TRIGONOMETRIE

Corrigé des exercices

Exercice 1

a) $-2179° = -6 \cdot 360° - 19° = \underline{\underline{-19°}}$ ou $-2179° = -7 \cdot 360° + 341° = \underline{\underline{341°}}$.

b) $1525° = 4 \cdot 360° + 85° = \underline{\underline{85°}}$.

c) $2412° = 6 \cdot 360° + 252° = \underline{\underline{252°}}$ ou $2412° = 7 \cdot 360° - 108° = \underline{\underline{-108°}}$.

d) $-3720° = -10 \cdot 360° - 120° = \underline{\underline{-120°}}$ ou $-3720° = -11 \cdot 360° + 240° = \underline{\underline{240°}}$.

e) $-10400° = -28 \cdot 360° - 320° = \underline{\underline{-320°}}$ ou $-10400° = -29 \cdot 360° + 40° = \underline{\underline{40°}}$.

f) Comme $2\pi \longleftrightarrow 360°$, on a $\pi \longleftrightarrow 180°$, $\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow 90°$ et $-\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-90° \text{ ou } 270°}}$.

g) On a $\frac{\pi}{3} \longleftrightarrow 60°$. Donc $\frac{22\pi}{3} = 22 \cdot 60° = 1320° = 3 \cdot 360° + 240° = \underline{\underline{240°}}$ ou
$\frac{22\pi}{3} = 4 \cdot 360° - 120° = \underline{\underline{-120°}}$.

h) On a $\frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45°$. Donc $-\frac{3\pi}{4} = \underline{\underline{-135°}}$ ou $-\frac{3\pi}{4} = -360° + 225° = \underline{\underline{225°}}$.

i) $33{,}7 \text{ rad} = 10{,}727 \cdot \pi = 10{,}727 \cdot 180° = 1930{,}87° = 5 \cdot 360° + 130{,}87° = \underline{\underline{130{,}87°}}$ ou
$33{,}7 \text{ rad} = 6 \cdot 360° - 229{,}13° = \underline{\underline{-229{,}13°}}$.

j) $3333 \text{ rad} = 1060{,}93 \cdot \pi = 1060{,}93 \cdot 180° = 190'966{,}83° = 530 \cdot 360° + 166{,}83° = \underline{\underline{166{,}83°}}$ ou
$3333 \text{ rad} = 531 \cdot 360° - 193{,}17° = \underline{\underline{-193{,}17°}}$.

k) $-13 \text{ rad} = -4{,}138 \cdot \pi = -4{,}138 \cdot 180° = -744{,}85° = -2 \cdot 360° - 24{,}85° = \underline{\underline{-24{,}85°}}$ ou
$-13 \text{ rad} = -3 \cdot 360° + 335{,}15° = \underline{\underline{335{,}15°}}$.

l) $-998 \text{ rad} = -317{,}67 \cdot \pi = -317{,}67 \cdot 180° = -57181{,}19° = -158 \cdot 360° - 301{,}19° = \underline{\underline{-301{,}19°}}$ ou
$-998 \text{ rad} = -159 \cdot 360° + 58{,}81° = \underline{\underline{58{,}81°}}$.

Exercice 2

On a $2\pi \text{ rad} = 360°$, i.e. $\pi \text{ rad} = 180°$.

a) $150° = \frac{5}{6} \cdot 180° = \frac{5}{6}\pi = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$

$225° = \frac{5}{4} \cdot 180° = \frac{5}{4}\pi = \frac{5\pi}{4} \text{ rad.}$

$300° = \frac{5}{6} \cdot 360° = \frac{5}{6} \cdot 2\pi = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad.}$

$210° = 7 \cdot 30° = 7 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad.}$

$315° = \frac{21}{2} \cdot 30° = \frac{21}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{21\pi}{12} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad.}$

$330° = 11 \cdot 30° = 11 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad.}$

$30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$

$45° = \frac{1}{4} \cdot 180° = \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$

$24° = \frac{4}{5} \cdot 30° = \frac{4}{5} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{15} \text{ rad}$

$729° = 2 \cdot 360° + 9° = 2 \cdot 2\pi + \frac{1}{5} 45° = 2 \cdot 2\pi + \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{20} = \frac{81\pi}{20} \text{ rad.}$

b) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \cdot 180° = 3 \cdot 45° = 135°.$

$\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{6} \cdot \pi = \frac{5}{6} \cdot 180° = 5 \cdot 30° = 150°.$

$\frac{29\pi}{12} = \frac{29}{12} \cdot \pi = \frac{29}{12} \cdot 180° = 29 \cdot 15° = 435°.$

$\frac{8\pi}{15} = \frac{8}{15} \cdot \pi = \frac{8}{15} \cdot 180° = 8 \cdot 12° = 96°.$

$2{,}14 = \frac{2{,}14}{\pi} \cdot \pi = \frac{2{,}14}{\pi} \cdot 180° = 122{,}6°.$

$5{,}6 = \frac{5{,}6}{\pi} \cdot \pi = \frac{5{,}6}{\pi} \cdot 180° = 320{,}9°.$

$2{,}15 = \frac{2{,}15}{\pi} \cdot \pi = \frac{2{,}15}{\pi} \cdot 180° = 123{,}2°.$

$3 = \frac{3}{\pi} \cdot \pi = \frac{3}{\pi} \cdot 180° = 171{,}9°.$

Exercice 3

$1560° = 4 \cdot 360° + 120° = 120° = \frac{2}{3} \cdot 180° = \frac{2}{3} \cdot \pi = \frac{2\pi}{3}.$

