# Chapitre 4

# Relativité restreinte

*« Je n'ai aucun talent particulier. Je suis simplement curieux. » (Albert Einstein)*

## 4.1 Les postulats d'Einstein

En 1905, Albert Einstein (1879–1955) publie un article qui allait révolutionner le monde de la physique, intitulé « Zur Elektrodynamik bewegter Körper » (Einstein A. 1905 Annalen der Physik[1] 17 : 891–921). Il y expose une nouvelle théorie en remplaçant les conceptions de l'espace et du temps absolu de Newton par des conceptions relativistes sur ces grandeurs. Pour cela il se fonde sur deux hypothèses dont il étudie de façon théorique les conséquences logiques. Il pense que les résultats pourraient éventuellement être vérifiés ultérieurement par l'expérience.

### 4.1.1 Premier postulat

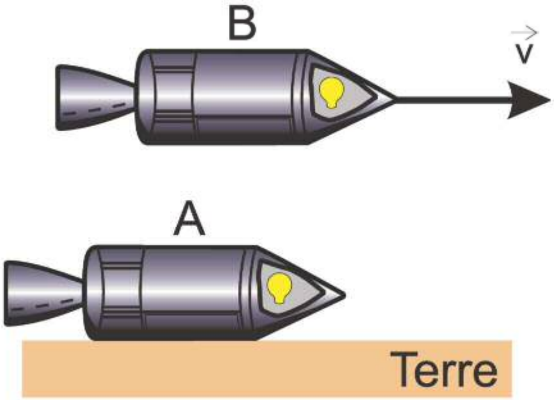
**Le principe de la relativité** *Toutes les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie.*

Autrement dit, des expériences identiques menées à l'intérieur de n'importe quel référentiel d'inertie (référentiel galiléen) donneront toutes les mêmes résultats. La vitesse d'un référentiel d'inertie est sans effet. Il est impossible de trancher la question : sommes-nous au repos ou en mouvement rectiligne uniforme ?

[1] http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34462944f/date.r=Annalen+der+Physik.langFR

**Exemple 4.1** Le café que vous versez dans votre tasse s'écoule exactement de la même manière, que vous vous trouviez au repos dans votre salon, ou dans le compartiment d'un train animé d'une vitesse constante sur un tronçon rectiligne, ou encore dans un avion en mouvement rectiligne et uniforme.

**Exemple 4.2** Un vaisseau spatial B se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un autre vaisseau A au repos par rapport à la Terre. A et B constituent des référentiels d'inertie. Dans chacun des vaisseaux les astronautes effectuent la même expérience qui consiste à allumer une lampe à l'avant du vaisseau et à mesurer la vitesse de la lumière émise.
Résultat : ils trouvent tous les deux la même valeur $c = 300\,000\,\text{km/s}$.




### 4.1.2 Deuxième postulat

**Le principe de la constance de la vitesse de la lumière** *La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels d'inertie. Elle est indépendante du mouvement de sa source ou de l'observateur.*

**Exemple 4.3** Reprenons les vaisseaux A et B de l'exemple 4.2 avec en plus une étoile lointaine double envoyant ses ondes lumineuses vers les deux vaisseaux (figure 4.1). Les astronautes de A et de B mesurent la vitesse de la lumière issue de chacune des deux étoiles, ainsi que celle de la lumière issue d'une lampe se trouvant à bord de leur vaisseau : ils trouvent pour toutes ces vitesses le même résultat $c = 300\,000\,\text{km/s}$.

*Remarque* :

Ce postulat est difficile à admettre. Si la lumière est une onde mécanique on s'attend à ce que sa vitesse soit mesurée par rapport à un certain milieu de propagation. Mais on n'a pas pu trouver un tel milieu. Si la lumière est constituée de particules, sa vitesse devrait être mesurée par rapport à sa source. L'expérience montre qu'il n'est pas ainsi. La théorie de l'électromagnétisme prévoit l'existence d'ondes se propageant dans le vide à une vitesse constante, indépendante du référentiel d'étude et dont la valeur est $c = 300\,000\,\text{km/s}$. Ce résultat fut confirmé par l'expérience de Michelson et Morley et conduisit Einstein à formuler son deuxième postulat.

