

CANEVAS D'EXAMEN 2015
Corrigé

①

Partie A

$$\begin{array}{l|l}
 a) \quad x^4 + 7 = 8x^2 & -8x^2 \\
 x^4 - 8x^2 + 7 = 0 & \text{on pose } u = x^2; \text{ on a } u^2 = (x^2)^2 = x^4 \\
 u^2 - 8u + 7 = 0 &
 \end{array}$$

ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $au^2 + bu + c = 0$ avec $a=1, b=-8, c=7$.

$$\text{On a alors } u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{14}{2} = 7 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Avec $u=7$ et $u=x^2$, on obtient $x^2=7$, d'où $x = \pm\sqrt{7}$.

Avec $u=1$ et $u=x^2$, on obtient $x^2=1$, d'où $x = \pm 1$.

Les solutions sont donc $x = \sqrt{7}, x = -\sqrt{7}, x = 1$ et $x = -1$.

$$\begin{array}{l|l}
 b) \quad \sqrt{x+2} - 2x = 1 & +2x \\
 \sqrt{x+2} = 2x+1 & ()^2 \\
 x+2 = (2x+1)^2 & \text{développement} \\
 x+2 = 4x^2 + 4x + 1 & -x - 2 \\
 0 = 4x^2 + 3x - 1 &
 \end{array}$$

ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a=4, b=3$ et $c=-1$.

$$\text{On a alors } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8} = \begin{cases} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ -\frac{8}{8} = -1 \end{cases}$$

Comme on a élevé au carré, on doit vérifier les solutions:

$$x = \frac{1}{4}: \sqrt{x+2} - 2x = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad \text{OK.}$$

$$x = -1: \sqrt{x+2} - 2x = \sqrt{-1+2} - 2(-1) = \sqrt{1} + 2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{NOT OK.}$$

Ainsi, l'unique solution est $x = \frac{1}{4}$.

$$c) \quad \frac{-5}{2x-1} = \frac{2}{x+4} : \text{ on remarque tout d'abord qu'on doit avoir } 2x-1 \neq 0 \text{ et } x+4 \neq 0, \text{ c'est-à-dire } x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq -4.$$

$$\frac{-5}{2x-1} = \frac{2}{x+4} \quad | \cdot (2x-1) \text{ et } \cdot (x+4)$$

$$-5(x+4) = 2(2x-1) \quad | \text{ distributivité}$$

$$-5x - 20 = 4x - 4 \quad | +5x$$

$$-20 = 9x - 4 \quad | +4$$

$$-16 = 9x \quad | :9$$

$$x = -\frac{16}{9}$$

(2)

Comme $-\frac{16}{9}$ est différent de $\frac{1}{2}$ et de -4 , on en conclut que la solution de l'équation est $x = -\frac{16}{9}$.

$$d) \begin{cases} 5x = y - 3 & \Rightarrow x = \frac{y}{5} - \frac{3}{5} \\ x + 2y = 3x - y + 1 & \Rightarrow 2y = 2x - y + 1 \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 3y - 1 \\ & \Rightarrow x = \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

On doit donc avoir $\frac{y}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3y}{2} - \frac{1}{2}$ | Déterminateur commun: 10

$$\frac{2y}{10} - \frac{6}{10} = \frac{15y}{10} - \frac{5}{10}$$

$$2y - 6 = 15y - 5$$

$$-6 = 13y - 5$$

$$-1 = 13y$$

$$y = -\frac{1}{13}$$

· 10

- 2y
+ 5

: 13

Avec $y = -\frac{1}{13}$, on obtient $5x = y - 3 = -\frac{1}{13} - 3 = -\frac{1}{13} - \frac{39}{13} = -\frac{40}{13}$, d'où