$3510° = 9 \cdot 360° + 270° = 270° = \frac{3}{2} \cdot 180° = \frac{3}{2} \cdot \pi = \frac{3\pi}{2}.$

$2340° = 6 \cdot 360° + 180° = 180° = \pi$

$-1220° = -3 \cdot 360° - 140° = -140° = -\frac{7}{9} \cdot 180° = -\frac{7}{9} \cdot \pi = -\frac{7\pi}{9}$ ou

$= -4 \cdot 360° + 220° = 220° = \frac{11}{9} \cdot 180° = \frac{11}{9} \cdot \pi = \frac{11\pi}{9}$

$-2970° = -8 \cdot 360° - 90° = -90° = -\frac{\pi}{2}$ ou

$= -9 \cdot 360° + 270° = 270° = \frac{3}{2} \cdot 180° = \frac{3}{2} \cdot \pi = \frac{3\pi}{2}.$

Exercice 4

a) $24°\,6'\,36'' = 24° + \frac{6}{60} + \frac{36}{3600} = 24° + 0{,}1° + 0{,}01° = \underline{\underline{24{,}11°}}.$

$1°\,57'\,11'' = 1° + \frac{57}{60} + \frac{11}{3600} = 1° + 0{,}95° + 0{,}0030\overline{5} = \underline{\underline{1{,}95305\overline{5}\,°}}.$

$2°\,7'\,30'' = 2° + \frac{7}{60} + \frac{30}{3600} = \underline{\underline{2{,}125\,°}}.$

$124°\,36'\,12'' = 124° + \frac{36}{60} + \frac{12}{3600} = \underline{\underline{124{,}60\overline{3}\,°}}.$

b) $1{,}125° = 1° + 0{,}125° = 1° + \frac{7{,}5}{60} = 1° + \frac{7}{60} + \frac{0{,}5}{60} = 1° + \frac{7}{60} + \frac{30}{3600} = \underline{\underline{1°\,7'\,30''}}.$

$36{,}75° = 36° + 0{,}75° = 36° + \frac{45}{60} = \underline{\underline{36°\,45'\,0''}}.$

$0{,}66° = 0° + 0{,}66° = 0° + \frac{39{,}6}{60} = 0° + \frac{39}{60} + \frac{0{,}6}{60} = 0° + \frac{39}{60} + \frac{36}{3600} = \underline{\underline{0°\,39'\,36''}}.$

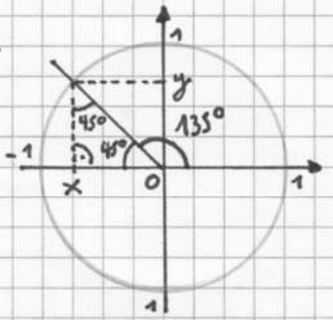
$17{,}505° = 17° + 0{,}505° = 17° + \frac{30{,}3}{60} = 17° + \frac{30}{60} + \frac{0{,}3}{60} = 17° + \frac{30}{60} + \frac{18}{3600} = \underline{\underline{17°\,30'\,18''}}.$

$4{,}64° = 4° + 0{,}64° = 4° + \frac{38{,}4}{60} = 4° + \frac{38}{60} + \frac{0{,}4}{60} = 4° + \frac{38}{60} + \frac{24}{3600} = \underline{\underline{4°\,38'\,24''}}.$

Exercice 5

α	135	60	-150	-45	120	330	-135	510	-480	210
$\cos(\alpha)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

1.



On a : $|y| = |x|$ et $x^2 + y^2 = 1$

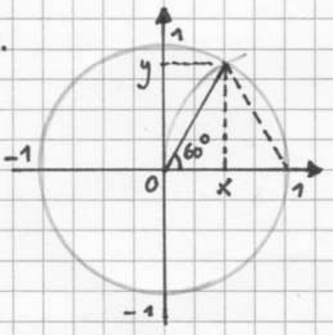
$\Rightarrow x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ici : $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.



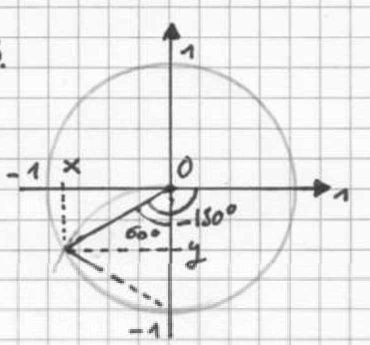
On a : $x = \frac{1}{2}$ et $x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.



On a : $y = -\frac{1}{2}$ et $x^2 + y^2 = 1$

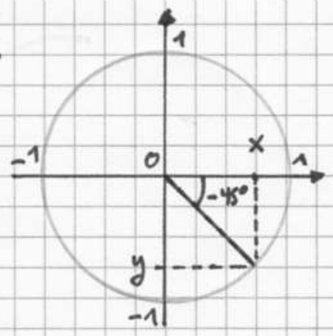
$\Rightarrow x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ici : $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

4.

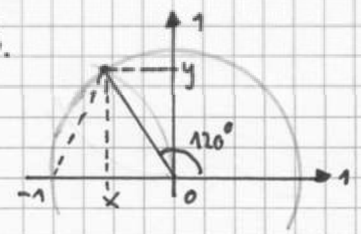


Se résoud similairement à 1.

On trouve $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, i.e.

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.

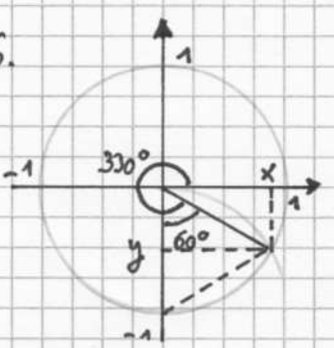


Se résoud similairement à 2.

