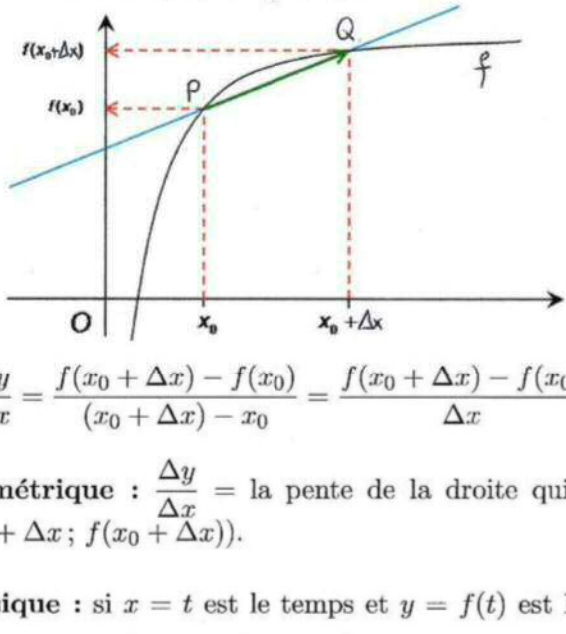
Chapitre 4

Dérivées et applications

4.1 La dérivée

4.1.1 Définitions

Soit $y = f(x)$ une fonction continue, $x_0 \in D_f$ un point fixé et $\Delta x > 0$ l'accroissement.



Calculons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Interprétation géométrique : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = la pente de la droite qui passe par les points $P(x_0\,;\, f(x_0))$ et $Q(x_0 + \Delta x\,;\, f(x_0 + \Delta x))$.

Interprétation physique : si $x = t$ est le temps et $y = f(t)$ est la distance parcourue, alors $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne durant le temps Δt.

Que devient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $\Delta x \longrightarrow 0$?
Géométriquement, on aura la pente de la tangente au graphe de f passant par $P(x_0; f(x_0))$.
Physiquement, on a la vitesse instantanée au temps $t = t_0$.
On pose alors la définition suivante :

Définition 4.1 (Dérivabilité)**.** On dit que la fonction $f(x)$ est **dérivable au point** x_0 si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Cette limite est appelée la **dérivée de f au point** x_0. Elle est notée $f'(x_0)$.

Ainsi

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.}$$

Autre notation :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}(x_0).$$

$f'(x_0) =$ la pente de la tangente au graphe de f au point $(x_0; f(x_0))$.

Définition 4.2. Soit $f(x)$ une fonction et $I \subset D_f$ un intervalle. Si $f'(x)$ existe pour tout $x \in I$, on dit que f est **dérivable sur** I. La fonction $f'(x)$ est appelée la **dérivée de** f (sur I).

Autre notation : la dérivée de $f(x)$ est aussi notée $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ ou encore f' s'il n'y a aucune ambiguïté sur la variable.

Autre notation : on note
dx l'accroissement infinitésimal de la variable x
dy l'accroissement infinitésimal de la variable y.
Si $y = f(x)$ alors $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ et donc $\boxed{dy = f'(x)dx}$

Exemple 4.3. Soit $f(x) = ax + b$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi $(ax+b)' = a$.

Application : équation de la tangente à un graphe

Soit $f(x)$ une fonction continue et $P(a\,;\, f(a))$ un point du graphe de f. Alors l'équation de la tangente au graphe de f passant par P est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a).}$$

Théorème 4.4. *Soit $f(x)$ une fonction. Si $f(x)$ est dérivable en x_0 alors elle est continue en ce point.*

ATTENTION : la réciproque est fausse !
Exemple : la fonction $f(x) = |x|$ est continue mais pas dérivable en 0. En effet, on a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

alors que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Donc $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ n'existe pas.

4.1.2 Exemples

1. Soit $f(x) = x^2$. Alors

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x.$$

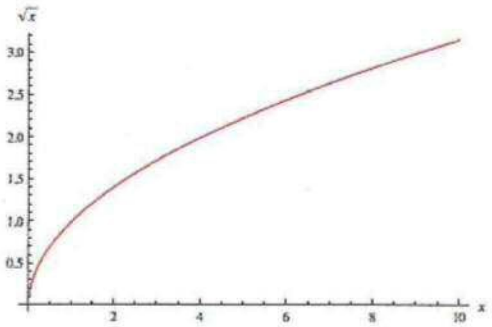
Ainsi $f'(x) = 2x$.

2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Alors pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

car $\sqrt{x}$ est continue.

Si $x = 0$, on trouve $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$. La fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. La tangente est verticale.



3. Soit $f(x) = e^x$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{h+x} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h e^x - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \underbrace{\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \dots\right)}_{=R(h)} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

On a bien $\lim_{h\to 0} R(h) = 1$ car

$$\begin{aligned} |R(h) - 1| &= \left|\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \dots\right| \leqslant \frac{|h|}{2} + \left(\frac{|h|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|h|}{2}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{|h|}{2}\left(1 + \frac{|h|}{2} + \left(\frac{|h|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|h|}{2}\right)^3 + \dots\right) \\ &= \frac{|h|}{2}\frac{1}{1 - \frac{|h|}{2}} = \frac{|h|}{2 - |h|} \xrightarrow{h\to 0} 0. \end{aligned}$$

Ainsi $(e^x)' = e^x$.

4. Soit $f(x) = \sin x$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cdot \sin(\frac{x+h-x}{2}) \cdot \cos(\frac{x+h+x}{2}) \\ &= \lim_{h\to 0} 2 \cdot \frac{\sin(h/2)}{h} \cdot \cos(\frac{2x+h}{2}) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \lim_{h\to 0} \cos(\frac{2x+h}{2}) \\ &= 1 \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

4.1.3 Régles de calculs

Soient f, g dérivables sur I. Alors

(I) $\boxed{(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'}$ La dérivée est une opération linéaire.

(II) $\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$

DÉM :

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Corollaire :

$$\begin{aligned}&(f^2)' = f'f + ff' = 2ff' \\ &(f^3)' = (f^2 f)' = (f^2)'f + f^2 f' = 2ff'f + f^2 f' = 3f^2 f'\end{aligned}$$

Par récurrence :

$$\boxed{(f^n)' = nf^{n-1} \cdot f'}$$

(III)

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.}$$

DÉM : En dérivant l'égalité $f \cdot \frac{1}{f} \equiv 1$ à l'aide du point (II), on obtient

$$f' \cdot \frac{1}{f} + f \cdot \left(\frac{1}{f}\right)' = 0$$

ce qui donne $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Corollaire 1 :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.}$$

Corollaire 2 :

$$\boxed{(f^{-n})' = -nf^{-n-1} \cdot f'}$$

(IV) **Fonction composée :** soit $\phi(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Alors

$$\boxed{\phi'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&\text{On pose } u = f(x_0+h) - f(x_0) \text{ avec } u \to 0 \text{ si } h \to 0. \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{g\big(u + f(x_0)\big) - g(f(x_0))}{u} \cdot f'(x_0) \\
&= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

□

Quelques propriétés qui en découlent

1. Soit $\phi(x) = g(ax)$. Alors $\phi'(x) = g'(ax) \cdot (ax)' = a \cdot g'(ax)$.
   Corollaire : Si $f(x)$ est paire (resp. impaire) alors $f'(x)$ est impaire (resp. paire). En effet, si on dérive l'égalité $f(-x) = f(x)$, on obtient $f'(-x) \cdot (-1) = f'(x)$ et donc $f'(-x) = -f(x)$.
2. Soit $\phi(x) = g(x+T)$. Alors $\phi'(x) = g'(x+T) \cdot (x+T)' = g'(x+T)$.
   Corollaire : Si $f(x)$ est périodique alors $f'(x)$ l'est aussi.

