CORRIGE

TE de GEOMETRIE DANS L'ESPACE

B.

Exercice 1

①

a) En utilisant la formule de la distance d'un point à un plan, la plus courte distance de Π à A est :

$$\frac{|2\cdot 4-2\cdot(-3)+10+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|8+6+10+3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|27|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=\underline{\underline{3.}}$$

b) Pour trouver le point P de Π le plus proche de A, on cherche l'équation de la droite p perpendiculaire à Π et passant par A et on aura que P est l'intersection de p et Π.

Un vecteur normal (= perpendiculaire) à Π est $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

C'est donc un vecteur directeur de p.

Des équations paramétriques de p sont donc: $\begin{cases}x=4+2\lambda\\y=-3-2\lambda\\z=10+\lambda.\end{cases}$

Par substitution dans l'équation de α, on a:

$2(4+2\lambda)-2(-3-2\lambda)+10+\lambda+3=0$	distributivité
$8+4\lambda+6+4\lambda+10+\lambda+3=0$	réduction
$9\lambda+27=0$	-27
$9\lambda=-27$	$:9$
$\lambda=-3$	

Avec $\lambda=-3$, on a: $x=4+2\cdot(-3)=4-6=-2$, $y=-3-2\cdot(-3)=-3+6=3$ et $z=10-3=7$.

Donc $\underline{P(-2;3;7).}$

c) Pour calculer l'angle aigu entre une droite et un plan, on calcule l'angle aigu entre un vecteur directeur de la droite et une normale (= perpendiculaire) au plan, puis on fait $90°-$ cet angle.

Un vecteur directeur de la droite AB est $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-3\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}$.

Un vecteur normale au plan Π est $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

L'angle α entre $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ est donné par $\cos(\alpha)=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\vec{n}\|}$.

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 =$

$= -2 - 10 - 3 = -15$;

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}$;

$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3.$

Ainsi $\cos(\alpha) = \dfrac{|-15|}{\sqrt{35} \cdot 3} = \dfrac{15}{\sqrt{35} \cdot 3} = \dfrac{5}{\sqrt{35}} \cong 0{,}845.$

Donc $\alpha = \cos^{-1}(0{,}845) \cong 32{,}31°$.

L'angle cherché est donc $90° - 32{,}31° \cong \underline{\underline{57{,}69°}}$.

d) Un plan parallèle à π a même vecteur normal que π, à savoir $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi les équations des plans parallèles sont de la forme $2x - 2y + z + d = 0$.

P doit se trouver à une distance 9 de $P(-2;3;7)$.

En utilisant la formule de la distance d'un point à un plan, on doit avoir :

$$\frac{|2 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 + 7 + d|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = 9 \text{ , i.e. } \frac{|-4 - 6 + 7 + d|}{\sqrt{4+4+1}} = 9,$$

$$\text{i.e. } \frac{|-3+d|}{\sqrt{9}} = 9, \text{ i.e. } \frac{|-3+d|}{3} = 9, \text{ i.e. } |-3+d| = 27.$$

On a alors 2 possibilités : 1) $-3 + d = 27$, i.e. $d = 30$;

et 2) $-3 + d = -27$, i.e. $d = -24$.

Ainsi les 2 plans parallèles sont $2x - 2y + z + 30 = 0$

$\underline{\underline{\text{et } 2x - 2y + z - 24 = 0}}$

Exercice 2

a) T_S, la trace de d dans le sol, est l'intersection des traces de α et de β dans le sol.

La trace de α dans le sol est $4x - 2y - 2 = 0$ (on pose $z = 0$).

La trace de β dans le sol est $3x + y - 9 = 0$ (on pose $z = 0$).

Ainsi T_S est de la forme $T_S(x; y; 0)$ où x et y sont solutions du système $\begin{cases} 4x - 2y - 2 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0. \end{cases}$

En additionnant 2 fois la seconde à la première, on obtient : $10x - 20 = 0$.

Ainsi $10x = 20$ et, donc $x = 2$.

Par conséquent, on a $4 \cdot 2 - 2y - 2 = 0$, i.e. $8 - 2y - 2 = 0$, i.e. $6 - 2y = 0$, i.e. $2y = 6$, i.e. $y = 3$.

On obtient donc $\underline{T_S(2; 3; 0)}$.

b) Il faut trouver un vecteur directeur de d.

d est une droite des plans α et β. d est donc perpendiculaire à des vecteurs perpendiculaires de α et β.

Un vecteur perpendiculaire à α est : $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur perpendiculaire à β est : $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Comme $\vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, et, donc, sera parallèle à d.

On a : $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 + 8 \\ 4 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. $T_S(2; 3; 0)$ est un point de d.

Des équations paramétriques de d sont donc : $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 + 11\lambda \\ z = 10\lambda. \end{cases}$

c) Un vecteur directeur de p sera perpendiculaire à un vecteur directeur de d et à un vecteur perpendiculaire à α.

Ainsi un vecteur directeur de p sera $\begin{pmatrix}3\\11\\10\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$.

On a: $\begin{pmatrix}3\\11\\10\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\cdot 1-10\cdot(-2)\\10\cdot 4-3\cdot 1\\3\cdot(-2)-11\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11+20\\40-3\\-6-44\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}31\\37\\-50\end{pmatrix}$.

Comme p passe par $T_S(2;3;0)$, des équations paramétriques de p sont:

$$\begin{cases} x = 2+31\lambda \\ y = 3+37\lambda \\ z = -50\lambda. \end{cases}$$

Exercice 3

La distance d'une droite d à un point P est donné par $\dfrac{\|\overrightarrow{AP}\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$, où

A est un point de d et $\vec{d}$ un vecteur de d.

On a : $A(1;2;3)$ et $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}11\\4\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\2\\-7\end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{d}=\begin{pmatrix}10\\2\\-7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot0-(-7)\cdot(-1)\\-7\cdot1-10\cdot0\\10\cdot(-1)-2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-7\\-12\end{pmatrix};$$

$$\|\overrightarrow{AP}\times\vec{d}\|=\sqrt{(-7)^2+(-7)^2+(-12)^2}=\sqrt{49+49+144}=\sqrt{242};$$

$$\|\vec{d}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};$$

$$\frac{\|\overrightarrow{AP}\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}=\frac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{242}{2}}=\sqrt{121}=11.$$

La plus courte distance séparant d de P est $\underline{\underline{11}}$.