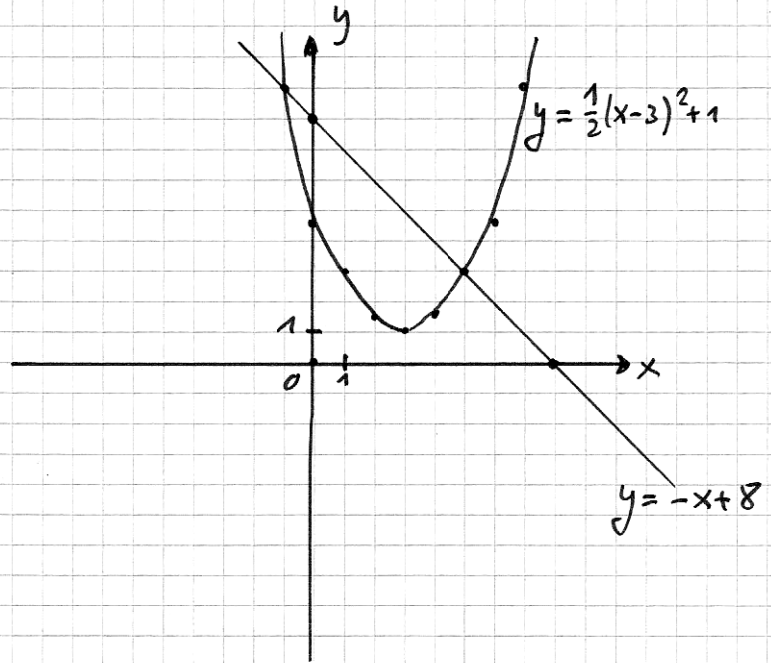
$$x = -\frac{40}{13} : 5 = -\frac{40}{13} : \frac{5}{1} = -\frac{40}{13} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{8}{13}$$

La solution est donc $x = -\frac{8}{13}$ et $y = -\frac{1}{13}$.

Partie B

Exercice 1

x	-x+8	x	$\frac{1}{2}(x-3)^2+1$
0	8	3	1 (Sommet)
8	0	0	5,5
		6	5,5
		1	3
		5	3
		2	1,5
		4	1,5
		-1	9
		7	9



Points d'intersections: il faut résoudre le système $\begin{cases} y = -x + 8 \\ y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1 \end{cases}$.

On doit avoir	$-x + 8 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$	développement
	$-x + 8 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + 1$	distributivité
	$-x + 8 = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2} + 1$	$\cdot 2$
	$-2x + 16 = x^2 - 6x + 9 + 2$	réduction
	$-2x + 16 = x^2 - 6x + 11$	$+2x - 16$
	$0 = x^2 - 4x - 5$	

Ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a=1$, $b=-4$ et $c=-5$.

On a alors $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$

Avec $x=5$, on a $y = -x + 8 = -5 + 8 = 3$ (ou $y = \frac{1}{2}(5-3)^2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 1 = 2 + 1 = 3$).

Avec $x=-1$, on a $y = -x + 8 = 1 + 8 = 9$ (ou $y = \frac{1}{2}(-1-3)^2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 1 = 8 + 1 = 9$).

Les coordonnées des points d'intersection sont donc $(-1, 9)$ et $(5, 3)$.

Exercice 2

Si x désigne le nombre de minutes, on peut exprimer le prix y pour chaque opérateur:

HALIN-TELECOM: $y = 0,3x$;

PHONE-COM: $y = 0,1x + 30$.

On va chercher x pour que le prix PHONE-COM soit inférieur au prix HALIN-TELECOM.

$$\begin{array}{l|l}
 \text{On doit avoir } 0,1x + 30 \leq 0,3x & - 0,1x \\
 30 \leq 0,2x & : 0,2 \text{ (ou } \cdot 5) \\
 150 \leq x &
 \end{array}$$

Ainsi, à partir de 150 minutes, Aurélie a intérêt à prendre l'abonnement PHONE-COM.

Exercice 3

a) Si x est la quantité d'aspirateurs vendus, les coûts totaux sont donnés par $C(x) = 6x^2 - 246x + 5184$.
Le plus, le chiffre d'affaires est donné par $CA(x) = 450x$.

