Lycée Denis-de-Rougemont — CORRIGÉ — Mathématiques de niveau 1

TE de GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE — A.

Exercice 1

a) Un vecteur directeur de la droite d est $\overrightarrow{AB}$.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Comme d passe par $A(8;-6;-6)$, des équations paramétriques de d sont :

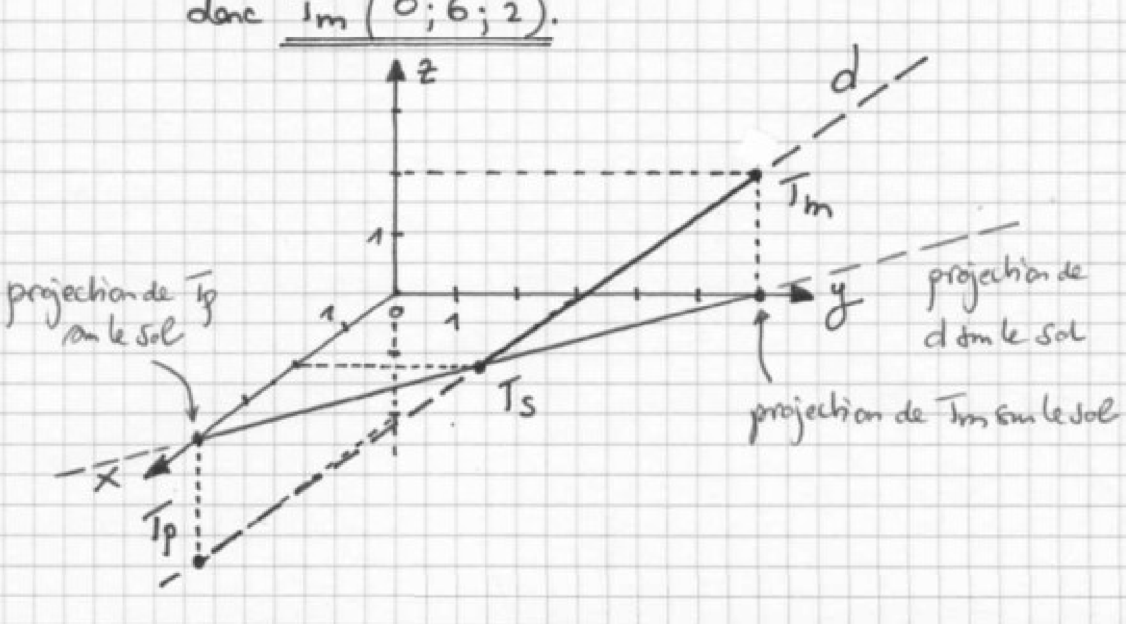
$$\underline{\underline{\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = -6 - 3\lambda \\ z = -6 - 2\lambda . \end{cases}}}$$

b) Trace de d dans le sol : on pose $z = 0$; ainsi $0 = -6 - 2\lambda$, i.e. $2\lambda = -6$, i.e. $\lambda = -3$; on a alors $x = 8 + 2\cdot(-3) = 2$ et $y = -6 - 3(-3) = 3$;
donc $\underline{\underline{T_s(2;3;0)}}$.

Trace dans la paroi : on pose $y = 0$; ainsi $0 = -6 - 3\lambda$, i.e. $3\lambda = -6$, i.e. $\lambda = -2$; on a alors $x = 8 + 2\cdot(-2) = 4$ et $z = -6 - 2(-2) = -2$;
donc $\underline{\underline{T_p(4;0;-2)}}$.

Trace dans le mur : on pose $x = 0$; ainsi $0 = 8 + 2\lambda$, i.e. $2\lambda = -8$, i.e. $\lambda = -4$; on a alors $y = -6 - 3\cdot(-4) = 6$ et $z = -6 - 2(-4) = 2$;
donc $\underline{\underline{T_m(0;6;2)}}$.

c) d)



Exercice 2

Droite d : vecteur directeur $= \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Équations paramétriques : $\begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 2\lambda . \end{cases}$

Droite e : vecteur directeur $= \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$;

Équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 3\mu \\ z = -9\mu . \end{cases}$

Cherchons à voir s'il existe une intersection entre d et e. Si elle existe, on doit avoir :

$$-1 - 4\lambda = 1 \quad (1)$$
$$3 + 2\lambda = 1 - 3\mu \quad (2)$$
$$4 + 2\lambda = -9\mu \quad (3).$$

De (1), on tire $-4\lambda = 2$, i.e. $\lambda = -\frac{1}{2}$.