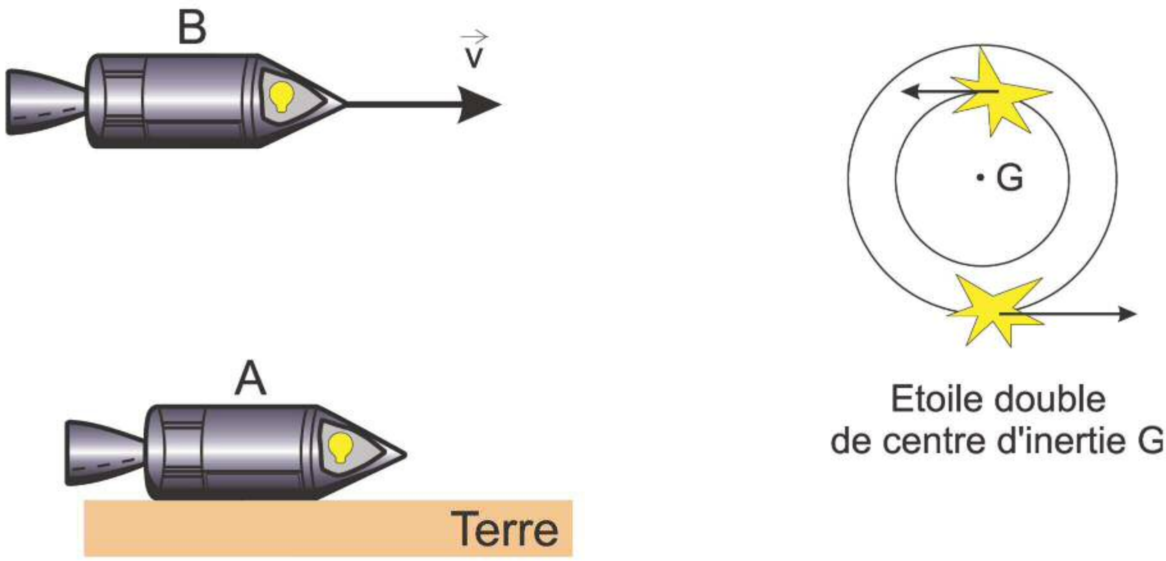



FIGURE 4.1 – Constance de la vitesse de la lumière

## 4.2 Définitions

**Événement** Un événement est un phénomène qui se produit en un point de l'espace et à un instant unique dans le temps.

**Observateur** Un observateur est une personne ou un dispositif automatique pourvu d'une horloge et d'une règle. Chaque observateur ne peut relever que les événements de son entourage immédiat et doit s'en remettre à des collègues pour relever les instants correspondants à des événements distants.

**Référentiel** Un référentiel est un ensemble d'observateurs répartis dans l'espace. Un seul observateur est en fait assez proche d'un événement pour l'enregistrer, mais les données pourront être communiquées plus tard aux autres observateurs.

## 4.3 Relativité de la simultanéité

Faisons « l'expérience par la pensée » (« Gedankenexperiment ») suivante :

Trois astronautes se déplacent à travers l'espace, d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à la Terre, au moyen des vaisseaux spatiaux A, C et B (figure 4.2). Les vaisseaux se suivent à des distances rigoureusement égales. C porte le commandement pour l'ensemble de la flotte. Les ordres sont transmis aux vaisseaux A et B au moyen d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse $c$.

Afin de synchroniser les horloges de A et de B, C émet l'information : « Il est midi pile ! » Les événements « A capte l'information » et « B capte l'information » sont observés d'une part par les astronautes et d'autre part par un observateur terrestre (nous-mêmes par exemple).

*Qu'observent les astronautes ?*

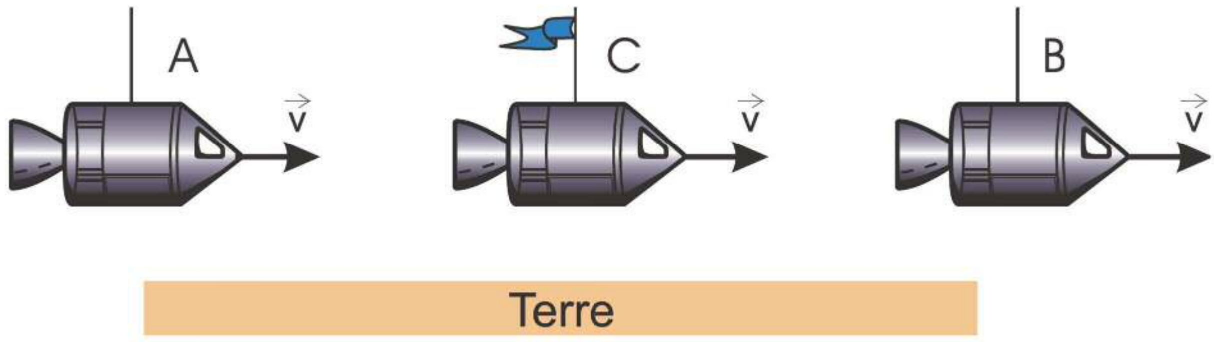



FIGURE 4.2 – Relativité de la simultanéité de deux événements

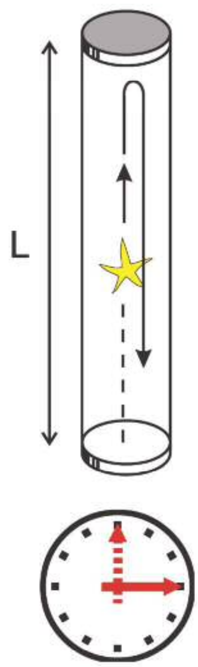
Les astronautes se voient mutuellement au repos. Les distances de A et de B par rapport à C sont identiques. Le signal électromagnétique transmettant l'information à la vitesse $c$ est reçu simultanément par A et B, qui vont ainsi pouvoir synchroniser leurs horloges.

*Qu'observons-nous ?*

A va à la rencontre du signal, tandis que B fuit le signal. Comme la vitesse de propagation du signal vaut également $c$ pour nous, l'information est captée d'abord par A, et puis, un peu plus tard seulement, par B. Pour nous, les deux événements ne sont donc pas simultanés.

**Conclusion** *Deux événements séparés dans l'espace qui ont lieu simultanément dans un référentiel ne se produisent pas simultanément dans un autre référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier.*

## 4.4 Dilatation du temps




Considérons une « horloge à lumière », où une impulsion lumineuse effectue des va-et-vient dans un tube entre deux miroirs parallèles distants d'une longueur $L$ (figure ci-contre). Un mécanisme compte le nombre d'allers et retours comme dans les horloges mécaniques normales.

Embarquons cette horloge dans un vaisseau en mouvement rectiligne uniforme de vitesse $v$ par rapport à la Terre. Supposons en plus que la vitesse soit perpendiculaire au tube de l'horloge. Mesurons l'intervalle de temps entre les événements « le signal part du miroir inférieur » et « le signal est reçu par le miroir inférieur » !