Le bénéfice est le chiffre d'affaires moins les coûts:

$$\begin{aligned}
 B(x) &= CA(x) - C(x) = 450x - (6x^2 - 246x + 5184) = 450x - 6x^2 + 246x - 5184 = \\
 &= \underline{\underline{-6x^2 + 696x - 5184}}.
 \end{aligned}$$

b) Les points morts sont les x tels que $B(x) = 0$ (bénéfice nul).

$$B(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 696x - 5184 \stackrel{:(-6)}{\Rightarrow} x^2 - 116x + 864 = 0, \text{ ce qui est une équation du 2}^{\text{e}} \text{ degré de la forme } ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a = 1, b = -116 \text{ et } c = 864.$$

$$\text{On a alors } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{116 \pm \sqrt{116^2 - 4 \cdot 1 \cdot 864}}{2 \cdot 1} = \frac{116 \pm 100}{2} = \begin{cases} \frac{216}{2} = 108 \\ \frac{16}{2} = 8 \end{cases}$$

Les points morts sont donc $x = 8$ et $x = 108$.

c) On cherche les coordonnées du sommet de la parabole $B(x) = -6x^2 + 696x - 5184$.

On sait que la 1^{ère} coordonnée du sommet est donnée par $x_s = -\frac{b}{2a}$ où $b = 696$ et $a = -6$.

$$\text{Ainsi } x_s = -\frac{696}{2 \cdot (-6)} = \frac{696}{12} = 58.$$

Avec $x_s = 58$, la 2^{ème} coordonnée du sommet (et donc le bénéfice maximal) est donné par $y_s = -6x_s^2 + 696x_s - 5184 = -6 \cdot 58^2 + 696 \cdot 58 - 5184 = 15'000$.

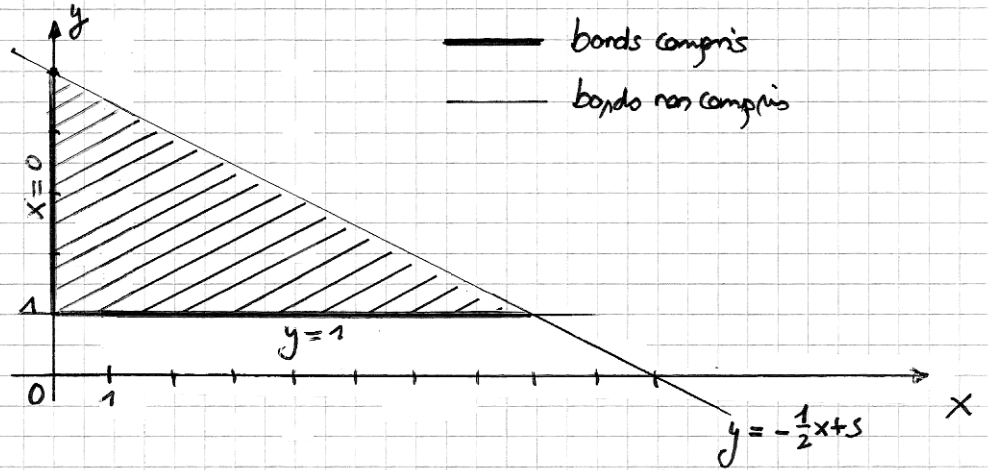
Par conséquent, le bénéfice maximal réalisable est de 15'000.- (si on vend 58 aspirateurs).

Partie C

Exercice 1

Les zones $x \geq 0$ et $y \geq 1$ se représentent facilement.

Pour $y < -\frac{1}{2}x + 5$, on représente tout d'abord $y = -\frac{1}{2}x + 5$ et l'inégalité correspondra à ce qui est au-dessous de cette droite:



Exercice 2

Notons x le nombre de soldats et y le nombre de trains.

