CANEVAS D'EXAMEN 2013-2015

Corrigé

Partie A

a) $x^4+7=8x^2 \quad | -8x^2$

$x^4-8x^2+7=0 \quad |$ on pose $u=x^2$; on a $u^2=(x^2)^2=x^4$

$u^2-8u+7=0$

ce qui est une équation du 2e degré de la forme $au^2+bu+c=0$ avec $a=1, b=-8, c=7$.

On a alors $u=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4.1.7}}{2.1}=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{14}{2}=7\\ \frac{2}{2}=1\end{cases}$.

Avec $u=7$ et $u=x^2$, on obtient $x^2=7$, d'où $x=\pm\sqrt{7}$.

Avec $u=1$ et $u=x^2$, on obtient $x^2=1$, d'où $x=\pm 1$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x=\sqrt{7},\ x=-\sqrt{7},\ x=1 \text{ et } x=-1.}}$

b) $\sqrt{x+2}-2x=1 \quad | +2x$

$\sqrt{x+2}=2x+1 \quad | (\ \ )^2$

$x+2=(2x+1)^2 \quad |$ développement

$x+2=4x^2+4x+1 \quad | -x-2$

$0=4x^2+3x-1$

ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=4$, $b=3$ et $c=-1$.

On a alors $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.4.(-1)}}{2.4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{8}=\frac{-3\pm 5}{8}=\begin{cases}\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\\ -\frac{8}{8}=-1\end{cases}$

Comme on a élevé au carré, on doit vérifier les solutions :

$x=\frac{1}{4}$: $\sqrt{x+2}-2x=\sqrt{\frac{1}{4}+2}-2.\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{9}{4}}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$ OK.

$x=-1$: $\sqrt{x+2}-2x=\sqrt{-1+2}-2(-1)=\sqrt{1}+2=1+2=3$ NOT OK.

Ainsi, l'unique solution est $\underline{\underline{x=\frac{1}{4}}}$.

c) $\frac{-5}{2x-1}=\frac{2}{x+4}$: on remarque tout d'abord qu'on doit avoir $2x-1\neq 0$ et $x+4\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq\frac{1}{2}$ et $x\neq -4$.

$\frac{-5}{2x-1}=\frac{2}{x+4} \quad | \cdot(2x-1)$ et $\cdot(x+4)$

$-5(x+4)=2(2x-1) \quad |$ distributivité

$-5x-20=4x-4 \quad | +5x$

$-20=9x-4 \quad | +4$

$-16=9x \quad | :9$

$x=-\frac{16}{9}$

Comme $-\frac{16}{9}$ est différent de $\frac{1}{2}$ et de -4, on en conclut que la solution de l'équation est $\underline{\underline{x = -\frac{16}{9}}}$.

d) $\begin{cases} 5x = y - 3 & \Rightarrow x = \frac{y}{5} - \frac{3}{5} \\ x + 2y = 3x - y + 1 & \Rightarrow 2y = 2x - y + 1 \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 3y - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x = \frac{3y}{2} - \frac{1}{2}$

On doit donc avoir

$$\frac{y}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \quad \Big| \text{ dénominateur commun : } 10$$

$$\frac{2y}{10} - \frac{6}{10} = \frac{15y}{10} - \frac{5}{10} \quad \Big| \cdot 10$$

$$2y - 6 = 15y - 5 \quad \Big| -2y$$

$$-6 = 13y - 5 \quad \Big| +5$$

$$-1 = 13y \quad \Big| :13$$

$$y = -\frac{1}{13}$$

Avec $y = -\frac{1}{13}$, on obtient $5x = y - 3 = -\frac{1}{13} - 3 = -\frac{1}{13} - \frac{39}{13} = -\frac{40}{13}$, d'où

$$x = -\frac{40}{13} : 5 = -\frac{40}{13} : \frac{5}{1} = -\frac{\cancel{40}^{8}}{13} \cdot \frac{1}{\cancel{5}_{1}} = -\frac{8}{13}.$$