*Que mesure l'astronaute ?*

Pour l'astronaute, l'horloge est au repos. Le signal lumineux parcourt une distance $2L = cT_0$ entre les deux miroirs. L'intervalle de temps $T_0$ mesuré entre les deux événements vaut dans le référentiel des astronautes :

$$T_0 = \frac{2L}{c}.$$

*Que mesurons-nous ?*

Pour nous, l'horloge est en mouvement uniforme de vitesse $v$ et le signal parcourt une distance plus longue. D'après le second postulat, la vitesse du signal lumineux est pour nous également $c$. Il met donc un temps $T/2 > T_0/2$ pour parcourir la distance $AB > L$ entre les deux miroirs (figure 4.3).

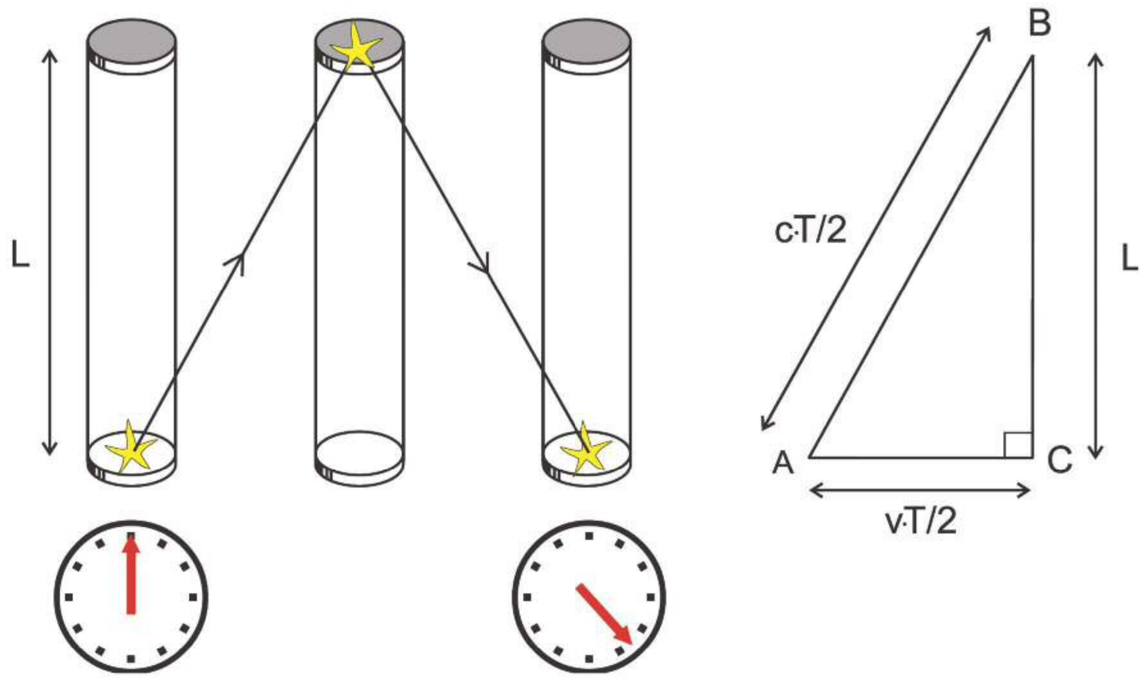



Figure 4.3 – Trajectoire de la lumière dans le référentiel terrestre

Déterminons la relation entre $T$ et $T_0$. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle $(ABC)$ permet d'écrire :

$$\left(c\,\frac{T}{2}\right)^2 = \left(v\,\frac{T}{2}\right)^2 + L^2.$$

Comme $L = c\,\frac{T_0}{2}$, il vient :

$$\left(c\,\frac{T}{2}\right)^2 = \left(v\,\frac{T}{2}\right)^2 + \left(c\,\frac{T_0}{2}\right)^2.$$

En simplifiant :

$$(c\,T)^2 - (v\,T)^2 = (c\,T_0)^2$$

d'où :

$$T^2 = \frac{(c\,T_0)^2}{c^2 - v^2} = \frac{{T_0}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

et finalement :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.1}$$

Comme le dénominateur est inférieur à 1, $T > T_0$.

Dans le référentiel terrestre, où on a disposé deux horloges séparées dans l'espace, l'intervalle de temps est supérieur à celui enregistré dans le référentiel de l'astronaute, à l'aide d'une seule horloge.

**Définition** *La durée entre deux événements se produisant au même lieu de l'espace est appelée intervalle de temps propre. Cet intervalle est mesuré par une seule horloge se trouvant à l'endroit où les événements se produisent.*

**Définition** *La durée entre deux événements se produisant en des lieux différents de l'espace est appelée intervalle de temps impropre. Cet intervalle ne peut être mesuré que par deux horloges se trouvant aux deux endroits où les événements se produisent.*

**Conclusion** *Deux horloges A et B séparées dans l'espace, enregistrent entre deux événements un intervalle de temps impropre $\Delta t_{\text{impropre}}$ plus grand que l'intervalle propre $\Delta t_{\text{propre}}$ enregistré par une seule horloge se déplaçant de A vers B, et qui est présente aux deux événements.*

$$\boxed{\Delta t_{\text{impropre}} = \frac{\Delta t_{\text{propre}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

La figure 4.4 représente les intervalles de temps impropre et propre en fonction de la vitesse.