4.1.4 Dérivées des fonctions élémentaires

A) Fonctions polynomiales :
$f(x) = x^n \xrightarrow{(II)} f'(x) = nx^{n-1}$.
Si $f(x) = P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors par (I), on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

B) Fonctions rationnelles et irrationnelles
Si $f(x) = x^{-n}$ alors par (III) on a $f'(x) = -nx^{-n-1}$.
Si $f(x) = x^{m/n}$ alors

$$\begin{aligned}
f(x)^n &= x^m \qquad \Big| \ \frac{d}{dx} \\
n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x) &= mx^{m-1} \\
f'(x) &= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{f(x)^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{\left(x^{m/n}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n} x^{m/n-1}.
\end{aligned}$$

En conclusion : $$\boxed{\frac{d}{dx}x^q = qx^{q-1} \qquad \forall q \in \mathbb{Q}.}$$

Et par (IV), on a $$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x))^q = q \cdot (f(x))^{q-1} \cdot f'(x)}$$

Exemple : $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + \sqrt{x}} = (x^4 + \sqrt{x})^{1/3} = \left(x^4 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}(x^4 + \sqrt{x})^{1/3-1} \cdot \left(x^4 + x^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{3}(x^4 + \sqrt{x})^{-2/3} \cdot (4x^3 + \frac{1}{2}x^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{(x^4 + \sqrt{x})^2}}. \end{aligned}$$

C) Fonctions trigonométriques :
- On a démontré que $(\sin x)' = \cos x$.
- $f(x) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Alors

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

- $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Alors

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$$

D) Fonction exponentielle : Comme $(e^x)' = e^x$ et par (IV) on a

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x).}$$

Maintenant, si $f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln a}$, alors

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Ainsi

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$$

E) Fonctions hyperboliques

- Soit $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Alors par (I) et D), on a

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x.$$

- Soit $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ Alors

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - (-1)e^{-x}\right) = \cosh x.$$

4.1.5 Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f(x)$ une fonction bijective et $f^{-1}(y)$ sa fonction réciproque. On désire calculer $(f^{-1})'(y)$ connaissant $f'(x)$.
On suppose $f'(x) \neq 0$. Par définition de f^{-1}, on a

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

et en dérivant par rapport à y et en utilisant (IV), on trouve $f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ ce qui donne

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.}$$

En notant $x = f^{-1}(y)$, on obtient $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Exemples :

(1) Fonctions logarithmes :
Appliquons la formule à $f(x) = e^x$ et $f^{-1}(y) = \ln y$. Comme $f'(x) = e^x$, on obtient

$$(\ln y)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Corollaire : $\boxed{(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}.}$

(2) Fonctions trigonométriques inverses :
- Soit $f(x) = \sin x$ et $f^{-1}(y) = \arcsin y$. Comme $f'(x) = \cos x$, on a

$$\boxed{(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.}$$

• Soit $f(x) = \cos x$ et $f^{-1}(y) = \arccos y$. Comme $f'(x) = -\sin x$, on a

$$\boxed{(\arccos y)' = \frac{1}{-\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

• Comme $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$, on a

$$\boxed{(\arctan y)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}}$$

(3) Fonctions hyperboliques inverses :
• Comme $(\sinh x)' = \cosh x$, on a

$$(\text{arcsinh } y)' = \frac{1}{\cosh(\text{arcsinh } y)} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

On a utilisé ici le fait que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ et donc que $\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u}$.
• De même on montre que

$$\boxed{(\text{arccosh } y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \qquad y > 1}$$

4.1.6 Quelques exemples

1. Quelle est la dérivée de $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition : $\boxed{x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.}$

Cohérent avec la définition précédente si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
Alors

$$\begin{aligned} f'(x) = (e^{\alpha \ln x})' &= e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' \\ &= e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\ &= \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.}$$

2. Comment dériver la fonction

$$f(x) = u(x)^{v(x)} \quad ?$$

D'abord, comment est définie $f(x)$? On pose

$$f(x) := e^{v(x)\ln(u(x))}$$

et $D_f = \{x \mid u(x) > 0\}$.

Notons que $u(x)^{v(x)}$ n'a de sens que si $u(x) > 0$. La dérivée vaut alors

$$\begin{aligned} f' = (u^v)' &= e^{v\ln(u)} \cdot \left(\frac{u'}{u} \cdot v + v' \ln u\right) \\ &= u^v \cdot \left(\frac{u'v}{u} + v' \ln u\right). \end{aligned}$$

Exemple : Calculons l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^{\sin x}$ au point $P(\pi; 1)$.
On a $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

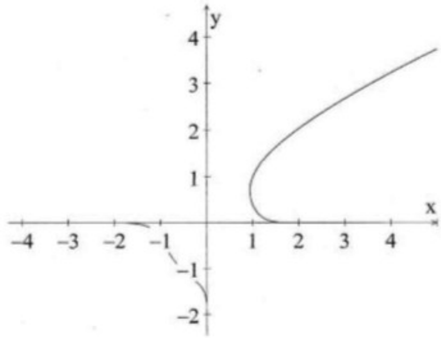
$$f'(x) = x^{\sin x}\left(\frac{1 \cdot \sin x}{x} + \cos x \ln x\right).$$

En $P(\pi; 1)$ on obtient $f'(\pi) = -\ln \pi$. L'équation de la tangente est donc

$$y = -\ln \pi \cdot (x - \pi) + 1 = -(\ln \pi)\, x + 1 + \pi \ln \pi.$$

4.2 Dérivée des fonctions implicites

Courbe : $(\gamma)\ :\ 2x^2 - y^3 + \ln(xy) - 1 = 0 \qquad (*)$



Autour d'un point P fixé, cette relation définit une fonction $y = y(x)$ (pas nécessairement analytique) et l'équation (*) s'écrit

$$\begin{aligned} 2x^2 - y(x)^3 + \ln(xy(x)) - 1 &= 0 \qquad \Big|\frac{d}{dx} \\ 4x - 3y(x)^2 y'(x) + \frac{1 \cdot y(x) + xy'(x)}{xy(x)} &= 0 \end{aligned}$$