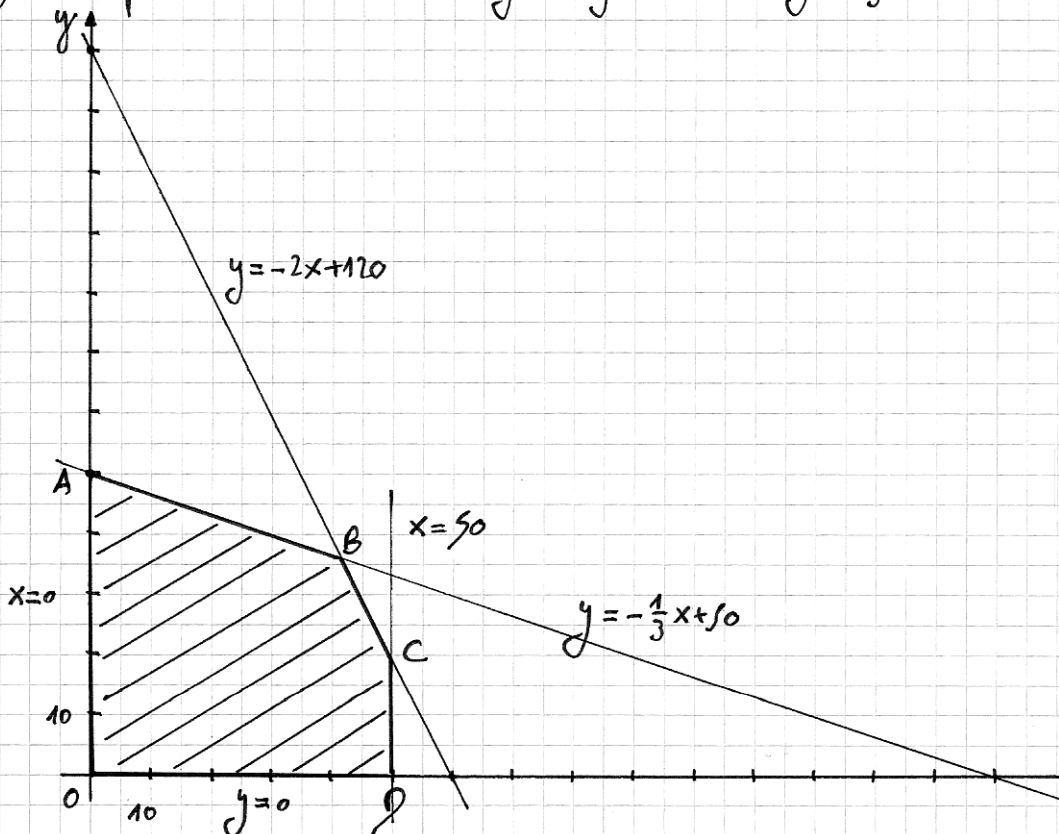
a) Les contraintes sont: $x \geq 0$ et $y \geq 0$

menuiserie: $2x + y \leq 120 \Rightarrow y \leq -2x + 120$

peinture: $x + 3y \leq 150 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 50$

demande: $x \leq 50$

b) On représente les droites $x=0$, $y=0$, $y=-2x+120$, $y=-\frac{1}{3}x+50$ et $x=50$:



c) On a : $O(0;0)$.

Pan A: $x=0$ et $y = -\frac{1}{3} \cdot 0 + 50 = 50 \Rightarrow A(0;50)$.

Pan B: $y = -\frac{1}{3}x + 50$ et $y = -2x + 120 \Rightarrow -\frac{1}{3}x + 50 = -2x + 120$
 $\Rightarrow -x + 150 = -6x + 360 \Rightarrow 5x = 210 \Rightarrow x = 42$
 $\Rightarrow y = -2 \cdot 42 + 120 = 36 \Rightarrow B(42;36)$.

Pan C: $x=50$ et $y = -2x + 120 = -2 \cdot 50 + 120 = 20 \Rightarrow C(50;20)$.

Pan D: $x=50$ et $y=0 \Rightarrow D(50;0)$.

d) Le bénéfice est donné par $b(x;y) = 3x + 4y$.

Avec $O(0;0)$, on a $b(0;0) = 0$.

Avec $A(0;50)$, on a $b(0;50) = 4 \cdot 50 = 200$.

Avec $B(42;36)$, on a $b(42;36) = 3 \cdot 42 + 4 \cdot 36 = 270$.

Avec $C(50;20)$, on a $b(50;20) = 3 \cdot 50 + 4 \cdot 20 = 230$.

Avec $D(50;0)$, on a $b(50;0) = 3 \cdot 50 = 150$.

Ainsi, le bénéfice sera maximal par $B(42;36)$, autrement dit si on vend 42 ordinateurs et 36 trains.