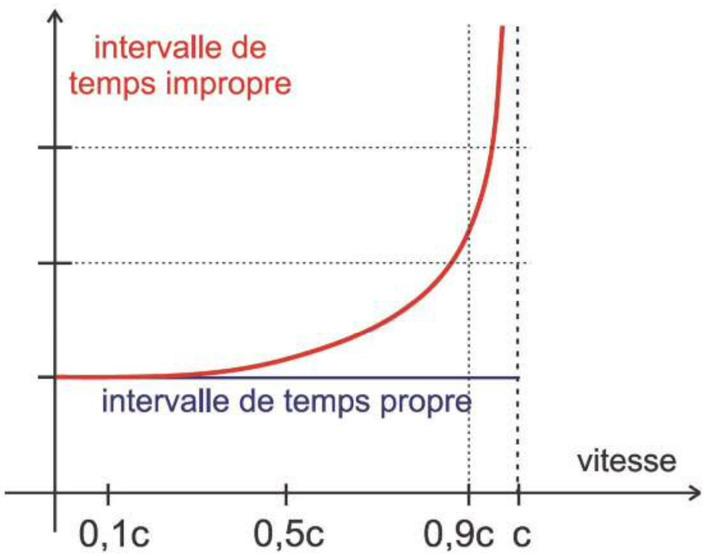



FIGURE 4.4 – Relation entre intervalles de temps impropre et propre

*Discussion* :

- Pour les faibles vitesses, inférieures à 10 % de la vitesse de la lumière, il n'y a pratiquement pas de différence entre les indications des horloges en mouvement et de celles au repos. L'idée du temps absolu de la mécanique classique reste une approximation valable.

- Pour les vitesses approchant la vitesse de la lumière, le temps doit être considéré comme une grandeur relative, dépendant de l'observateur qui le mesure.

*Remarque* : les horloges en mouvement retardent !

- Si, dans l'expérience par la pensée précédente, nous nous équipons également d'une « horloge à lumière » (au repos), nous mesurons sur elle, pour un aller et retour du signal, la durée propre $T_0$ (la même que l'astronaute mesure sur son horloge au repos, à cause du premier postulat).

  Nous constatons : pendant que sur l'horloge de l'astronaute, en mouvement, le signal a parcouru un aller et retour, celui sur notre horloge au repos a parcouru plus d'un aller et retour.

  Nous concluons : l'horloge de l'astronaute (en mouvement) marche plus lentement que notre horloge (au repos). En termes simples : l'horloge en mouvement retarde.

- Si, dans l'expérience par la pensée précédente, l'astronaute examine notre « horloge à lumière » (en mouvement pour lui), il doit aboutir à la même conclusion, c.-à-d. que notre horloge en mouvement marche plus lentement que la sienne au repos.

*Conséquence* :

Pour l'observateur terrestre, tout ce qui se passe dans le vaisseau spatial (gestes quotidiens, mouvements de machines, battements du cœur et autres phénomènes physiologiques, ...), se déroule au ralenti. De même pour l'astronaute observant l'observateur terrestre !

## 4.5 Contraction des longueurs

Considérons un vaisseau en train de se déplacer de la Terre vers Jupiter en ligne droite et à vitesse $v$ constante, par rapport à la Terre et à Jupiter (figure 4.5). Admettons également que cette distance reste rigoureusement constante de sorte que l'ensemble « Terre + Jupiter » constitue un référentiel d'inertie, de même que le vaisseau en mouvement par rapport au référentiel « Terre + Jupiter ».

Mesurons la distance Terre-Jupiter dans les deux référentiels.

Connaissant la valeur $v$ de la vitesse du vaisseau, il suffit de mesurer la durée du voyage, c'est-à-dire la durée entre les événements « le vaisseau passe à la hauteur de la Terre » et « le vaisseau passe à la hauteur de Jupiter », et de calculer la distance cherchée.

*Que mesure l'astronaute ?*

Pour l'astronaute, les deux événements se passent tout près de son vaisseau, donc au même endroit. Une seule horloge lui suffit. Il mesure la durée propre $T_0$.

Dans le référentiel de l'astronaute, la distance Terre-Jupiter est une longueur en mouvement. Elle est notée $L$ et vaut :

$$L = v\,T_0. \tag{4.2}$$

*Que mesurons-nous ?*

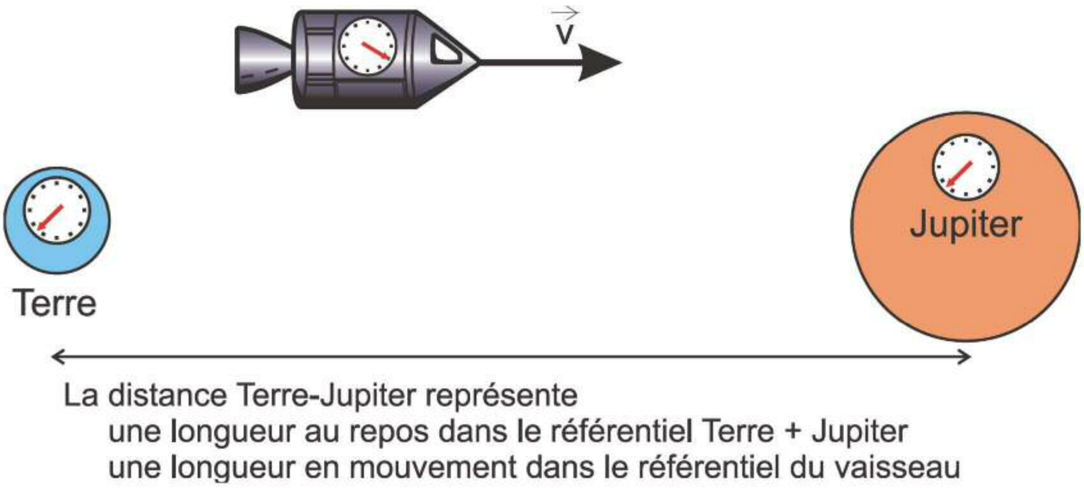



FIGURE 4.5 – Mesure de la distance Terre-Jupiter

Pour nous, les deux événements ne se passent pas au même endroit. Nous devons installer deux horloges synchronisées, une première horloge sur Terre afin de repérer la date du premier événement, et une autre sur Jupiter pour celle du deuxième événement. Nous mesurons manifestement une durée impropre $T$.