Au point $P(1; 1)$ on obtient

$$4 - 3y'(1) + \frac{1 + y'(1)}{1} = 0$$

ce qui donne $2y'(1) = 5$ d'où $y'(1) = \dfrac{5}{2}$.
Ainsi, sans trouver explicitement la fonction $y = y(x)$ on a pu calculer sa dérivée en un point donné.
Ce procédé s'applique naturellement à toute relation de la forme

$$F(x, y) = 0.$$

Exemple : Calculons les pentes des tangentes au graphe de l'ellipse

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On dérive cette relation par rapport à x pour obtenir

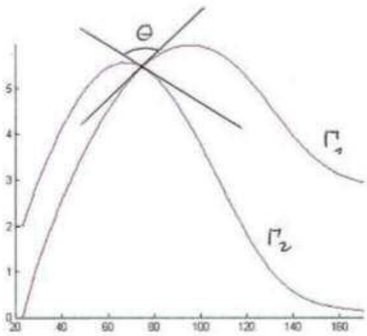
$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

ce qui donne

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} = \text{ pente de la tangente au point } P(x, y) \in \Gamma$$

Angle entre deux courbes

Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes s'intersectant en un point P. On définit l'angle entre 2 courbes au point P comme l'angle entre leurs tangentes au point P.



On a $|\theta| = |\theta_2 - \theta_1|$. Si y_1' est la pente de la tangente à Γ_1 en P et y_2' la pente de la tangente à Γ_2 en P, alors
$\tan\theta_1 = y_1'$ et $\tan\theta_2 = y_2'$. On a donc

$$|\tan\theta| = |\tan(\theta_2 - \theta_1)| = \left|\frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}\right| = \left|\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1'y_2'}\right|.$$

Donc

$$\boxed{|\tan\theta| = \left|\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1'y_2'}\right|}$$

Exemple : Calculons l'angle entre les courbes

$$\Gamma_1 : y = f(x) = x^2$$

et

$$\Gamma_2 : y = g(x) = \sqrt[3]{x}$$

au point $P(1;1)$.
$\Gamma_1 :\quad f'(x) = 2x$ et donc au point $P : y_1' = 2$
$\Gamma_2 :\quad g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ et donc au point $P : y_2' = \frac{1}{3}$. On obtient

$$\tan\theta = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

ce qui donne $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4.2.1 Représentation paramétrique

Courbe Γ :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

On veut trouver la pente de la tangente au graphe en un point donné.
On introduit la notation :

$$\boxed{\dot{} = \frac{d}{dt}}$$

Ceci donne $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ et $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}(t)$.
Donc $dx = \dot{x}(t) \cdot dt$ et $dy = \dot{y}(t) \cdot dt$. Alors

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.}$$

Exemple :

$$\begin{cases} x = t \sin t & \Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = \sin t + t \cos t \\ y = t^2 + \cos t & \Longrightarrow \quad \dot{y}(t) = 2t - \sin t \end{cases}$$

Et donc

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t - \sin t}{\sin t + t \cos t}.$$

Au point $P(0\,;1)$ $(t = 0)$, on obtient

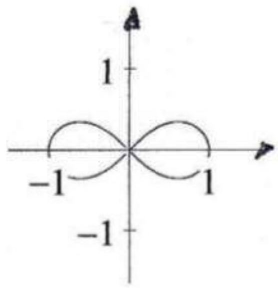
$$y'|_P = \frac{2t - \sin t}{\sin t + t \cos t}\Big|_{t=0} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \frac{2 - \frac{\sin t}{t}}{\frac{\sin t}{t} + \cos t} \xrightarrow{t \to 0} \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Représentation polaire

Si la courbe est donnée sous forme polaire $\rho = \rho(\varphi)$. Alors

$$\boxed{y'|_P = \frac{\dot{\rho}(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi}{\dot{\rho}(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi}\Big|_P} \qquad (*)$$

Exemple : $\rho = \sqrt{\cos(2\varphi)}$.



On veut trouver la tangente horizontale dans le quadrant I ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$).
On cherche donc le point P tel que $y'|_P = 0$. En utilisant (*), on obtient l'équation

$$\dot{\rho}(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi = 0. \qquad (**)$$

En dérivant la fonction donnée $\rho(\varphi) = \sqrt{\cos(2\varphi)}$ par rapport à φ, on trouve

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(\varphi) &= \frac{1}{2}\cos(2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin(2\varphi)\cdot 2)\\ &= -\frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}\end{aligned}$$

et donc l'équation (**) devient (après simplifications)

$$-\sin 2\varphi \sin\varphi + \cos 2\varphi \cos\varphi = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(3\varphi) = 0.$$

Donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

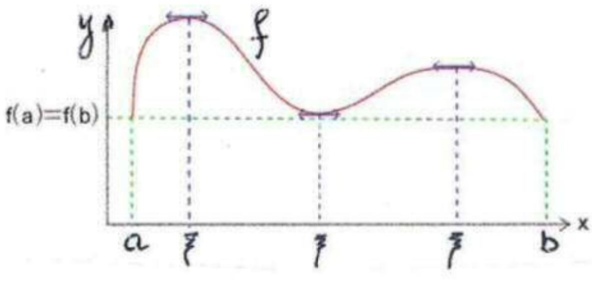
4.3 Théorème de la moyenne

4.3.1 Quelques théorèmes

Définition 4.5 (Fonction C^1). Une fonction $f(x)$ est dite **continûment dérivable sur** $I \subset D_f$ si $f'(x)$ existe et est continue sur tout I.
On note $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I.
En bref : $f(x) \in C^1(I) \Longleftrightarrow f'(x) \in C^0(I)$.

Théorème 4.6 (Théorème de Rolle). *Soit $f(x)$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ avec $f(a) = f(b) = c$ alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*

$$f'(\xi) = 0.$$



Démonstration :
Si $f(x) \equiv c$ alors $f'(x) = 0$ et le théorème est trivial.
Considérons la fonction $g(x) = f(x) - c$. Alors $g(a) = g(b) = 0$. On peut supposer que a et b sont des zéros consécutifs et admettre que $g(x) > 0$ sur $]a;b[$.
Soit ξ le point où $g(x)$ atteint son maximum. Pour $h > 0$, on a

$$g(\xi + h) < g(\xi)$$

et alors

$$\frac{1}{h}\cdot(g(\xi+h) - g(\xi)) < 0 \qquad (*)$$

Pour $h < 0$, on a

$$g(\xi + h) < g(\xi)$$

et donc

$$\frac{1}{h}\cdot(g(\xi+h) - g(\xi)) > 0 \qquad (**)$$

Comme g est dérivable, on a

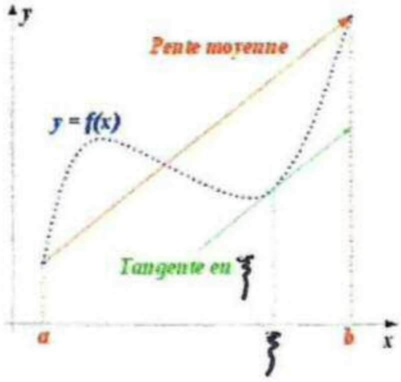
$$g'(\xi) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \cdot (g(\xi + h) - g(\xi)) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h} \cdot (g(\xi + h) - g(\xi)).$$

Cette limite ne peut être que 0 vu (*) et (**). Donc $g'(\xi) = 0$.