On trouve $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i.e.

$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6.

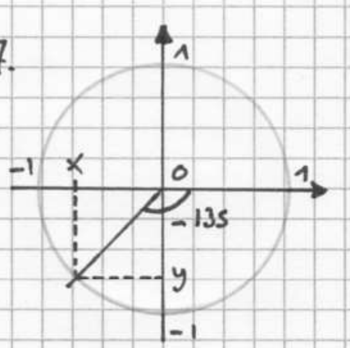


Se résoud similairement à 3.

On trouve $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y=-\frac{1}{2}$, i.e.

$\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha)=-\frac{1}{2}$.

7.

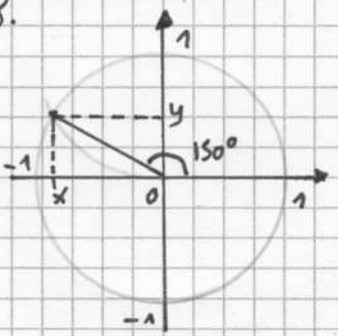


Se résoud similairement à 1.

On trouve $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, i.e.

$\cos(\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.



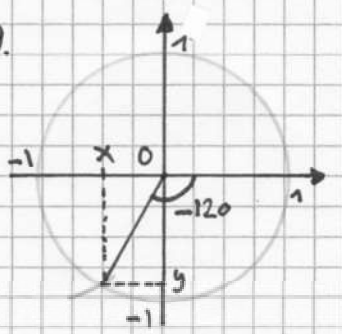
On a $510°=360°+150°$.

Similairement à 3., on obtient

$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y=\frac{1}{2}$, i.e.

$\cos(\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha)=\frac{1}{2}$.

9.



On a $-480°=-360°-120°$.

Similairement à 5., on obtient

$x=-\frac{1}{2}$ et $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, i.e.

$\cos(\alpha)=-\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. On a $210°=360°-150°=-150°$, ce qui est la situation 3.

Ainsi $\cos(\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha)=-\frac{1}{2}$.

Exercice 6

a) $\cos(0{,}2\,\text{rad}) = \underline{\underline{0{,}980}}.$

b) $\sin(-1{,}3°) = \underline{\underline{-0{,}023}}.$

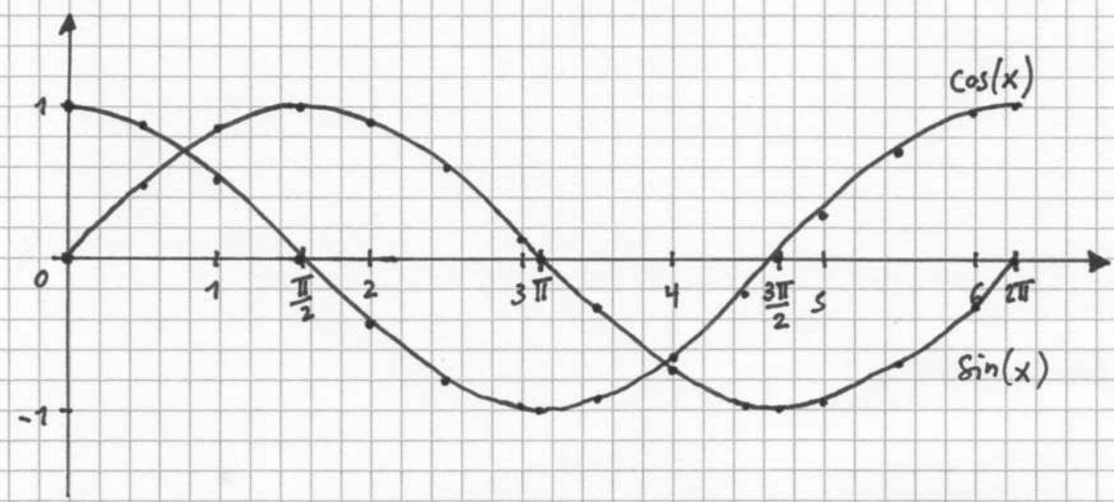
c) $\sin(2{,}15\,\text{rad}) = \underline{\underline{0{,}837}}.$

d) $\sin(4°12') = \sin\left(4° + \frac{12}{60}\right) = \sin(4{,}2°) = \underline{\underline{0{,}073}}.$

e) $\cos(15°4'30'') = \cos\left(15° + \frac{4}{60} + \frac{30}{3600}\right) = \cos(15{,}075°) = \underline{\underline{0{,}966}}.$

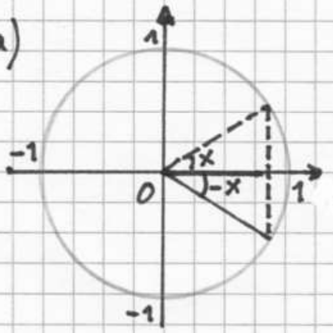
f) $\cos(3{,}7\,\text{rad}) = \underline{\underline{-0{,}848}}.$

Exercice 7



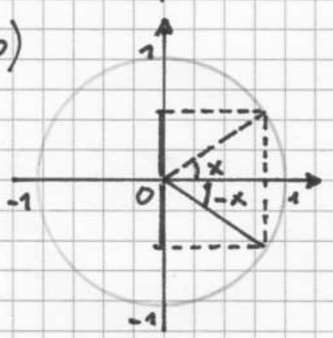
Exercice 8

a)