(2) devient alors $3 + 2\cdot(-\frac{1}{2}) = 1 - 3\mu$, i.e. $3 - 1 = 1 - 3\mu$, i.e. $2 = 1 - 3\mu$.

On obtient alors $-3\mu = 1$, i.e. $\mu = -\frac{1}{3}$.

En substituant $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{3}$ dans (3), on obtient :

$4 + 2\cdot(-\frac{1}{2}) = 2 - 1 = 3$ à gauche, et

$-9\cdot(-\frac{1}{3}) = 3$ à droite, ce qui est égal.

Ainsi le système (1)-(2)-(3) a $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{3}$ comme solution.

Avec $\lambda = -\frac{1}{2}$, on trouve : $x = -1 - 4(-\frac{1}{2}) = -1 + 2 = 1$,

$y = 3 + 2(-\frac{1}{2}) = 3 - 1 = 2$,

$z = 4 + 2(-\frac{1}{2}) = 4 - 1 = 3$.

Ainsi <u>d et e sont sécantes et leur point d'intersection est $(1; 2; 3)$.</u>

Exercice 3

Pour trouver l'équation cartésienne du plan, on cherche un vecteur normal au plan. Ce vecteur sera donné par $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (puisque $\vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$).

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 - (-2)\cdot(-1) \\ -2\cdot(-1) - (-2)\cdot 1 \\ -2\cdot(-1) - 4\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2+2 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (par division par 2), on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal du plan.

Ainsi l'équation cartésienne du plan est de la forme $x + 2y + 3z + d = 0$.

Comme le plan contient $A(2;2;0)$, par substitution, on doit avoir :

$2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 0 + d = 0$, i.e. $2 + 4 + d = 0$, i.e. $6 + d = 0$, i.e. $d = -6$.

Ainsi <u>l'équation cartésienne du plan est $x + 2y + 3z - d = 0$</u>.

Exercice 4

a) Pour dessiner les traces d'un plan, on cherche tout d'abord ses intersections avec les axes de référence, ce qui nous donnera les traces lorsqu'on les relie.

Plan α : $3x+2z-12=0$

intersection avec l'axe x : on pose $y=z=0$; on obtient $3x-12=0$, i.e. $3x=12$, i.e $x=4$; ainsi $I_x^\alpha(4;0;0)$;

intersection avec l'axe y : on pose $x=z=0$; on obtient $-12=0$, ce qui est exclu ; ainsi I_y^α n'existe pas ;

intersection avec l'axe z : on pose $x=y=0$; on obtient $2z-12=0$, i.e. $2z=12$, i.e. $z=6$; ainsi $I_z^\alpha(0;0;6)$.

Plan β : $y-5=0$, que l'on peut écrire $y=5$; β est donc un plan parallèle à la paroi ; on a $I_y^\beta(0;5;0)$, alors que I_x^β et I_z^β n'existent pas.

Voir page suivante pour les dessins.

b) Pour dessiner la droite d'intersection de α et β, on cherche ses traces dans les plans de référence (T_S, T_P, T_m).

Or, T_S est l'intersection de t_S^α et t_S^β, traces de α et β dans le sol, T_P est l'intersection de t_P^α et t_P^β, traces de α et β dans la paroi et T_m est l'intersection de t_m^α et t_m^β, traces de α et β dans le mur.

Voir page suivante pour le dessin.

Ici T_P n'existe pas (puisque β est parallèle à la paroi), ce qui signifie que la droite d'intersection est parallèle à β.

c) Cherchons les coordonnées de T_S et T_m.

En posant $z=0$ dans l'équation de α, on a l'équation de t_S^α : $3x-12=0$.

Ainsi $3x=12$, i.e. $x=4$. Comme β : $y=5$, on a $T_S(4;5;0)$.

En posant $x=0$ dans l'équation de α, on a l'équation de t_m^α : $2z-12=0$.