□

Théorème 4.7 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit $f(x)$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe un $\xi \in]a;b[$ tel que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Démonstration : On considère la fonction

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

qui satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle. Alors il existe $\xi \in]a;b[$ avec $g'(\xi) = 0$, i.e.

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1 = 0$$

ce qui donne la conclusion cherchée.

□

Corollaire 4.8. *Si $f'(x) \equiv 0$ pour tout $x \in I$ alors f est constante sur I.*

Démonstration : En effet si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver $]a;c[\subset I$ avec $f(a) \neq f(c)$. Mais alors il existerait $\xi \in]a;c[$ avec

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \neq 0$$

ce qui contredit l'hypothèse. □

Corollaire 4.9. *Si $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$, alors $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in I$.*

Corollaire 4.10. *Soit $f(x)$ continue sur $I = [a;b]$ et dérivable en tout point $x \neq x_0$. Supposons que $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Alors f est dérivable en x_0 et*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

(i.e. f' est continue en x_0).
Autrement dit, les seuls types de discontinuité (cf. §3.7) pour la dérivée d'une fonction continue sont les types II et III. Le type I ne peut pas se produire pour f'.

DÉMONSTRATION : On a par le théorème de la moyenne appliqué aux points x_0 et $x_0 + h$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(\xi) \qquad \text{pour un } \xi \in]x_0; x_0+h[$$

ce qui donne en passant à la limite quand $h \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\xi \to x_0} f'(\xi)$$

□

Théorème 4.11 (Théorème de Cauchy). *Soient f, g deux fonctions dérivables sur $[a; b]$, avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors il existe $\xi \in I$ avec*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

DÉMONSTRATION :
On considère la fonction

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a))$$

qui satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle ($h(a) = h(b) = f(a)$). Il existe donc ξ avec $h'(\xi) = 0$. Mais comme

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$$

on en déduit que

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

□

4.3.2 La règle de Bernoulli-l'Hospital

Théorème 4.12 (Règle de Bernoulli- l'Hospital). *Soient f, g deux fonctions dérivables sur $I =]a; b[$ telles que pour tout $x \in I$ on ait $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$.*
Supposons que

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \alpha$ *avec* $\alpha = 0$ *ou* $\pm\infty$;
- $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu$ *avec* $\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Alors

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

Remarque 4.13. La règle reste valable si l'on remplace a^+ par b^-, par a ou par $\pm\infty$.

DÉMONSTRATION :

(I) $\alpha = 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Posons $b = a + h$. Alors le théorème de Cauchy implique qu'il existe $\xi = a + \theta h$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et

$$\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)}.$$

Comme $f(a) = g(a) = 0$, on a

$$\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)}.$$

Si $b \longrightarrow a$, alors $h \longrightarrow 0$, $\theta h \longrightarrow 0$ et $\xi \longrightarrow a$. On a donc

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} \\ \Longrightarrow \quad & \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{b\to a} \frac{f(b)}{g(b)} \\ \Longrightarrow \quad & \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

□

(II) $\alpha = +\infty$ et $\mu \neq 0$. On a, par hypothèse, que $\frac{1}{f}, \frac{1}{g} \xrightarrow{x\to a^+} 0$.

Posons $L = \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)}$. Alors

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{1/f(x)}{1/g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{(1/f(x))'}{(1/g(x))'} = \lim_{x\to a^+} \frac{-1/f(x)^2 \cdot f'(x)}{-1/g(x)^2 \cdot g'(x)} \\ &= \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)^2}{f(x)^2} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left(\lim_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)}\right)^2 \cdot \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L^2 \cdot \mu. \end{aligned}$$

En divisant par L^2, on obtient $\frac{1}{L} = \mu$ d'où l'on en déduit que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{L} = \mu.$$

□

Exemples 4.14.

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

2. $f(x) = x \ln x$. Que vaut $\lim_{x\to 0} f(x)$? On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x \ln x &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} \qquad \left(= \frac{-\infty}{\infty}\right) \\ &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\ln x = 0}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} &\qquad \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} \qquad \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$.

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{1}=1.$$

5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x^3\ln x)} &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\dfrac{1}{x^3\ln x}\cdot(\dfrac{x^3}{x}+3x^2\ln x)}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln x}{x^2+3x^2\ln x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+3\ln x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1/\ln x+3}=\frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

Expressions indéterminées de la forme ∞^0, 1^∞, 0^0

Considérons la fonction $\phi(x)=u(x)^{v(x)}$ et supposons que

$$\lim \phi(x)$$

soit de la forme indéterminée 0^0 ou 1^∞ ou ∞^0. On lève l'indétermination en procédant comme suit :

1. On applique le logarithme :

$$\ln\phi(x)=\ln\left[u(x)^{v(x)}\right]=v(x)\cdot\ln[u(x)]\,.$$

2. L'expression

$$\lim\ \ln\phi(x)=\lim\ v(x)\cdot\ln[u(x)]$$

est maintenant de la forme $0\cdot(\pm\infty)$ que l'on transforme en une expression de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. On applique alors la règle de l'Hospital pour calculer $\lim\ln\phi(x)=L$.

3. On applique l'exponentielle :

$$\lim\phi(x)=e^L.$$

Exemples 4.15.

1. ∞^0 : soit $\phi(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Calculons $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$. On a
$$\ln\phi(x) = \frac{1}{x}\cdot\ln x = \frac{\ln x}{x}$$
et la limite vaut
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0.$$
Ainsi $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln\phi(x)) = 0$ ce qui donne (en appliquant e^x)
$$\lim_{x\to\infty}\phi(x) = e^0 = 1.$$

2. 1^∞ : soit $\phi(x) = x^{\frac{1}{1-x^4}}$. Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\phi(x)$. On a
$$\ln\phi(x) = \frac{1}{1-x^4}\ln x = \frac{\ln x}{1-x^4}$$
et le passage à la limite donne
$$\lim_{x\to 1}[\ln\phi(x)] = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^4} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-4x^3} = -\frac{1}{4}.$$
Finalement on a donc
$$\lim_{x\to 1}\phi(x) = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

3. 1^∞ : Calculer la limite
$$\lim_{x\to 0^+}\underbrace{(1+x^2)^{1/x}}_{=\phi(x)}.$$
On a
$$\ln\phi(x) = \frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$
et
$$\lim_{x\to 0^+}\ln\phi(x) \quad \left(=\frac{0}{0}\right) \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2x/(1+x^2)}{1} = 0.$$
On en déduit que $\lim\phi(x) = e^0 = 1$.