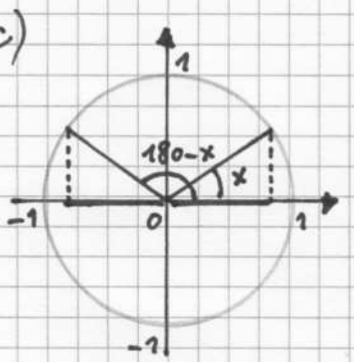
On a $\underline{\underline{\cos(-x) = \cos(x)}}$.

b)



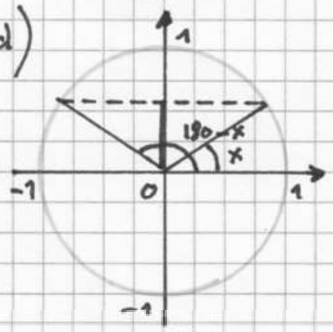
On a $\underline{\underline{\sin(-x) = -\sin(x)}}$.

c)



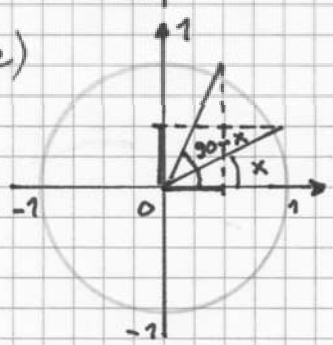
On a $\underline{\underline{\cos(180-x) = -\cos(x)}}$.

d)



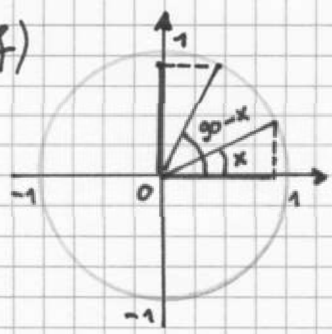
On a $\underline{\underline{\sin(180-x) = \sin(x)}}$.

e)



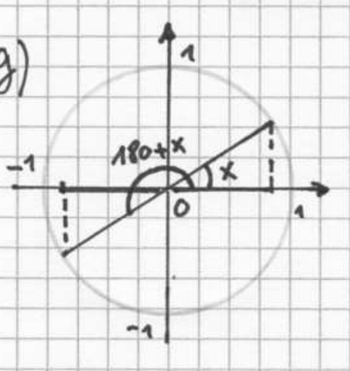
On a $\underline{\underline{\cos(90-x) = \sin(x)}}$.

f)



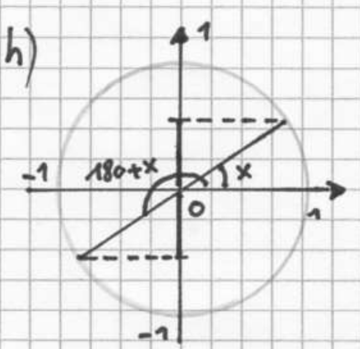
On a $\underline{\underline{\sin(90-x) = \cos(x)}}$.

g)



On a $\cos(180+x) = -\cos(x)$.

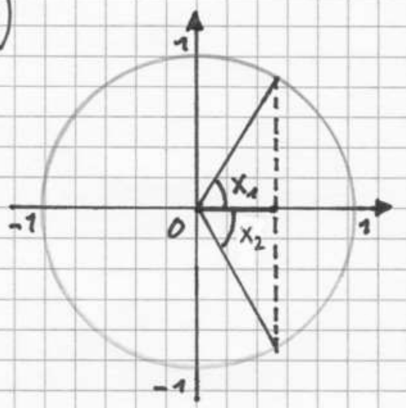
h)



On a $\sin(180+x) = -\sin(x)$.

Exercice 9

a)



A la machine à calculer, on a $\cos^{-1}(0{,}55) = 56{,}63°$.

Comme on peut ajouter ou soustraire le nombre de tours complets que l'on veut à cet angle et obtenir la même valeur pour son cosinus, on a $x_1 = 56{,}63° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

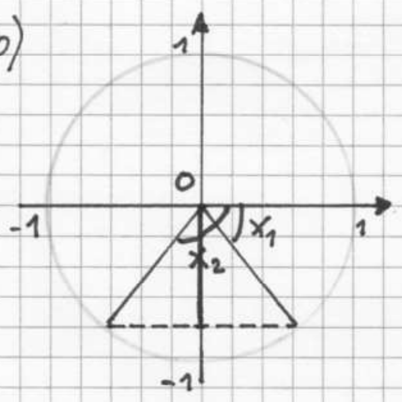
$-56{,}63°$ donne aussi un cosinus de $0{,}55$.

Similairement à x_1, on a alors $x_2 = -56{,}63° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi les x satisfaisant à $\cos(x) = 0{,}55$ sont :

$$\underline{\underline{x = 56{,}63° + k \cdot 360° \text{ et } x = -56{,}63° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$$

b)



A la machine à calculer, on a $\sin^{-1}(-0{,}8) = -53{,}13°$.

Comme on peut ajouter ou soustraire le nombre de tours complets que l'on veut à cet angle et obtenir la même valeur pour son sinus, on a $x_1 = -53{,}13° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

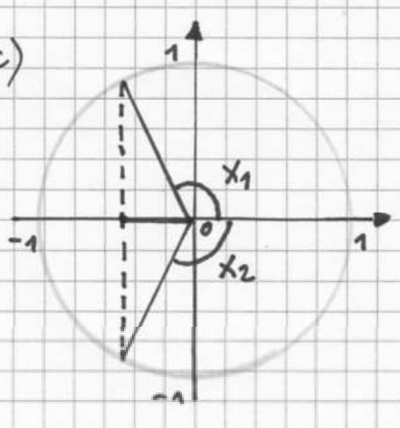
$x_2 = -180 - x_1$ $\left(|x_2| = 180 - |x_1| \right)$ donne aussi un sinus de $-0{,}8$.