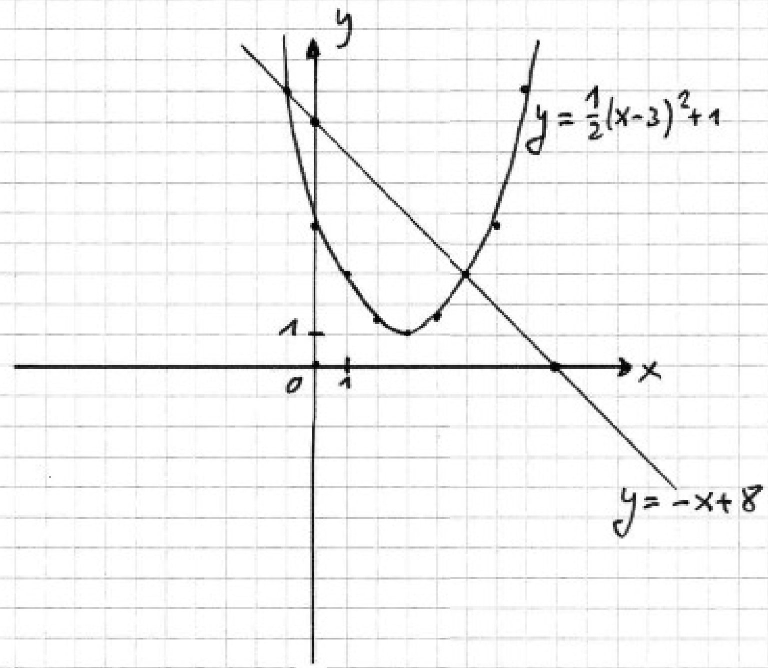
La solution est donc $\underline{\underline{x = -\frac{8}{13} \text{ et } y = -\frac{1}{13}}}$.

Partie B

Exercice 1

x	$-x+8$
0	8
8	0

x	$\frac{1}{2}(x-3)^2+1$	
3	1	(sommet)
0	5,5	
6	5,5	
1	3	
5	3	
2	1,5	
4	1,5	
-1	9	
7	9	



Points d'intersections : il faut résoudre le système $\begin{cases} y=-x+8 \\ y=\frac{1}{2}(x-3)^2+1 \end{cases}$.

On doit avoir		
	$-x+8=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$	développement
	$-x+8=\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+1$	distributivité
	$-x+8=\frac{x^2}{2}-3x+\frac{9}{2}+1$	$\cdot 2$
	$-2x+16=x^2-6x+9+2$	réduction
	$-2x+16=x^2-6x+11$	$+2x-16$
	$0=x^2-4x-5$	

Ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-4$ et $c=-5$.

On a alors $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm6}{2}=\begin{cases}\frac{10}{2}=5\\ -\frac{2}{2}=-1.\end{cases}$

Avec $x=5$, on a $y=-x+8=-5+8=3$ (ou $y=\frac{1}{2}(5-3)^2+1=\frac{1}{2}\cdot2^2+1=2+1=3$).

Avec $x=-1$, on a $y=-x+8=1+8=9$ (ou $y=\frac{1}{2}(-1-3)^2+1=\frac{1}{2}\cdot4^2+1=8+1=9$).

Les coordonnées des points d'intersection sont donc $\underline{\underline{(-1;9) \text{ et } (5;3)}}$.

Exercice 2

Si x désigne le nombre de minutes, on peut exprimer le prix y pour chaque opérateur:

HALIN_TELECOM: $y = 0{,}3x$;

PHONE-COM: $y = 0{,}1x + 30$.

On va chercher x pour que le prix PHONE-COM soit inférieur au prix HALIN_TELECOM.

On doit avoir

$$\begin{array}{rcl|l} 0{,}1x+30 & \leq & 0{,}3x & -0{,}1x \\ 30 & \leq & 0{,}2x & :0{,}2 \ (\text{ou} \cdot 5) \\ 150 & \leq & x & \end{array}$$

Ainsi, <u>à partir de 150 minutes</u>, Aurélie a intérêt à prendre l'abonnement PHONE-COM.

Exercice 3

a) Si x est la quantité d'aspirateurs vendus, les coûts totaux sont donnés par $C(x) = 6x^2 - 246x + 5184$.

De plus, le chiffre d'affaires est donné par $CA(x) = 450x$.

Le bénéfice est le chiffre d'affaires moins les coûts:

$$B(x) = CA(x) - C(x) = 450x - (6x^2 - 246x + 5184) = 450 - 6x^2 + 246x - 5184 =$$
$$= \underline{\underline{-6x^2 + 696x - 5184}} .$$

b) Les points morts sont les x tels que $B(x) = 0$ (bénéfice nul).