4. 0^0 : calculons
$$\lim_{x\to 0}\underbrace{(\sin x)^x}_{=\phi(x)} \qquad \left(=0^0\right).$$
On a $\ln\phi(x) = x\cdot\ln\sin x = \dfrac{\ln\sin x}{1/x}$. Par l'Hospital, on a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln\phi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1/x} &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{x^2\cos x}{\sin x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{1} = -1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$
En reprenant l'exponentielle, on obtient
$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1.$$

4.3.3 Comparaison des croissances des fonctions $(\ln x)^\alpha$, x^β et $e^{\gamma x}$

Théorème 4.16. *Pour tout $\beta > 0$, on a*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0.}$$

La fonction $\ln(x)$ croît moins vite que toute puissance positive de x.

DÉMONSTRATION :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\beta x^\beta} = 0.$$

□

Corollaire 4.17.

$$\forall \alpha, \beta > 0, \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0.}$$

DÉMONSTRATION :
Le théorème précédent implique qu'il existe $X_1 \in \mathbb{R}$ avec $\ln x < x^{\frac{\beta}{2\alpha}}$ pour tout $x > X_1$. Alors

$$0 < \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} < \frac{x^{\frac{\beta}{2}}}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\frac{\beta}{2}}} \xrightarrow{x\to\infty} 0.$$

□

Corollaire 4.18. $\forall \alpha > 0$, $\forall a > 1$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0}$$

La fonction a^x $(a > 1)$ croît plus vite que toute puissance de x.

DÉMONSTRATION :
On pose $\beta = \ln a > 0$ car $a > 1$ et $x = \ln t$ en notant que $x \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty$. Alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} &= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{e^{\beta \ln t}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta} = 0 \quad \text{(par le corollaire précédent.)}\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.19. *Pour tout polynôme $P(x)$ et tout $p > 0$, on a*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} P(x)e^{-px} = 0}$$

Corollaire 4.20.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^n = 0.}$$

DÉMONSTRATION :
On pose $x = e^{-t}$. Alors $t \to \infty$ lorsque $x \to 0^+$. Donc

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (\ln x)^n = \lim_{t \to \infty} e^{-t\alpha}(-t)^n = (-1)^n \frac{t^n}{e^{t\alpha}} = 0.$$

□

4.4 Dérivées d'ordres supérieurs

Si $f'(x)$ est elle-même dérivable on note

$$f''(x) = (f'(x))'$$

et ainsi de suite $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$.

L'opérateur différentiel se note $\frac{d^2}{dx^2}$ au lieu de $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx})$.

Exemple : si $f(x) = \sin(x)$ alors

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f^{(3)}(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

Définition 4.21. Si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I on note

$$f \in C^n(I)$$

et l'on dit que f est *n-fois continûment dérivable.*
On définit

$$C^\infty(I) = \bigcup_n C^n(I).$$

C'est l'ensemble des fonctions dont **toutes** les dérivées sont continues.

Exemple : $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$

- Si $f \in C^n(I)$ et $g \in C^n(I)$ alors $f + g \in C^n(I)$ et

$$\boxed{(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.}$$

Formule de Leibniz

- Si $f, g \in C^n(I)$ alors $f \cdot g \in C^n(I)$ et on a

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}}$$

où $f^{(0)} = f$. La démonstration, qui se fait par récurrence, est analogue à celle pour la formule du binôme.
En particulier :

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$
$$(fg)^{(3)} = f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}$$

4.5 Etude de fonction

4.5.1 Croissance et extremum

Dans toute cette section, $f(x)$ désignera une fonction continue sur son ensemble de définition.

Théorème 4.22. *Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors*

$$f \text{ est croissante} \iff f' \geqslant 0 \text{ sur }]a; b[$$

De plus, si $f' > 0$, alors f est strictement croissante.

DÉMONSTRATION :
C'est une conséquence du théorème de la moyenne. Soient $c < d \in I$ alors

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(\xi) \qquad \text{avec } \xi \in [c; d].$$

Donc

$$f'(\xi) \geqslant 0 \iff f(d) \geqslant f(c).$$

De plus, si $f'(\xi) > 0$ alors $f(d) > f(c)$. □

Définition 4.23.

- $x_0 \in D_f$ est un **maximum absolu** de f si $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in D_f$.
- $x_0 \in D_f$ est un **maximum relatif (ou local)** s'il existe un voisinage

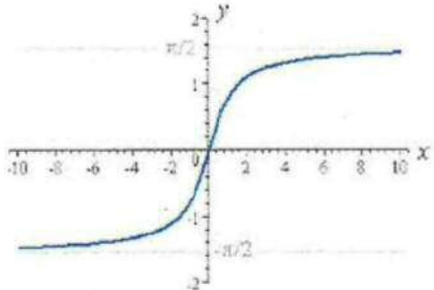
$$v_\epsilon(x_0) =]x_0 - \epsilon\,;\, x_0 + \epsilon[$$

de x_0 tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in v_\epsilon(x_0)$.

Définitions analogues pour le minimum.

On dira **extremum** pour maximum ou minimum.

ATTENTION : Un extremum absolu n'existe pas toujours sur $\mathbb{R}$. Exemple : $f(x) = \arctan x$.



Théorème 4.24. *Si x_0 est un extremum de $f(x)$ sur $I = [a; b]$, alors*

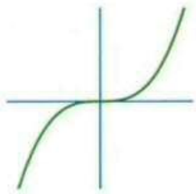
(i) soit $x_0 = a$ ou $x_0 = b$

(ii) ou $f'(x_0) = 0$

(iii) ou $f'(x_0)$ n'existe pas.

Définition 4.25. Un point x_0 tel que $f'(x_0) = 0$ est appelé un **point stationnaire**.

Un point stationnaire n'est pas nécessairement un extremum.
Exemple : $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(0) = 0$. Mais $x_0 = 0$ n'est pas un extremum mais un **plat**.



La condition nécessaire et suffisante pour avoir un extremum en x_0 est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.26. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable dans un voisinage de x_0 mais pas nécessairement en x_0. Alors*

$$x_0 \text{ est un extremum} \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) \text{ change de signe en } x_0.$$

Plus précisément si

(i) $f'(x) < 0$ (respextivement > 0) sur $]x_0 - \delta\,;\, x_0[$ et si

(ii) $f'(x) > 0$ (respectivement < 0) sur $]x_0\,;\, x_0 + \delta[$

alors x_0 est un minimum local (respectivement un maximum local).

Démonstration : C'est une conséquence du théorème 4.22. □

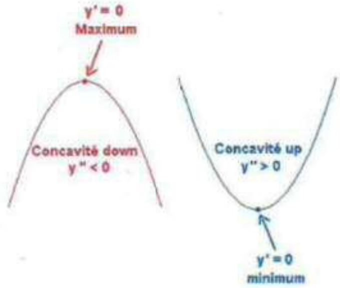
Un cas particulier de ce théorème est le suivant :

Proposition 4.27. *Soit f une fonction continue et x_0 un point stationnaire ($f'(x_0) = 0$).*

(1) Si $f''(x) > 0$ dans un voisinage de x_0, alors x_0 est un minimum local .