Similairement à x_1, on a alors $x_2 = -126{,}87° + k \cdot 360,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi les x satisfaisant à $\sin(x) = -0{,}8$ sont :

$$\underline{\underline{x = -53{,}13° + k \cdot 360° \text{ et } x = -126{,}87° + k \cdot 360,\ k \in \mathbb{Z}.}}$$

c)



A la machine à calculer, on a $\cos^{-1}(-0{,}45) = 116{,}74°$.

Similairement à ci-dessus, on a alors $x_1 = 116{,}74° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

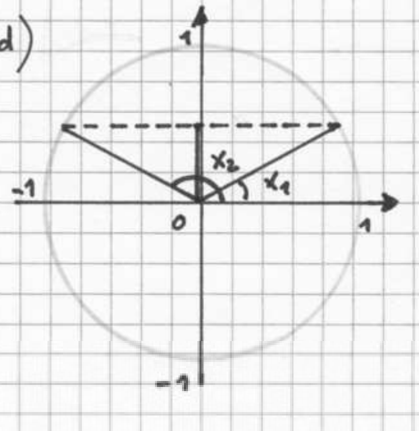
$x_2 = -x_1 = -116{,}74°$.

Donc $x_2 = -116{,}74° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi les x satisfaisant à $\cos(x) = -0{,}45$ sont :

$$\underline{\underline{x = 116{,}74° + k \cdot 360° \text{ et } x = -116{,}74° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$$

d)



A la machine à calculer, on a $\sin^{-1}(0{,}5) = 30°$.

Similairement à ci-dessus, on a alors $x_1 = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

On a $x_2 = 180° - x_1 = 180° - 30 = 150°$.

Donc $x_2 = 150° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi les x satisfaisant à $\sin(x) = 0{,}5$ sont :

$$\underline{\underline{x = 30° + k \cdot 360° \text{ et } x = 150° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.}}$$

Exercice 10

a) $2\cos(x) = -0{,}64 \Rightarrow \cos(x) = -0{,}32$.

A la machine à calculer, $\cos^{-1}(-0{,}32) = 1{,}90$ rad.

$\Rightarrow$ $x = 1{,}90 + k \cdot 2\pi$ rad et $x = -1{,}90 + k \cdot 2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $3\sin(x) = 0{,}7 \Rightarrow \sin(x) = \frac{7}{30}$.

A la machine à calculer, $\sin^{-1}\left(\frac{7}{30}\right) = 0{,}24$ rad.

$\pi - 0{,}24$ rad $= 2{,}91$ rad $\quad (\pi = 180°)$.

$\Rightarrow$ $x = 0{,}24 + k \cdot 2\pi$ rad et $x = 2{,}91 + k \cdot 2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $4\cos(x) = 0{,}5 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{8}$.

A la machine à calculer, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = 1{,}45$ rad.

$\Rightarrow$ $x = 1{,}45 + k \cdot 2\pi$ et $x = -1{,}45 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\sin(x) = -0{,}6$.

A la machine à calculer, $\sin^{-1}(-0{,}6) = -0{,}64$ rad.

$-\pi + 0{,}64$ rad $= -2{,}50$ rad.

$\Rightarrow$ $x = -0{,}64 + k \cdot 2\pi$ rad et $x = -2{,}50 + k \cdot 2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$.

e) $2\cos(x) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$.

A la machine à calculer, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2{,}09$ rad.

$\Rightarrow$ $x = 2{,}09 + k \cdot 2\pi$ rad et $x = -2{,}09 + k \cdot 2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$.

f) $3\cos(x) = 5 \Rightarrow \cos(x) = \frac{5}{3}$.

Or $|\cos(x)| \leq 1$, pour toute valeur de x.

Comme $\frac{5}{3} > 1$, il n'y a pas de solution.

g) $3\sin^2(x) = \cos^2(x)$: on sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Ainsi on a : $3(1 - \cos^2(x)) = \cos^2(x) \Rightarrow 3 - 3\cos^2(x) = \cos^2(x) \Rightarrow 4\cos^2(x) = 3$

$\Rightarrow \cos^2(x) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A la machine à calculer, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}52$ et $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{,}62$ rad.

$\Rightarrow$ $x = 0{,}52 + k \cdot 2\pi$ rad et $x = -0{,}52 + k \cdot 2\pi$ rad et $x = 2{,}62 + k \cdot 2\pi$ rad et

$x = -2{,}62 + k \cdot 2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$.

h) $3\sin^2(x) - \cos^2(x) = 1$: on sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Ainsi on a : $3(1 - \cos^2(x)) - \cos^2(x) = 1 \Rightarrow 3 - 3\cos^2(x) - \cos^2(x) = 1$

$\Rightarrow 4\cos^2(x) = 2 \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

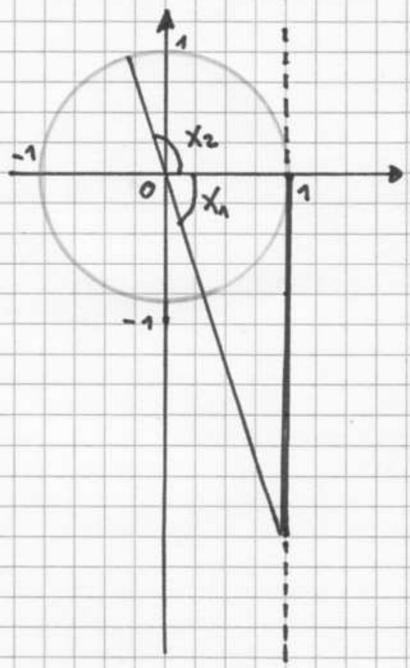
A la machine à calculer, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}79$ rad et $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2{,}36$ rad.