Partie 2

Exercice 1

On utilise la formule des intérêts composés: $C_n = C_0(1+i)^n$, où C_0 est le capital de base, i le taux d'intérêts, n le nombre d'années et C_n le capital après n années.

On a: $C_0 = 200'000$, $n = 10$ et $C_n = 200'000 + 62'330,2 = 262'330,2$.

Ainsi: $262'330,2 = 200'000(1+i)^{10}$: 200'000
$1,311651 = (1+i)^{10}$		$\sqrt[10]{\quad}$
$1,0275 = 1+i$		- 1
$i = 0,0275 = 2,75\%$		

Le taux d'intérêt est donc de 2,75%.

Exercice 2

On utilise la formule des intérêts composés, mais transformée par une baisse:

$C_n = C_0(1-i)^n$, où C_0 est le prix du 1^{er} jour, n le nb de jours, C_n le prix au n^o jour et i le taux de baisse.

a) On a $C_0 = 1,5$, $n = 7$ (1 semaine = 7 jours), $i = 2\% = 0,02$.

Ainsi $C_7 = 1,5(1-0,02)^7 = 1,3022 \approx 1,30$.

Après 1 semaine, le prix du litre de lait est de 1,30.

b) On a $C_0 = 1,5$, $C_n = 1$, $i = 2\% = 0,02$ et on cherche n .

On a $1 = 1,5(1-0,02)^n$: 1,5
$0,6 = 0,98^n$		log
$\log(0,6) = \log(0,98^n)$		$\log(a^b) = b \log(a)$
$\log(0,6) = n \log(0,98)$: $\log(0,98)$
$n = \frac{\log(0,6)}{\log(0,98)} = 20,07$		

Ainsi, le prix du litre de lait ne vaucha plus que 1.- après 20 jours.

Exercice 3

$e^{3x-1} = 5$		ln ()
$3x-1 = \ln(5)$		+ 1
$3x = \ln(5) + 1$: 3
$x = \frac{\ln(5) + 1}{3} \approx 0,87$		

$$2^{x+1} = 3^{2x}$$

$$2^x \cdot 2 = (3^2)^x$$

$$2^x \cdot 2 = 9^x$$

$$\frac{2^x}{9^x} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)^x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log(1/2)}{\log(2/9)} \approx 0,46$$

: 9^x et : 2

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^x = b \Rightarrow x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

Partie E

Exercice 1

- a) La moyenne est donnée par $\frac{a+b+c+d}{4}$.
- b) Comme on a 4 éléments, la médiane est la médiane des 2^e et 3^e termes, c'est-à-dire $\frac{b+c}{2}$.

Exercice 2

Commençons par classer les températures dans l'ordre croissant et indiquons les effectifs pour chaque température :

températures	17°	18°	19°	22°	25°	26°	27°	29°	34°
effectifs	1	2	1	1	1	1	1	1	1

- a) Le mode est la valeur de la variable la plus fréquemment observée. C'est donc 18°.
La moyenne est donnée par $\frac{17+2 \cdot 18+19+22+25+26+27+29+34}{10} = 23,5°$.
Comme on a 10 observations, la médiane est la moyenne entre les 5^e et 6^e observations (attention: tenir compte que le 18° a un effectif de 2). La médiane est donc $\frac{22+25}{2} = 23,5°$.

b) le regroupement par classes donne :

10° - 20°	20° - 30°	30° - 40°
4	5	1

c) On peut établir le tableau suivant :

Classes	x_i	n_i	$n_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
10° - 20°	15	4	60	15 - 22 = -7	49	4 · 49 = 196
20° - 30°	25	5	125	25 - 22 = 3	9	5 · 9 = 45
30° - 40°	35	1	35	35 - 22 = 13	169	1 · 169 = 169
Total			220			410

Ainsi, une valeur approximative de la moyenne est $\bar{x} = \frac{220}{10} = 22$, une valeur approximative de la variance est $\sigma^2 = \frac{410}{10} = 41$ et une valeur approximative de l'écart-type est $\sigma = \sqrt{41} \approx 6,4$.