(2) Si $f''(x) < 0$ dans un voisinage de x_0 alors x_0 est un maximum local.

(3) Si $f''(x)$ change de signe en x_0 alors x_0 est un plat.



Démonstration :
(i) Le théorème de la moyenne appliqué à la fonction $f'(x)$ et à l'intervalle $]x_0\,;\, x_0 + h[$ donne

$$\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(\xi)$$

avec ξ entre x_0 et $x_0 + h$ donc $\xi = x_0 + \theta h$ où $0 < \theta < 1$. Ceci donne

$$f'(x_0 + h) = \underbrace{f'(x_0)}_{=0} + h \cdot \underbrace{f''(x_0 + \theta h)}_{>0} = \begin{cases} > 0 & \text{si } h > 0 \\ < 0 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Ainsi $f'(x)$ change bien de signe en x_0 et x_0 est un minimum local.
(ii) idem $\square$

Exemple 4.28. $f(x) = 2x^2 + 10$

$$f'(x) = 4x \qquad f''(x) = 4 \qquad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 4 > 0.$$

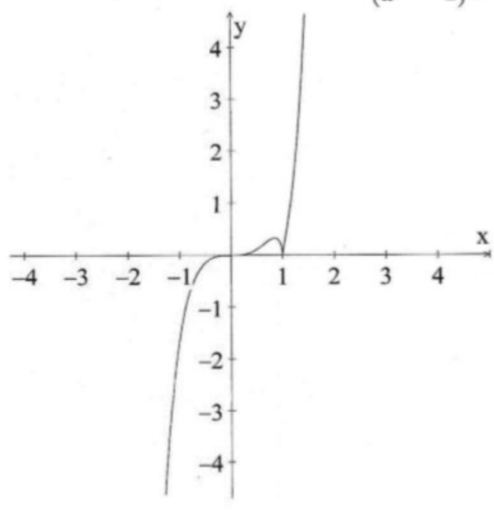
Le point $x = 0$ est donc un minimum.

ATTENTION :

$$\begin{array}{rcl} f'(x_0) = 0 & \not\Longrightarrow & x_0 \text{ est un extremum} \\ x_0 \text{ est un extremum} & \not\Longrightarrow & f'(x_0) = 0 \end{array}$$

Exemple 4.29. $f(x) = x^3(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$.

$$f'(x) = 3x^2(x^3-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^3(x^3-1)^{-\frac{1}{3}}3x^2 = \frac{x^2}{(x^3-1)^{\frac{1}{3}}}(5x^3-3).$$



En $x = 1$: $f'(x)$ n'existe pas mais f' change de signe $\longrightarrow$ extremum.
En $x = 0$: $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe $\longrightarrow$ pas d'extremum mais un plat.
En $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, on a $f' = 0$ et change de signe. $\longrightarrow$ extremum.

4.5.2 Courbure et point d'inflexion

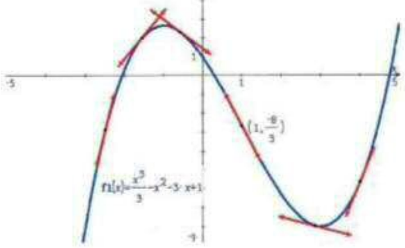
Définition 4.30. Soit $f \in C^2(I)$. f est dite **convexe** sur I si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire si $f'(x)$ est croissante sur I.

f est dite **concave** sur I si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire si $f'(x)$ est décroissante sur I.

Autre caractérisation

1) Le graphe d'une fonction convexe (resp. concave) est toujours situé au dessous (resp. au-dessus) de la corde PQ où P et Q sont deux points du graphe.

2) Le graphe d'une fonction convexe (resp. concave) est toujours situé au dessus (resp. au-dessous) de ses tangentes.

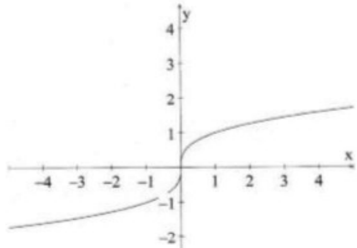


Définition 4.31 (Point d'inflexion). Soit f une fonction. Alors $x_0 \in D_f$ est un point d'inflexion de f si $f''(x)$ change de signe en x_0.

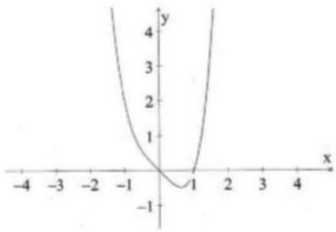
ATTENTION : Comme pour les extremums, il ne suffit pas que $f''(x_0) = 0$.

Propriété géométrique : en un point d'inflexion, le graphe **passe de l'autre côté de la tangente** en ce point.

Exemple 1 : $f(x) = \sqrt[3]{x}$. $\quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$.
f'' change de signe en $x = 0$ bien que $f'(0)$ n'existe pas en ce point (la tangente est verticale). On a donc un point d'inflexion.



Exemple 2 : $f(x) = x^4 - x$. $\quad f'(x) = 4x^3 - 1 \quad f''(x) = 12x^2$.
On a $f''(0) = 0$ mais f'' ne change pas de signe. Pas de point d'inflexion en 0.



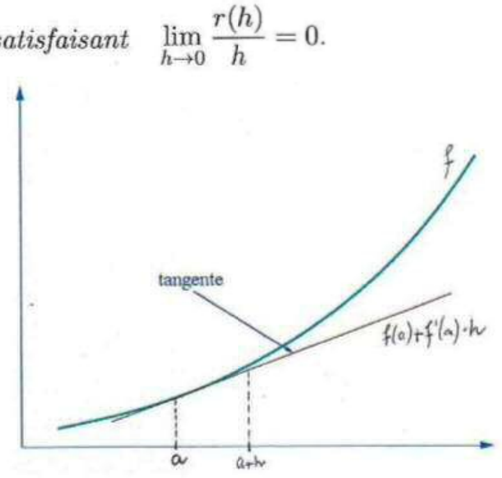
4.6 Développement limité et série de Taylor

4.6.1 Définitions

Lemme 4.32 (Approximation linéaire). *Pour $a \in D_f$ fixé, on a*

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)} \qquad (*)$$

où $r(h)$ est une fonction satisfaisant $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$



DÉMONSTRATION : Posons $r(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a)$. Alors

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

et on a bien $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = f'(a) - f'(a) = 0.$ □

En posant $x = a + h$, l'équation (*) devient

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + R_1(x)}$$

avec $\lim_{x\to a} \frac{R_1(x)}{x-a} = 0.$

On va généraliser ce résultat en approximant une fonction par un polynôme de degré n :

Théorème 4.33 (Approximation d'ordre n).
Soit $f(x) \in C^n(I)$ et $a \in I$ un point intérieur de I. Alors

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{= T_n^f(x)} \quad + \quad R_n(x)$$

avec $\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$

De plus, si $f \in C^{n+1}(I)$, alors $\quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *avec ξ entre a et x.*

DÉMONSTRATION :

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{et donc}$$

$$R_n'(x) = f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$R_n''(x) = f''(x) - f''(a) - f^{(3)}(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

ce qui donne

$$R_n'(a) = R_n''(a) = \cdots = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}$, on applique n fois la règle de Bernoulli-L'Hospital :

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to a} \frac{R_n'(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}} \overset{\text{B.-H.}}{=} \dots \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n\,!} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{n\,!} = 0.$$

Ceci démontre la première partie du théorème.