Par contre dans notre référentiel, la distance Terre-Jupiter est une longueur au repos. Elle est notée $L_0$ et vaut :

$$L_0 = v\,T. \tag{4.3}$$

En divisant membre par membre les équations (4.2) et (4.3) en en simplifiant par $v$ on obtient :

$$\frac{L}{L_0} = \frac{T_0}{T}.$$

D'après l'équation (4.1) on a :

$$\frac{L}{L_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Comme la racine carrée est inférieure à 1, $L < L_0$. Dans le référentiel de l'astronaute, la longueur ($L$ en mouvement) est plus courte que dans le référentiel terrestre ($L_0$ au repos).

**Conclusion** *Une longueur est plus courte dans un référentiel par rapport auquel elle est en mouvement ($L_{\text{mouvement}}$), que dans un référentiel par rapport auquel elle est au repos ($L_{\text{repos}}$).*

$$\boxed{L_{\text{mouvement}} = L_{\text{repos}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La figure 4.6 représente les longueurs en mouvement et au repos en fonction de la vitesse.

*Discussion* :

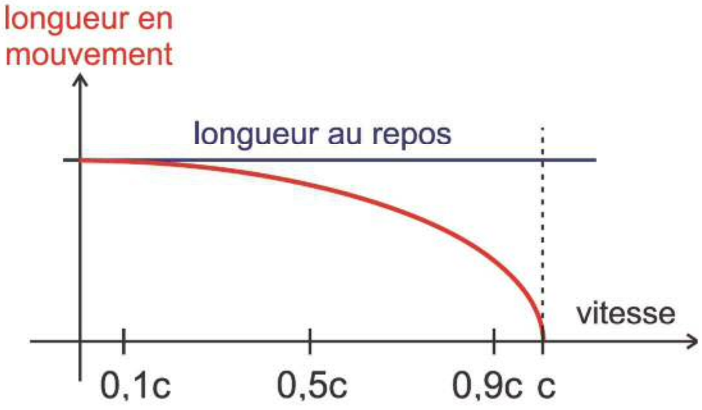



Figure 4.6 – Relation entre longueurs en mouvement et au repos

- Il n'y a que les longueurs parallèles au vecteur vitesse qui dépendent du référentiel dans lequel on les mesure. (La longueur $L$ de l'horloge lumineuse du chapitre précédent était la même dans les deux référentiels !)

- Pour les faibles vitesses (inférieures à 10 % de la vitesse de la lumière), il n'y a pratiquement pas de différence entre les longueurs en mouvement et celles au repos. L'idée de l'espace absolu de la mécanique classique reste une approximation valable.

- Pour les vitesses approchant la vitesse de la lumière, la longueur doit être considérée comme une grandeur relative, dépendant de l'observateur qui la mesure.

- Pour les photons dont la vitesse est $c$, la dimension spatiale parallèle à leur déplacement a complètement disparue.

*Remarque* : les longueurs en mouvement raccourcissent !

- Considérons le référentiel terrestre, où se trouve une règle graduée au repos, et un vaisseau spatial, de vitesse $\vec{v}$ par rapport à la Terre, muni également d'une même règle graduée. L'observateur terrestre aussi bien que l'astronaute voient leur règle au repos, de longueur $L_0$.

  L'observateur terrestre mesure, pour la longueur de la règle du vaisseau en mouvement par rapport à lui, une longueur raccourcie $L < L_0$.

- De même, l'astronaute mesure la longueur $L < L_0$ pour la règle terrestre.

*Conséquence* :

Si un corps initialement au repos est mis en mouvement il raccourcit suivant la direction parallèle au mouvement.

## 4.6 Expérience des muons (Frisch et Smith 1963)

### 4.6.1 Description de l'expérience

L'expérience des muons est une preuve expérimentale de la dilatation du temps et de la contraction des longueurs. Les muons sont des particules élémentaires produites dans la haute atmosphère par bombardement avec les protons du rayonnement cosmique, et qui se désintègrent spontanément pour donner d'autres particules. Si on a $N_0$ muons à l'instant $t = 0$, on observe qu'à un instant ultérieur $t$ il en reste $N$ :

$$N = N_0\, e^{-\ln 2\, \frac{t}{T_0}}.$$

où $T_0 = 1{,}5\,\mu\mathrm{s}$ est la demi-vie des muons mesurée dans un référentiel où les muons sont au repos.

L'expérience de Frisch et Smith (figure 4.7) consistait à compter le nombre $N_1$ de muons détectés par heure au sommet du Mount Washington (New Hampshire, altitude 1910 m) ainsi que celui $N_2$ détecté au niveau de la mer (altitude 3 m). Le compteur fut réglé pour compter les muons ayant une vitesse égale à $0{,}995\,c$. Les résultats furent les suivants : $N_1 = 563 \pm 10$ muons et $N_2 = 408 \pm 9$ muons.