$B(x) = 0 \iff -6x^2 + 696x - 5184 \overset{:(-6)}{\Longrightarrow} x^2 - 116x + 864 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-116$ et $c=864$.

On a alors $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{116 \pm \sqrt{116^2 - 4 \cdot 1 \cdot 864}}{2 \cdot 1} = \dfrac{116 \pm 100}{2} = \begin{cases} \frac{216}{2} = 108 \\ \frac{16}{2} = 8 . \end{cases}$

Les points morts sont donc $\underline{\underline{x = 8 \text{ et } x = 108.}}$

c) On cherche les coordonnées du sommet de la parabole $B(x) = -6x^2 + 696x - 5184$.

On sait que la 1e coordonnée du sommet est donnée par $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ où $b = 696$ et $a = -6$.

Ainsi $x_S = -\dfrac{696}{2 \cdot (-6)} = \dfrac{696}{12} = 58$.

Avec $x_S = 58$, la 2e coordonnée du sommet (et donc le bénéfice maximal) est donné par $y_S = -6x_S^2 + 696x_S - 5184 = -6 \cdot 58^2 + 696 \cdot 58 - 5184 = 15'000$.

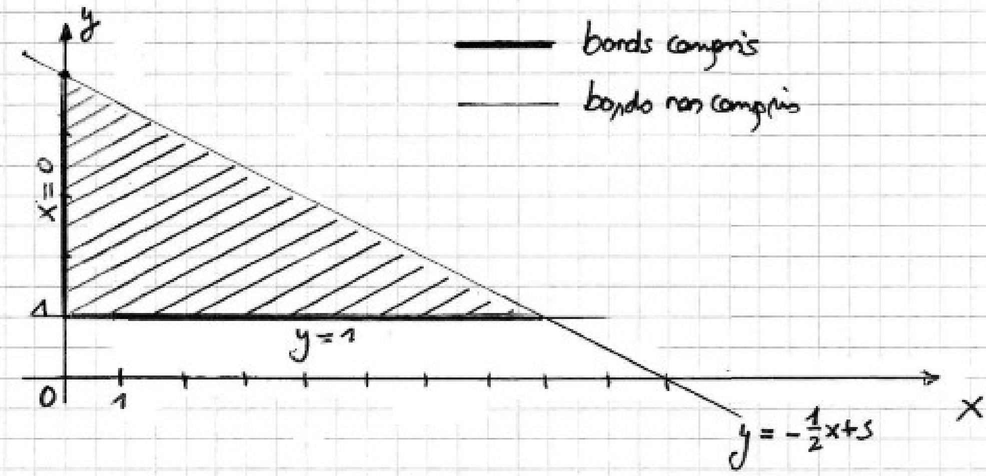
Par conséquent, le bénéfice maximal réalisable est de <u>15'000.–</u> (si on vend 58 aspirateurs).

Partie C

Exercice 1

Les zones $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 1$ se représentent facilement.

Pour $y < -\frac{1}{2}x+5$, on représente tout d'abord $y = -\frac{1}{2}x+5$ et l'inégalité correspondra à ce qui est au-dessous de cette droite:



Exercice 2

Notons x le nombre de soldats et y le nombre de trains.