Si $f \in C^{n+1}(I)$, on pose $h(x) = (x-a)^{n+1}$ et on applique le théorème de Cauchy $n+1$ fois. Ceci donne (en remarquant que $h(a) = h'(a) = h''(a) = \cdots h^{(n)}(a) = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{h(x)} &= \frac{R_n(x) - R_n(a)}{h(x) - h(a)} \overset{Cauchy}{=} \frac{R_n'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{R_n'(x) - R_n'(a)}{h'(x) - h'(a)} \overset{Cauchy}{=} \frac{R_n''(\xi_2)}{h''(\xi_2)} \\ &= \cdots = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{h^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} \qquad \xi \in]a;x[\end{aligned}$$

Ceci donne finalement

$$R_n(x) = h(x)\cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}\cdot (x-a)^{n+1}.$$

□

Définition 4.34. Le polynôme

$$T_n^f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n$$

est appelé le **développement limité d'ordre** n **de** $f(x)$ **au point** a ou aussi le **polynôme de Taylor de degré** n.
La fonction $R_n(x)$ est le **reste d'ordre** n.

Si $a = 0$ on obtient le développement autour du point 0 :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\cdot x^n \quad + \quad R_n(x)}$$

avec $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}\, x^{n+1}$ et $0 < \theta < 1$.

Exemple 4.35.
$f(x) = \cos x$, $a = 0$, $n = 3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + R_3(x) \\ &= 1 + 0\cdot x - \frac{1}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + R_3(x) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2}_{=T_3(x)} + R_3(x)\end{aligned}$$

Série de Taylor

Si $f \in C^\infty(I)$ et si $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ pour tout $x \in I$, on obtient la série de Taylor en a qui converge vers $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k}$$

Notation de Landau

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions s'annulant en a. On dit que

$$f = o(g) \qquad \text{en } x = a \qquad\qquad \text{si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemples :

- $52x^3 = o(x^2)$ (en $a = 0$) car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{52x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} 52x = 0$.
- $1 - \cos x = o(x)$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ (cf. formulaire et tables)

Avec cette notation, on a

$$\boxed{R_n(x) = o(x^n)}$$

pour le développement limité autour de $a = 0$.

Propriétés :
A) Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.

B) Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

C) Si $f = o(g)$ et $h = o(g)$ alors $f \pm h = o(g)$.

ATTENTION :
$o(g) - o(g) \neq 0$.
Exemple : $4x^3 = o(x^2)$ et $x^3 = o(x^2)$ mais $4x^3 - x^3 = 3x^3 = o(x^2)$.

4.6.2 Exemples

1. Soit $f(x) = e^x$ et $a = 0$.
   Comme $f'(x) = e^x = f^{(k)}(x)$ pour tout $k \geqslant 1$, le développement limité d'ordre n est donné par

$$\begin{aligned} e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n + R_n(x) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n\,!}x^n + R_n(x) \end{aligned}$$

   avec $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}x^{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}e^{\theta x}$.

$R_n(x)$ converge vers 0 pour tout x lorsque $n \to \infty$ (cf. chapitre 2). Donc la série de Taylor converge vers f et on a

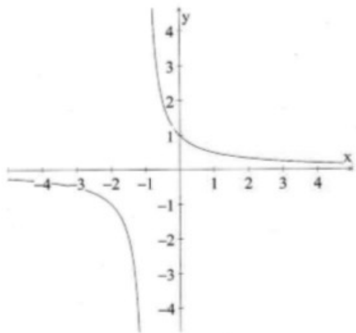
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\,!}\, x^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Développement limité d'ordre 1 :
on a $e^x = 1 + x + o(x)$. Ceci donne $e^x - 1 = x + o(x)$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{o(x)}{x} = 1$$

par définition de $o(x)$. Ainsi autour de $x = 0$, on a $e^x - 1 \approx x$.

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $a = 0$.



On a $f(0) = 1$ et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} &&\Longrightarrow && f'(0) = -1\\
f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} &&\Longrightarrow && f''(0) = 2\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n\,!}{(1+x)^n} &&\Longrightarrow && f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n\,!
\end{aligned}$$

Le développement limité d'ordre n autour de $a = 0$ est alors

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} \cdot \xi^{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\xi^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

ce qui donne la série de Taylor

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \qquad \forall x \in]-1;1[$$

C'est une série géométrique (de raison $-x$) qui converge si et seulement si $|x| < 1$. Pour ces valeurs de x, on peut montrer que $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et donc la série de Taylor converge vers f.

3. $f(x) = \sin x$ et $a = 0$.
On obtient le développement limité suivant :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + o(x^7)$$

avec $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}x^{n+1}$ qui converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $|f^{(n+1)}(\theta x)| \leqslant 1$. On obtient donc la série de Taylor du sinus :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. On montre de même que

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + o(x^6)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

5. Soit $f(x) = \ln(1+x)$ et $a = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} & &\Longrightarrow & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & &\Longrightarrow & f''(0) &= -1\\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} & &\Longrightarrow & f^{(3)}(0) &= 2\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)\,!}{(1+x)^n} & &\Longrightarrow & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n+1}\cdot(n-1)\,!
\end{aligned}$$

On obtient la série de Taylor :

$$\begin{aligned}f(1+x) &= f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n + \ldots\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\end{aligned}$$

qui converge pour $-1 < x \leqslant 1$.
Si $x = 1$, on obtient

$$\boxed{\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ \ldots}$$

C'est la **série harmonique alternée**.

Dérivée d'une série de Taylor

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alors

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$

On peut dériver termes à termes.

Exemple 4.36. Considérons la série

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \ldots$$

On a alors

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \overset{\text{série géom.}}{=} \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in]-1;1[$$

Mais $\dfrac{1}{1+x^2}$ est la dérivée de $\arctan x$ donc $f(x) = \arctan x + C$. Comme $f(0) = 0 = \arctan(0)$, la constante C vaut 0. On a ainsi trouvé la série de Taylor de $\arctan x$:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad \forall x \in]-1;1]$$

Si l'on pose $x = 1$, on a

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ \ldots}$$

4.6.3 Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions admettant $T_n^f(x)$ et $T_n^g(x)$ comme développements limités d'ordre n autour de $a = 0$.
Alors

- $T_n^{f+g}(x) = T_n^f(x) + T_n^g(x)$
- $T_n^{fg}(x) = T_n^f(x) \cdot T_n^g(x)$ (en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$)
- Si $f(0) = 0$, alors $T_n^{g \circ f}(x) = T_n^g(T_n^f(x))$.
- Le développement limité de $\dfrac{f}{g}$ s'obtient en faisant la division du polynôme $T_n^f(x)$ par le polynôme $T_n^g(x)$ **en commençant par les termes de degrés les plus bas.**

Exemples 4.37.