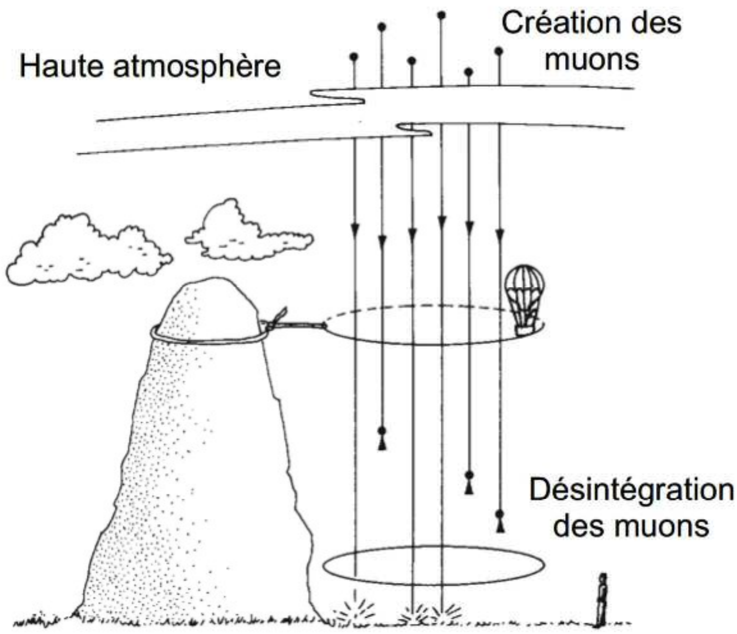



Figure 4.7 – Expérience des muons de Frisch et Smith

Un calcul simple montre qu'en absence de considérations relativistes, il n'y a pas moyen d'expliquer que les muons atteignent en nombre tellement élevé le niveau de la mer. En effet, les muons mettraient $6{,}4\,\mu\mathrm{s}$ pour parcourir les 1907 m et le nombre de muons qui atteindraient le niveau de la mer serait seulement de :

$$N_2 = N_1\, e^{-\ln 2\, \frac{6{,}4}{1{,}5}} = 29.$$

La dilatation du temps et la contraction des longueurs nous fournissent l'explication correcte.

### 4.6.2 Explication à l'aide de la dilatation du temps

L'intervalle de temps entre les événements « le muon passe au Mount Washington » et « le muon passe au niveau de la mer » est un intervalle de temps propre $\Delta t_0$ pour le muon et un intervalle de temps impropre $\Delta t$, beaucoup plus grand, pour l'observateur terrestre.

Comme $\Delta t = 6{,}4\,\mu\text{s}$ et $v = 0{,}995\,c$ on obtient pour la durée du parcours vue par le muon :

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}64\,\mu\text{s}.$$

De même, la demi-vie de $1{,}5\,\mu\text{s}$ est un intervalle de temps propre pour le muon et un intervalle de temps impropre $T$, considérablement allongé, pour l'observateur terrestre :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 15\,\mu\text{s}.$$

Dans le *référentiel du muon*, la demi-vie vaut $1{,}5\,\mu\text{s}$ et la durée du parcours $0{,}64\,\mu\text{s}$. Le nombre de muons atteignant le niveau de la mer vaut donc :

$$N_2 = N_1\, e^{-\ln 2 \frac{0{,}64}{1{,}5}} = 419$$

ce qui est une bonne concordance compte tenu des erreurs expérimentales.

Dans le *référentiel terrestre*, la durée de vie moyenne vaut $15\,\mu\text{s}$ et la durée du parcours $6{,}4\,\mu\text{s}$. On trouve le même nombre $N_2$.

### 4.6.3 Explication à l'aide de la contraction des longueurs

Dans le référentiel du muon, la distance à parcourir du sommet du Mount Washington au niveau de la mer est une longueur en mouvement, beaucoup plus courte que la longueur $L_{\text{repos}} = 1907\,\text{m}$ mesurée dans le référentiel terrestre :

$$L_{\text{mouvement}} = L_{\text{repos}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 191\,\text{m}.$$

Cette faible distance sera parcourue en $0{,}64\,\mu\text{s}$. On retrouve le résultat précédent !

*Remarque* :

L'effet mesuré dans cette expérience est loin d'être négligeable ! La désintégration des muons s'est faite à un rythme 10 fois plus lent qu'au repos. Tous les jours, les physiciens qui étudient les particules de haute énergie, travaillant sur des accélérateurs de grande puissance, ont affaire à des particules qui se désintègrent spontanément plus de 100 fois plus rapidement que les muons. Si la dilatation du temps ne jouait pas, elles se désintégreraient et disparaîtraient avant d'avoir parcouru plusieurs mètres, même en se déplaçant presque à la vitesse de la lumière. C'est parce que leur désintégration est ralentie qu'on peut les observer à plus de 100 mètres du point où ils sont produits dans l'accélérateur. On peut, en conséquence, les utiliser dans d'autres expériences. La dilatation du temps devient ainsi une affaire quotidienne pour ces physiciens.

## 4.7 Quantité de mouvement

Selon le premier postulat d'Einstein, les lois physiques sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie. Les trois principes de Newton, la conservation de la quantité de mouvement ainsi que la conservation de l'énergie s'appliquent toujours et dans tous les référentiels d'inertie.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

où $\vec{p}$ est le vecteur quantité de mouvement. Pour que cette loi fondamentale vérifie le premier postulat d'Einstein, il faut donner une nouvelle définition au vecteur $\vec{p}$.