$\Rightarrow$ $x = 0{,}79 + k.2\pi$ rad et $x = -0{,}79 + k.2\pi$ rad et $x = 2{,}36 + k.2\pi$ rad et $x = -2{,}36 + k.2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$.

i) $3\cos(x) + \sin(x) \Rightarrow \sin(x) = -3\cos(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -3.$

Par définition, $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$.

On a donc : $\tan(x) = -3$.



A la machine à calculer, on a $\tan(-3) = -1{,}25$ rad.

Ainsi $x_1 = -1{,}25 + k.2\pi$ rad.

x_2 est le complémentaire de x_1 $(x_1 + x_2 = \pi = 180°)$.

Ainsi $x_2 = \pi + x_1 + k.2\pi \text{ rad} = -1{,}25 + \pi + k.2\pi \text{ rad} =$

$= -1{,}25 + (1 + 2k)\pi$ rad.

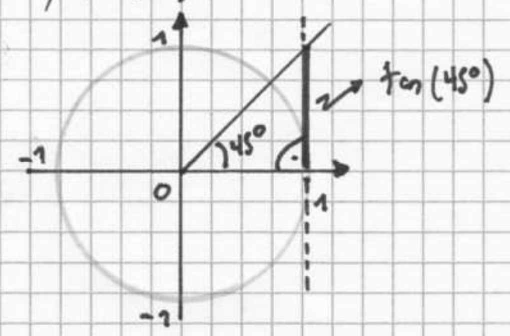
Comme $2k$ représente les nombres pairs (de $\mathbb{Z}$) et $(1+2k)$ les nombres impairs (de $\mathbb{Z}$), on peut écrire

$x = -1{,}25 + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions sont donc $x = -1{,}25 + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

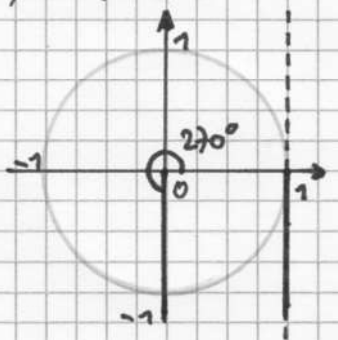
Exercice 11

a) $\tan(45°)$:



Le triangle est isocèle (il a 2 angles de 45°).
Il a donc 2 côtés isométriques.
On en déduit que $\underline{\underline{\tan(45°) = 1}}$.

b) $\tan(270°)$:

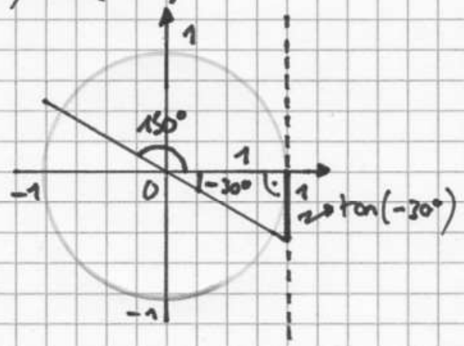


Lorsque $\alpha \xrightarrow[<]{} 270°$, on a $\tan(\alpha) \to +\infty$.

Lorsque $\alpha \xrightarrow[>]{} 270°$, on a $\tan(\alpha) \to -\infty$.

Ainsi $\underline{\underline{\tan(270°) \text{ n'existe pas}}}$.

c) $\tan(150°)$:



On a $\tan(150°) = \tan(-30°)$

Le petit triangle est rectangle et est la moitié d'un triangle équilatéral (ses angles sont 30°, 60°, 90°).

On a alors $\tan^2(-30°) + 1^2 = (2\tan(-30°))^2$

$\Rightarrow \tan^2(-30°) + 1 = 4\tan^2(-30°)$

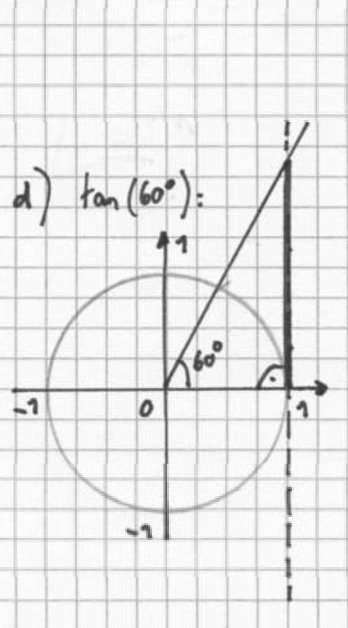
$\Rightarrow 3\tan^2(-30°) = 1 \Rightarrow \tan^2(-30°) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan(-30°) = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(on prend le moins car $\tan(-30°)$ doit être < 0).