1. Développement limité d'ordre 3 de $\sin(e^x - 1)$ en $a = 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad \Longrightarrow \qquad e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\
\sin(e^x - 1) &= [e^x - 1] - \frac{(e^x-1)^3}{3!} + o(x^3) \\
&= \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\right] - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right)^3 + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{6}\left(x^3 + 3\frac{x^4}{2} + o(x^3)\right) + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).
\end{aligned}$$

2. Développement d'ordre 3 de $\ln(1+\arctan x)$ en $a=0$:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Donc

$$\begin{aligned}\ln(1+\arctan x) &= \arctan x - \frac{\arctan^2 x}{2} + \frac{\arctan^3 x}{3} + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

3. Développement limité d'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{\cos x + x^2}{1 - \sin x}$ en $a=0$:

$$\cos x + x^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + x^2 = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
$$1 - \sin x = 1 - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

En posant f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + O(x^3), on a:

fF(x)(1 - sinx) = cos x + x^2 ---> (a + bx + cx^2 + dx^3 + O(x^3))(1 - x + x^3/3! + O(x^3)) = 1 + x^2/2 + O(x^3)

---> a - ax + ax^3/3! + bx - bx^2 + cx^2 - cx^3 + dx^3 + O(x^3) = 1 + x^2/2 + O(x^3)

---> a = 1, b - a = 0, c - b = 1/2, a/3! - c + d = 0

---> a = 1, b = 1, c = 3/2 et d = 4/3

Donc $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

4.6.4 Application : calcul de limite

Le développement limité permet de calculer des limites indéterminées.

Exemples :

1) Le développement limité d'ordre 3 du sinus est $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$. Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{o(x^3)}{x} = 1.$$

2) De même on a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-3\sin x}{x(1-\cos x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x-\frac{(3x)^3}{3!}-3(x-\frac{x^3}{3!})+o(x^3)}{x[1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))]}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^4)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4+o(x^3)/x^3}{\frac{1}{2}+o(x^4)/x^3}=-8.\end{aligned}$$

4.6.5 Application aux extremums

Soit $f(x)$ une fonction et a un point stationnaire. On peut utiliser le développement limité de $f(x)$ autour de a pour déterminer la nature de a et obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.38. *Soit $f(x) \in C^n(I)$ avec $n \geqslant 2$ telle que*

- $f'(a) = 0$
- $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $1 \leqslant k < n$ *et*
- $f^{(n)}(a) = C \neq 0$. *Alors*

1 si n est pair et $C > 0$, a est un minimum (local) ;

2 si n est pair et $C < 0$, a est un maximum (local) ;

3 si n est impair, a est un point d'inflexion et donc un plat.

Exemples :
A) Soit $f(x) = x - \sin x$. Alors le développement limité autour de $x = 0$ est

$$f(x) = x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) = \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

On a donc $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) = 1$. La première dérivée non nulle est la 3ème. On a donc un plat en $x = 0$ par le point 3 du théorème.
B) Soit $f(x) = \cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + \ldots$.
Alors $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = -\frac{1}{2} \cdot 4! = -12$. On a donc $n = 4$ et $C = -12 < 0$ ce qui montre que $x = 0$ est un maximum par le point 2 du théorème.

Remarque 4.39. Le développement limité de $f(x)$ d'ordre n permet de retrouver $f^{(k)}(a)$ pour tout $k \leqslant n$.

4.6.6 Formule d'Euler

On a $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
Si l'on pose $x = i\alpha$ on obtient

$$\begin{aligned}e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \frac{(i\alpha)^4}{4!} + \ldots\\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots\\ &\quad + i \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots\right)\\ &= \cos\alpha + i\sin\alpha.\end{aligned}$$

On a ainsi **démontré** la formule d'Euler :

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.}$$

On en déduit les 2 formules :

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}} \qquad \boxed{\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}$$

4.7 Résolution numérique d'équations : méthode de Newton

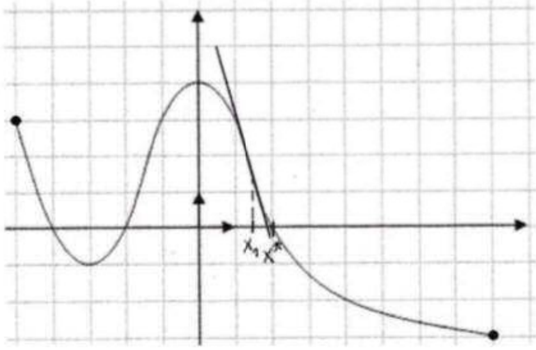
On cherche à résoudre l'équation

$$f(x) = 0$$

sur l'intervalle I, en supposant que $f \in C^2(I)$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Soit x^* la solution (que l'on cherche).

On choisit x_1 proche de x^* et on approxime la fonction f par sa tangente :



Equation de la tangente : $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$.

Intersection avec l'axe Ox :

$$0 = f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

ce qui donne

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

En répétant la construction, on trouve la relation récurrente :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (*)$$

On peut démontrer, que si x_1 est choisi proche de x^* alors la suite des x_n converge vers x^*.

Exemples 4.40.

(1) On cherche à résoudre l'équation $x = \cos x$.
On prend $f(x) = x - \cos x$. Alors $f'(x) = 1 + \sin x$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}.$$

Si l'on part avec $x_1 = \frac{1}{2}$ alors on obtient
$x_2 = 0.755222$ $\quad x_3 = 0.73914166$
$x_4 = 0.739085$ $\quad x_5 = 0.739085133$

(2) Cherchons à calculer $\sqrt[p]{c}$, $c \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}^*$.
On prend

$$f(x) = x^p - c \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = px^{p-1}$$

et l'équation (*) devient

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - c}{px_n^{p-1}} = (1 - \frac{1}{p})x_n + \frac{c}{p}\frac{1}{x_n^{p-1}}.$$

Si $c \in \mathbb{Q}_+$ et x_1 est choisi dans $\mathbb{Q}_+$, alors les x_n forment une suite rationnelle qui converge vers $\sqrt[p]{c}$.

Exemple : $p = 3$, $c = 2$. On veut approcher $\sqrt[3]{2}$. L'algorithme devient

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3x_n^2}.$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{4}{3} \quad x_3 = \frac{91}{72} \quad x_4 = \frac{1126819}{894348} \quad x_5 = 1.25992105002$

Pour x_5, l'erreur est de 10^{-10}.

Exemple :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

En partant de $x_0 = -1.905985711$, on trouve
$x_1 = 0.337561961$
$x_2 = -1.905985711$
$x_3 = 0.337561961$
$x_4 = -1.9059857105$
$x_5 = 0.337561948$