**Définition** *La quantité de mouvement relativiste d'une particule, de masse au repos $m_0$, animée d'une vitesse $\vec{v}$, est définie par :*

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v} = \frac{m_0\,\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

*où $m$ est la masse relativiste définie par :*

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

La figure 4.8 représente la quantité de mouvement par unité de masse en fonction de la vitesse :

- en rouge la quantité de mouvement relativiste par unité de masse ;
- en bleu la quantité de mouvement classique ($p_{\text{classique}} = m_0\,v$) par unité de masse.

*Discussion* :

- Si $v = 0$ alors $m = m_0$ qui est la masse au repos de la particule. Elle est égale à la masse en mécanique classique.
- Pour les faibles vitesses (inférieures à 10 % de la vitesse de la lumière), la quantité de mouvement est pratiquement égale à son expression en mécanique classique : $p \approx m_0\,v$. L'expression classique reste donc une approximation valable.
- Pour les vitesses approchant la vitesse de la lumière, la quantité de mouvement doit être considérée comme grandeur relativiste, dépendant de l'observateur qui la mesure.

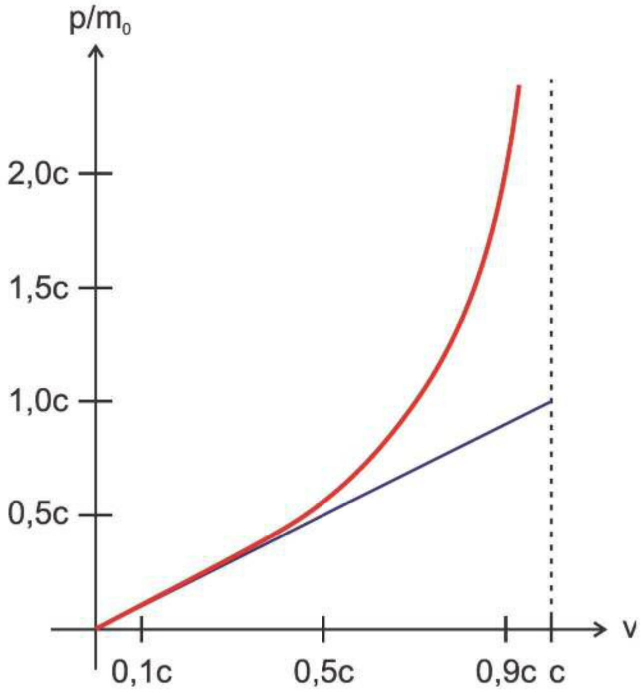



FIGURE 4.8 – Quantité de mouvement par unité de masse

## 4.8 Énergie

### 4.8.1 Énergie d'un corps

**Définition** *L'énergie totale d'un corps de masse au repos $m_0$ et de vitesse $v$ s'écrit :*

$$\boxed{E = m\,c^2 = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{4.4}$$

*Pour un corps de vitesse nulle : $E_0 = m_0\,c^2$.*

La formule $E = m\,c^2$, la plus célèbre de la physique probablement, traduit l'équivalence entre l'énergie et la masse.

*Note historique* :

> Albert Einstein a démontré incorrectement la formule dans son article « Ist die Trägheit eines Körpers von dessen Energieinhalt abhängig ? » (Einstein A. 1905 Annalen der Physik 18, 639–643). La formule fut établie correctement pour la première fois par Max Planck (« Zur Dynamik bewegter Systeme », Planck M. 1908 Annalen der Physik 26, 1–34).

### 4.8.2 Énergie au repos

La quantité $E_0 = m_0\, c^2$ est l'énergie totale d'un corps au repos. Elle représente la somme de toutes les *énergies internes* (thermique, nucléaire, chimique), et des *énergies potentielles* (électrique, gravitationnelle, élastique).

**Exemple 4.4** Pour $m_0 = 1\,\text{g}$, on obtient $E_0 = 9 \cdot 10^{13}\,\text{J}$ (énergie énorme !).

**Exemple 4.5** Pour un électron de masse au repos $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$, on obtient $E_0 = 8{,}19 \cdot 10^{-14}\,\text{J} = 511\,\text{keV}$.

*Remarque* : en utilisant l'expression de l'énergie au repos, l'expression pour l'énergie totale peut s'écrire :

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.5}$$

### 4.8.3 Équivalence énergie-masse

L'équivalence entre l'énergie et la masse constitue l'un des aspects les plus célèbres de la théorie de la relativité restreinte : si l'énergie d'un corps varie, alors sa masse varie également. Ainsi, la libération d'énergie $\Delta E_0$ lors de la fusion ou de la fission nucléaire (noyaux pratiquement au repos) s'accompagne d'une diminution de masse au repos $\Delta m_0$, d'après $\Delta E_0 = \Delta m_0\, c^2$.

De même, dans toute réaction chimique libérant de la chaleur ou de la lumière, la masse au repos totale des constituants diminue. La loi de la conservation de la masse (loi de Lavoisier) doit être remplacée par la loi de la conservation de l'énergie.

Par ailleurs, un photon d'énergie $E$, entrant en interaction avec une autre particule (ou avec un champ électromagnétique assez fort), peut se matérialiser en une paire électron-positron (positron = anti-électron) où chacune des deux particules (de masse au repos $m_0$) créées acquiert l'énergie $E/2 = m\,c^2$ (où $m$ est la masse relativiste). L'énergie du photon doit donc être supérieure à $2\,m_0\,c^2$.