Ainsi $\underline{\underline{\tan(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}}}$.

d) $\tan(60°)$:



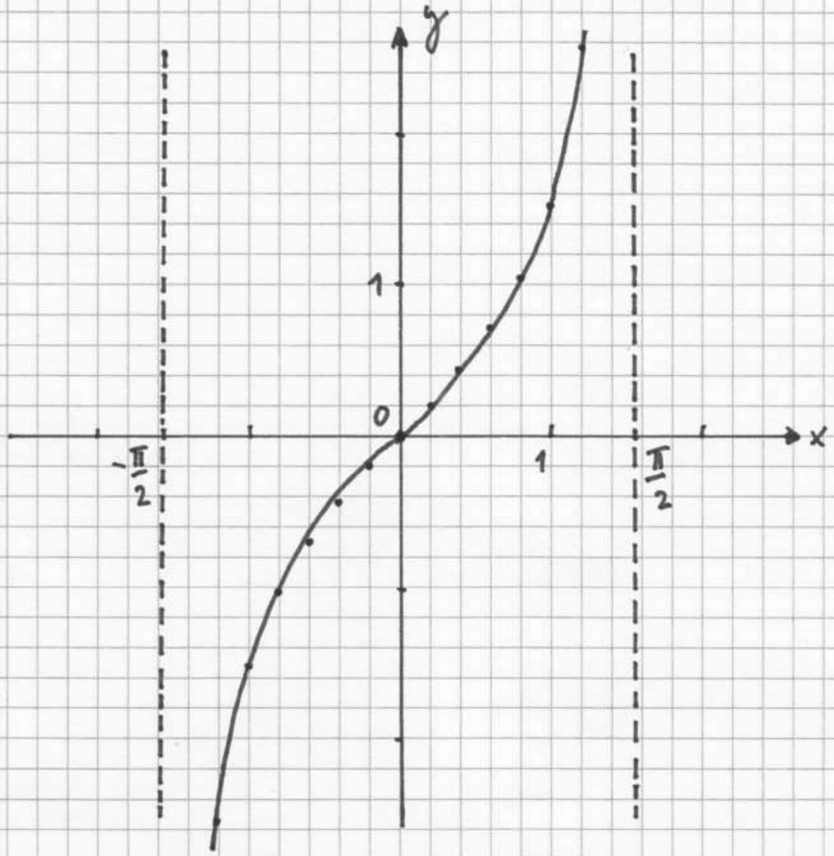
Le triangle rectangle est la moitié d'un triangle équilatéral (ses angles sont 30°, 60°, 90°).

On a alors $1^2 + \tan^2(60°) = 2^2$

$\Rightarrow \tan^2(60°) = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \tan(60°) = \sqrt{3}$.

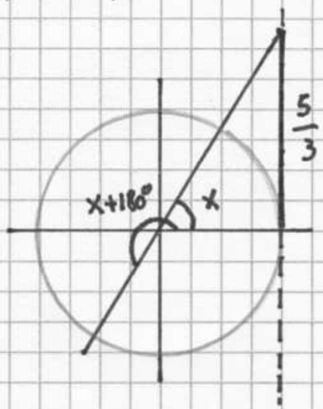
Ainsi $\underline{\tan(60°) = \sqrt{3}}$.

Exercice 12



Exercice 13

a) $3\tan(x) = 5 \Rightarrow \tan(x) = \frac{5}{3}$: A la machine à calculer: $\tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59,04°$.



Ainsi $x = 59,04° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\tan(2x) = 1 \Rightarrow \tan(2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 26,57° + k \cdot 180° \Rightarrow x = 13,28° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $3\tan(4x) = 6 \Rightarrow \tan(4x) = 2 \Rightarrow 4x = 63,43° + k \cdot 180° \Rightarrow x = 15,86° + k \cdot 45°,\ k \in \mathbb{Z}$.

d) $2\sin(3x) = 3\cos(3x) \Rightarrow \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan(3x) = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x = 56,31° + k \cdot 180°$
$\Rightarrow x = 18,77° + k \cdot 60°,\ k \in \mathbb{Z}$.

e) $3\cos(x) - 4\tan(x) = 0 \Rightarrow 3\cos(x) - 4\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \Rightarrow 3\cos^2(x) - 4\sin(x) = 0$;
comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ et on obtient:
$3(1 - \sin^2(x)) - 4\sin(x) = 0 \Rightarrow 3 - 3\sin^2(x) - 4\sin(x) = 0 \Rightarrow 3\sin^2(x) + 4\sin(x) - 3 = 0$.
En posant $y = \sin(x)$, on obtient l'équation du deuxième degré $3y^2 + 4y - 3 = 0$.
On a: $a = 3$, $b = 4$ et $c = -3$; $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 16 + 36 = 52$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{52}$;
ainsi $y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{52}}{2 \cdot 3} = 0,535$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{52}}{2 \cdot 3} = -1,869$.
Avec $y_1 = 0,535$ et $y = \sin(x)$, on trouve $x = 32,36° + k \cdot 360°$ et $x = 147,64° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.
Avec $y_2 = -1,869$ et $y = \sin(x)$, on ne trouve pas de solution puisque $|\sin(x)| \leq 1$.
Les solutions sont donc $x = 32,36° + k \cdot 360°$ et $x = 147,64° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

f) $\sin(x) \cdot \tan(x) = 8 \Rightarrow \sin(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 8 \Rightarrow \sin^2(x) = 8\cos(x)$;
Comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ et on obtient:
$1 - \cos^2(x) = 8\cos(x) \Rightarrow \cos^2(x) + 8\cos(x) - 1 = 0$.
En posant $y = \cos(x)$, on obtient l'équation du deuxième degré $y^2 + 8y - 1 = 0$.
On a: $a = 1$, $b = 8$ et $c = -1$; $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 64 + 4 = 68$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{68}$;
ainsi $y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{68}}{2 \cdot 1} = 0,123$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{-8-\sqrt{68}}{2 \cdot 1} = -8,123$.
Avec $y_1 = 0,123$ et $y = \cos(x)$, on trouve $x = 82,93° + k \cdot 360°$ et $x = -82,93° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.
Avec $y_2 = -8,123$ et $y = \cos(x)$, on ne trouve pas de solution puisque $|\cos(x)| \leq 1$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x = 82,93° + k.360° \text{ et } x = -82,93° + k.360°, \ k \in \mathbb{Z}}}$.