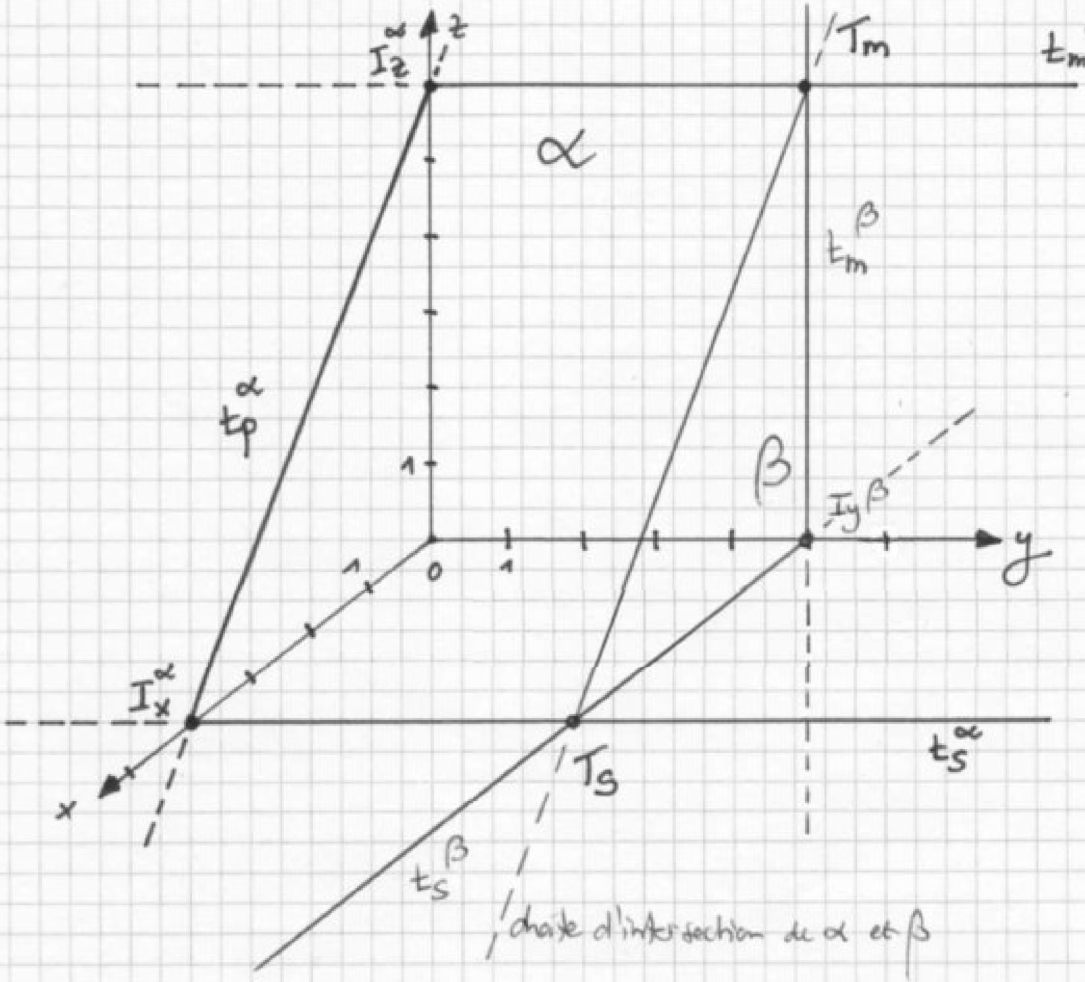
Ainsi $2z=12$, i.e. $z=6$. Comme β : $y=5$, on a $T_m(0;5;6)$.

Le vecteur $\overrightarrow{T_ST_m}$ est un vecteur directeur de la droite cherchée.

On a : $\overrightarrow{T_ST_m}=\overrightarrow{OT_m}-\overrightarrow{OT_S}=\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$.

Comme la droite passe par $T_S(4;5;0)$, des équations paramétriques sont :

$$\begin{cases}x=4-4\lambda\\y=5\\z=6\lambda\end{cases}$$



I_z^α
z
T_m
t_m^α
α
t_m^β
t_p^α
1
β
I_y^β
y
0
1
1
I_x^α
x
T_S
t_S^α
t_S^β
droite d'intersection de α et β