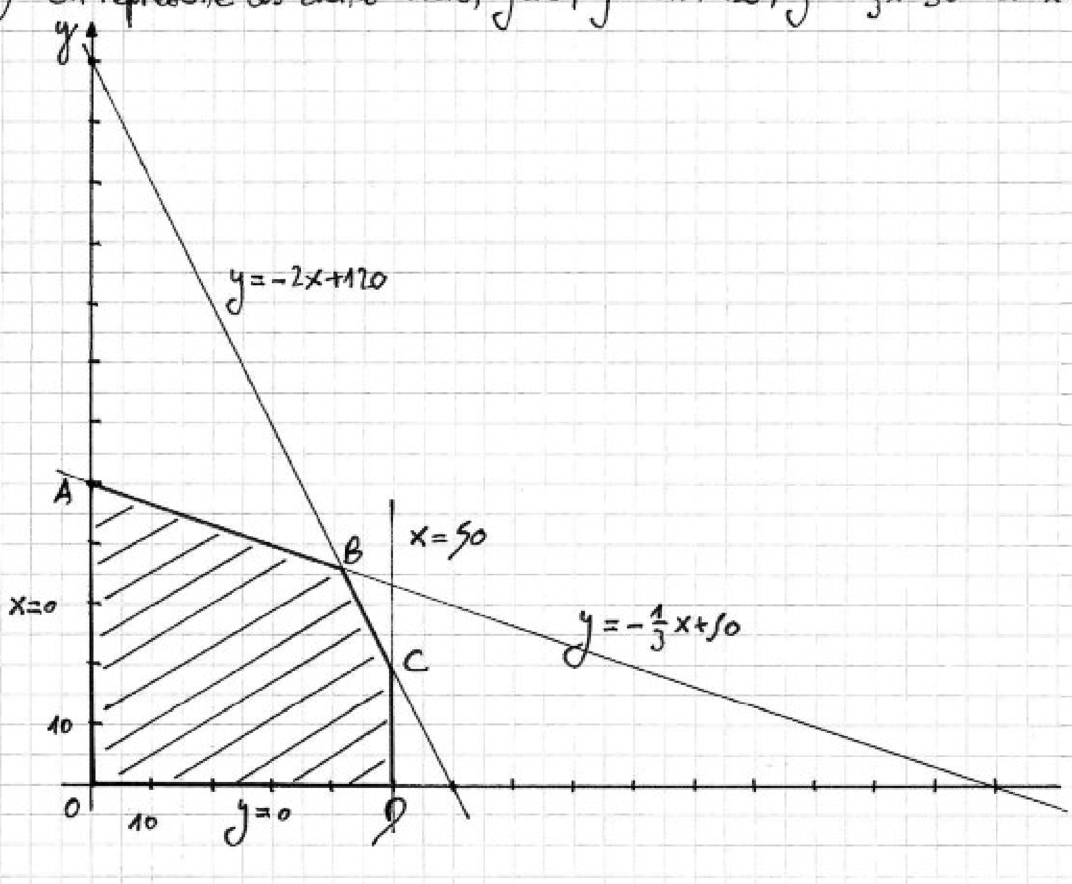
a) Les contraintes sont: $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

menuiserie: $2x+y \leqslant 120 \Rightarrow y \leqslant -2x+120$

peinture: $x+3y \leqslant 150 \Rightarrow y \leqslant -\frac{1}{3}x+50$

demande: $x \leqslant 50$

b) On représente les droites $x=0$, $y=0$, $y=-2x+120$, $y=-\frac{1}{3}x+50$ et $x=50$:



c) On a : $O(0;0)$.

Par A : $x=0$ et $y=-\frac{1}{3}\cdot 0+50=50 \Rightarrow A(0;50)$.

Par B : $y=-\frac{1}{3}x+50$ et $y=-2x+120 \Rightarrow -\frac{1}{3}x+50=-2x+120$

$\Rightarrow -x+150=-6x+360 \Rightarrow 5x=210 \Rightarrow x=42$

$\Rightarrow y=-2\cdot 42+120=36 \Rightarrow B(42;36)$.

Par C : $x=50$ et $y=-2x+120=-2\cdot 50+120=20 \Rightarrow C(50;20)$.

Par D : $x=50$ et $y=0 \Rightarrow D(50;0)$.

d) Le bénéfice est donné par $b(x;y)=3x+4y$.

Avec $O(0;0)$, on a $b(0;0)=0$.

Avec $A(0;50)$, on a $b(0;50)=4\cdot 50=200$.

Avec $B(42;36)$, on a $b(42;36)=3\cdot 42+4\cdot 36=270$.

Avec $C(50;20)$, on a $b(50;20)=3\cdot 50+4\cdot 20=230$.

Avec $D(50;0)$, on a $b(50;0)=3\cdot 50=150$.

Ainsi, le bénéfice sera maximal pour $B(42;36)$, autrement dit si on vend 42 soldats et 36 trains.

Partie 9

Exercice 1

On utilise la formule des intérêts composés : $C_n = C_0(1+i)^n$, où C_0 est le capital de base, i le taux d'intérêts, n le nombre d'années et C_n le capital après n années.

