|\vec{n_1}\|=1$ et $\|\vec{n_2}\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.

Ainsi $\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\varphi=45°$.

g) Pour montrer qu'un plan est tangent à une sphère, il suffit de montrer que la distance du centre de la sphère au plan est égale au rayon de la sphère.

Le centre de la sphère est $(0;0;3)$ et son rayon est $\sqrt{32}$.
La distance entre le centre de la sphère et le plan α est donnée par

$$\frac{|0+0-8|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} = \sqrt{16.2} = \sqrt{32},$$

ce qui est le rayon de la sphère.
Ainsi, <u>α est tangent à S_1.</u>

Cherchons des équations paramétriques de la droite p perpendiculaire à α et passant par le centre de S_1.
Un vecteur normal (= perpendiculaire) à α est $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
C'est donc un vecteur directeur de p.
Des équations paramétriques de p sont donc : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3. \end{cases}$

L'intersection de p et de α sera le point de contact cherché.
Par substitution, on a : $\lambda + \lambda - 8 = 0$, i.e. $2\lambda - 8 = 0$, i.e. $\lambda = 4$.
Ainsi $x = 4$, $y = 4$ et $z = 3$.
Le <u>point de contact est donc $(4;4;3)$.</u>

h) La distance de β au centre de S_1 doit être $\sqrt{32}$.
Un vecteur normal de β est un vecteur normal de α (puisque β est parallèle à α). Ainsi un vecteur normal de β est $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de β est donc : $x + y + d = 0$.
Le centre de S_1 est $(0;0;3)$.
On doit avoir : $\frac{|0+0+d|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{32}$, i.e. $\frac{|d|}{\sqrt{2}} = \sqrt{32}$, i.e.

$$|d| = \sqrt{2}\sqrt{32} = \sqrt{64} = 8.$$

Les 2 solutions sont $d = 8$ et $d = -8$.
La solution $d = -8$ correspond au plan $x + y - 8 = 0$ qui est α.
La solution $d = 8$ correspond au plan $x + y + 8 = 0$.

Ainsi le <u>plan β a pour équation : $x + y + 8 = 0$.</u>

i) La sphère S_2 est symétrique à la sphère S_1 par rapport au plan α.
Les 2 sphères ont donc le même rayon, à savoir $\sqrt{32}$.
Cherchons maintenant les coordonnées du centre de S_2.
Notons C_1 le centre de S_1 et C_2 le centre de S_2.
On a $C_1(0;0;3)$.
La droite reliant C_1 et C_2 correspond à la droite g de la question g).
Le point de contact de S_1 avec α est $T(4;4;3)$ (voir question g)).

On a alors : $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{OC_1} + 2\overrightarrow{C_1T}$ puisque T est au milieu des segment C_1C_2.

Ainsi $\overrightarrow{OC_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + 2\left(\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix}8\\8\\3\end{pmatrix}$.

Ainsi on a $C_2(8;8;3)$.
L'équation de S_2 est donc $\underline{\underline{(x-8)^2+(y-8)^2+(z-3)^2 = 32.}}$

Exercice 47

On a $T(2;6;z)$ un point de la sphère S.

L'équation de S est : $(x-5)^2+(y-2)^2+(z-9)^2=25$ $\quad (5^2=25)$.

Par substitution, on a $(2-5)^2+(6-2)^2+(z-9)^2=25$, i.e.

$3^2+4^2+(z-9)^2=25$, i.e. $9+16+(z-9)^2=25$, i.e. $25+(z-9)^2=25$,

i.e. $(z-9)^2=0$, i.e. $z-9=0$, i.e. $z=9$.

On a donc $T(2;6;9)$.

La droite t est horizontale. Elle est donc perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ qui est vertical.

La droite t est tangente à la sphère, elle est donc perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{MT}$, rayon de la sphère.

On a : $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi la droite t est perpendiculaire à $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$.

Elle sera donc parallèle à $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$.

On a : $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.0-1.4\\1.(-3)-0.0\\0.4-0.(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de d est donc $\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}$.

En outre d passe par $T(2;6;9)$.

Des équations paramétriques de d sont donc : $\begin{cases}x=2-4\lambda\\y=6-3\lambda\\z=9.\end{cases}$