L'équivalence entre l'énergie et la masse amène les physiciens à exprimer la masse au repos d'une particule en unités d'énergie.

**Exemple 4.6** La masse au repos du proton $m_0 = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$ correspond à l'énergie $m_0\,c^2 = 1{,}504 \cdot 10^{-10}\,\text{J}$. Il serait possible, mais on ne le fait pratiquement jamais, de dire qu'un proton a une masse au repos $m_0 = 1{,}504 \cdot 10^{-10}\,\text{J/c}^2$. L'énergie est plutôt exprimée en électron-volts (eV) :

$$\frac{1{,}504 \cdot 10^{-10}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\,\text{eV} = 9{,}38 \cdot 10^{8}\,\text{eV} = 938\,\text{MeV}.$$

Ainsi on dira que la masse au repos du proton est $m_{0p} = 938\,\text{MeV/c}^2$.

**Exemple 4.7** Pour la masse au repos du neutron on trouve $m_{0n} = 940\,\text{MeV/c}^2$, celle de l'électron est $m_{0e} = 0{,}511\,\text{MeV/c}^2$.

### 4.8.4 Masse et inertie

La théorie de la relativité révèle que l'inertie d'un corps de masse au repos $m_0$ et de vitesse $v$ est exprimée par la masse relativiste :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c^2}.$$

Lorsque la vitesse est faible (inférieure à 10 % de la vitesse de la lumière), on retrouve le résultat de la physique classique, à savoir que l'inertie est exprimée par la masse au repos :

$$m_0 = \frac{E}{c^2}.$$

En physique classique, la masse d'un corps est indépendante de sa température, de son énergie potentielle etc.

Pourtant, selon la relativité restreinte, la masse au repos dépend de la température : une tarte chaude a plus d'énergie, plus de masse au repos et donc plus d'inertie qu'une tarte identique froide. De même lorsqu'on comprime un ressort, le supplément d'énergie élastique accroît sa masse au repos, et donc son inertie. Pour une lampe de poche allumée, la masse au repos et l'inertie diminuent. (Les très faibles variations de la masse au repos des corps macroscopiques ne sont pourtant pas mesurables !)

### 4.8.5 Énergie cinétique

Si $v \neq 0$ alors le corps possède l'énergie $E = m\,c^2$ qui est la somme de l'énergie au repos $E_0$ et de l'énergie cinétique $E_c$.

**Définition** *L'énergie cinétique relativiste d'une particule de masse au repos $m_0$ et de vitesse $v$ est définie par :*

$$E_c = E - E_0 = m\,c^2 - m_0\,c^2 = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\,c^2.$$

*Discussion* :

- Pour les faibles vitesses (inférieures à 10 % de la vitesse de la lumière), on peut utiliser le développement limité d'ordre un :

  $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \tfrac{1}{2}\,x^2,\ \textit{pour}\ x \lesssim 0{,}1$$

  pour montrer que l'énergie cinétique $E_c$ est pratiquement égale à son expression classique $\frac{1}{2}\,m_0\,v^2$.
- Pour les vitesses approchant la vitesse de la lumière, l'énergie cinétique doit être considérée comme grandeur relativiste, dépendant de l'observateur qui la mesure.
- Lorsque $v \to c$, alors $E_c \to \infty$.

- Lorsque $v \to c$, alors $E \to \infty$. Or une particule d'énergie infinie n'existe pas. Donc $v = c$ est impossible pour une particule matérielle. Voilà un résultat surprenant de la relativité restreinte.

  *Aucune particule de masse au repos non nulle ne peut atteindre et donc dépasser la vitesse de la lumière.*

### 4.8.6 Relation entre l'énergie et la quantité de mouvement

En élevant au carré l'expression (4.5) de l'énergie totale on obtient :

$$E^2 = \frac{{E_0}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

d'où :

$$E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = {E_0}^2 \Rightarrow E^2 - E^2\,\frac{v^2}{c^2} = {E_0}^2.$$

En utilisant l'expression (4.4) pour remplacer $E$ dans le deuxième terme :

$$E^2 - m^2\,c^4\,\frac{v^2}{c^2} = {E_0}^2 \Rightarrow E^2 = m^2\,v^2\,c^2 + {E_0}^2.$$

L'expression $m\,v$ correspond à la valeur $p$ de la quantité de mouvement. On obtient finalement une relation entre l'énergie totale d'une particule, sa quantité de mouvement et son énergie au repos :

$$\boxed{E^2 = p^2\,c^2 + {E_0}^2} \tag{4.6}$$

*Discussion* :

- Les expériences en physique des particules donnent des informations sur l'énergie totale et sur la quantité de mouvement d'une particule détectée. L'expression (4.6) permet alors de calculer l'énergie au repos et donc la masse au repos de la particule.
- Pour des particules matérielles de très grande vitesse, $E$ est largement supérieur à $E_0$, et on obtient :

  $$E \approx p\,c.$$

- Les photons sont des particules qui se déplacent à la vitesse de la lumière. Leur masse au repos est par conséquent nulle et l'expression (4.6) peut être simplifiée :

  $$E = p\,c.$$

  Même si la masse au repos d'un photon est nulle, il transporte de la quantité de mouvement dont il faut tenir compte lors de collisions avec d'autres particules !

- L'énergie $E$ et la quantité de mouvement $p$ d'une particule dépendent du référentiel dans lequel on les mesure. Par contre la quantité $E^2 - p^2\,c^2$ ne dépend pas du référentiel. C'est une quantité invariante. On l'appelle *invariant relativiste.*