On a : $C_0 = 200'000$, $n = 10$ et $C_n = 200'000 + 62'330{,}2 = 262'330{,}2$.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl|l} 262'330{,}2 &=& 200'000(1+i)^{10} & :200'000 \\ 1{,}3116551 &=& (1+i)^{10} & \sqrt[10]{} \\ 1{,}0275 &=& 1+i & -1 \\ i &=& 0{,}0275 = 2{,}75\% & \end{array}$$

Le taux d'intérêt est donc de $2{,}75\%$.

Exercice 2

On utilise la formule des intérêts composés, mais transformées pour une baisse :
$C_n = C_0(1-i)^n$, où C_0 est le prix du 1^e jour, n le nb de jours, C_n le prix au n^e jour et i le taux de baisse.

a) On a $C_0 = 1{,}5$, $n = 7$ (1 semaine = 7 jours), $i = 2\% = 0{,}02$.

Ainsi $C_7 = 1{,}5(1-0{,}02)^7 = 1{,}3022 \cong 1{,}30$.

Après 1 semaine, le prix du litre de lait est de 1,30.

b) On a $C_0 = 1{,}5$, $C_n = 1$, $i = 2\% = 0{,}02$ et on cherche n.

On a

$$\begin{array}{rcl|l} 1 &=& 1{,}5(1-0{,}02)^n & :1{,}5 \\ 0{,}\overline{6} &=& 0{,}98^n & \log \\ \log(0{,}\overline{6}) &=& \log(0{,}98^n) & \log(a^b) = b\log(a) \\ \log(0{,}\overline{6}) &=& n\log(0{,}98) & :\log(0{,}98) \\ n &=& \dfrac{\log(0{,}\overline{6})}{\log(0{,}98)} = 20{,}07 & \end{array}$$

Ainsi, le prix du litre de lait ne vaudra plus que 1.– après 20 jours.

Partie E

Exercice 1

a) Il choisit 3 élèves parmi 20 sans tenir compte de l'ordre : ce sont des combinaisons.
Le nombre de façons de désigner les 3 élèves est donc $C_3^{20} = 1140$.

b) Ici l'ordre compte.
Pour le président : 1 parmi 19 (Nicolas est exclu) : $C_1^{19} = 19$.
Pour le vice-président : 1 parmi 19 (l'élève choisi comme président est exclu) : $C_1^{19} = 19$.
Pour le secrétaire : 1 parmi 18 (président et vice-président exclus) : $C_1^{18} = 18$.
Le nombre de façons de former la délégation est donc $19.19.18 = 6498$.

Exercice 2

a) Le premier invité a le choix entre $20-6 = 14$ verres autres que jus d'orange.
La probabilité qu'il ne prenne pas de jus d'orange est donc $\frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0,7 = 70\%$.

b) 1^e invité : choix entre 6 verres de jus de pomme : prob $= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
2^e invité : choix entre 5 verres de jus de pomme (le 1^e invité en a déjà pris un) :
prob $= \frac{5}{19}$.
Ainsi, la probabilité que les 2 premiers invités prennent du jus de pomme est $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38} =$
$\cong 0,07895 = 7,895\%$.

c) Si on ne tient pas compte de l'ordre, on a :
Prendre 1 jus d'orange : C_1^6.
Prendre 1 jus de pomme : C_1^6.
Prendre 1 jus de raisin : C_1^5
Prendre 1 jus de mangue : C_1^3 $(3 = 20-6-6-5)$.
Le nombre de possibilités total est C_4^{20}.
La probabilité cherchée est donc $\frac{C_1^6 \cdot C_1^6 \cdot C_1^5 \cdot C_1^3}{C_4^{20}} = \frac{6.6.5.3}{4845} = \frac{540}{4845} = \frac{36}{323} =$
$\cong 0,11146 = 11,146\%$.

d) Prob (au moins 1 verre de mangue choisi) = 1 − Prob (aucun verre de mangue choisi) =

$$= 1 - \frac{C_4^{17}}{C_4^{20}}$$

C_4^{17} ← 4 verres choisis parmi les 17 qui ne sont pas mangues
C_4^{20} ← 4 verres choisis parmi les 20

$$= 1 - \frac{2380}{4845} = 1 - \frac{28}{57} = \frac{29}{57} \cong 0,50877 = 50,877\%.$$