g) $2\sin(x) - 5\cos(x) = 0 \implies 2\sin(x) = 5\cos(x) \implies \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{5}{2} \implies \tan(x) = \frac{5}{2}$

$\implies \underline{\underline{x = 68,20° + k.180°, \ k \in \mathbb{Z}}}$.

h) $5\cos(x) + \sin(x) = 0 \implies \sin(x) = -5\cos(x) \implies \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -5 \implies \tan(x) = -5$

$\implies \underline{\underline{x = -78,69° + k.180°, \ k \in \mathbb{Z}}}$.

i) $\tan^2(x) - 12 = 0 \implies \tan^2(x) = 12 \implies \tan(x) = \pm\sqrt{12}$.

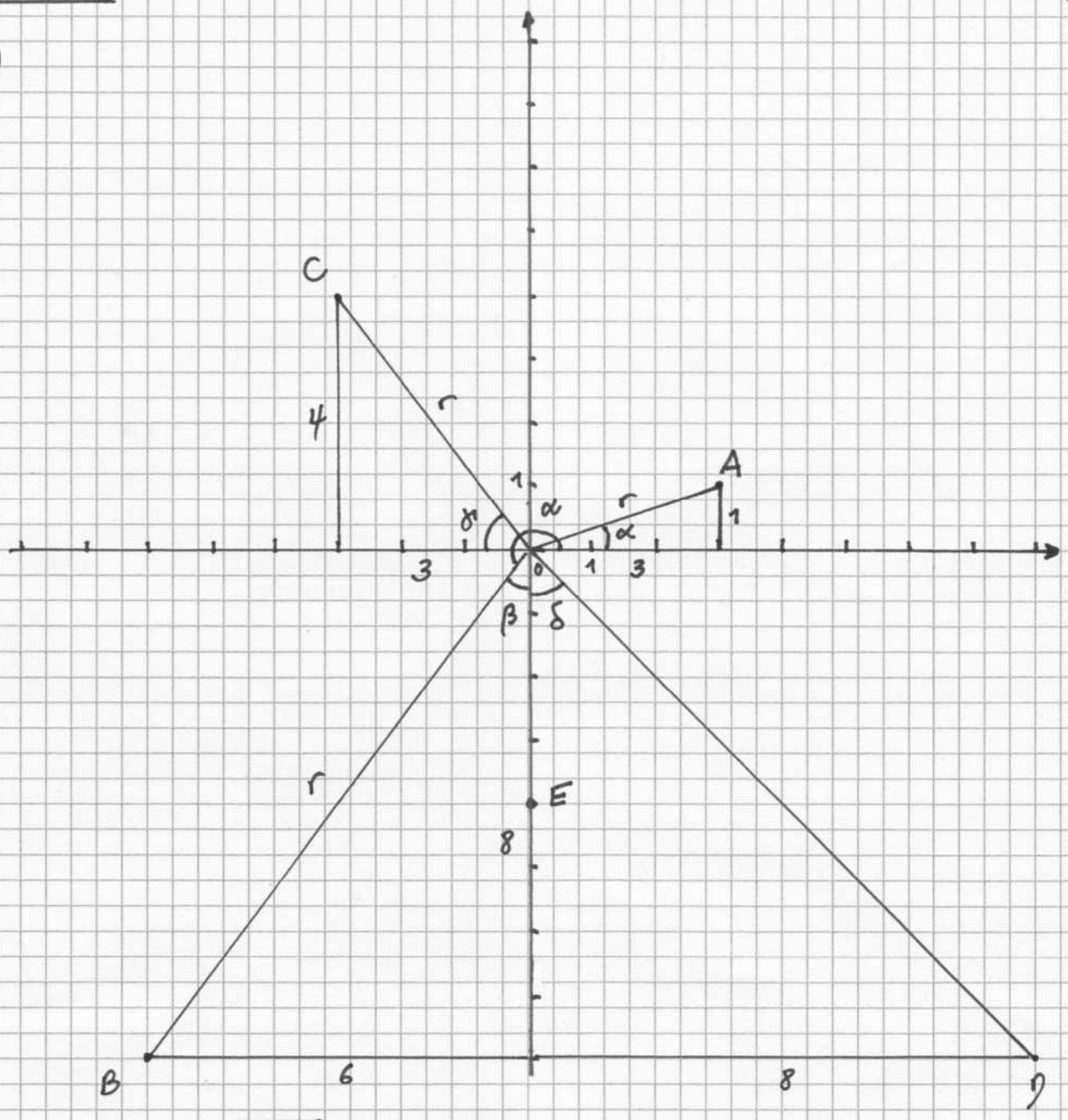
Avec $\tan(x) = \sqrt{12} \implies x = 73,90° + k.180°, \ k \in \mathbb{Z}$.

Avec $\tan(x) = -\sqrt{12} \implies x = -73,90° + k.180°, \ k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x = 73,90° + k.180° \text{ et } x = -73,90° + k.180°, \ k \in \mathbb{Z}}}$.

Exercice 14

a)



Pour A: on a $r = \sqrt{3^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{10}}}$ et $\tan(\alpha) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 18,43^\circ}}$.

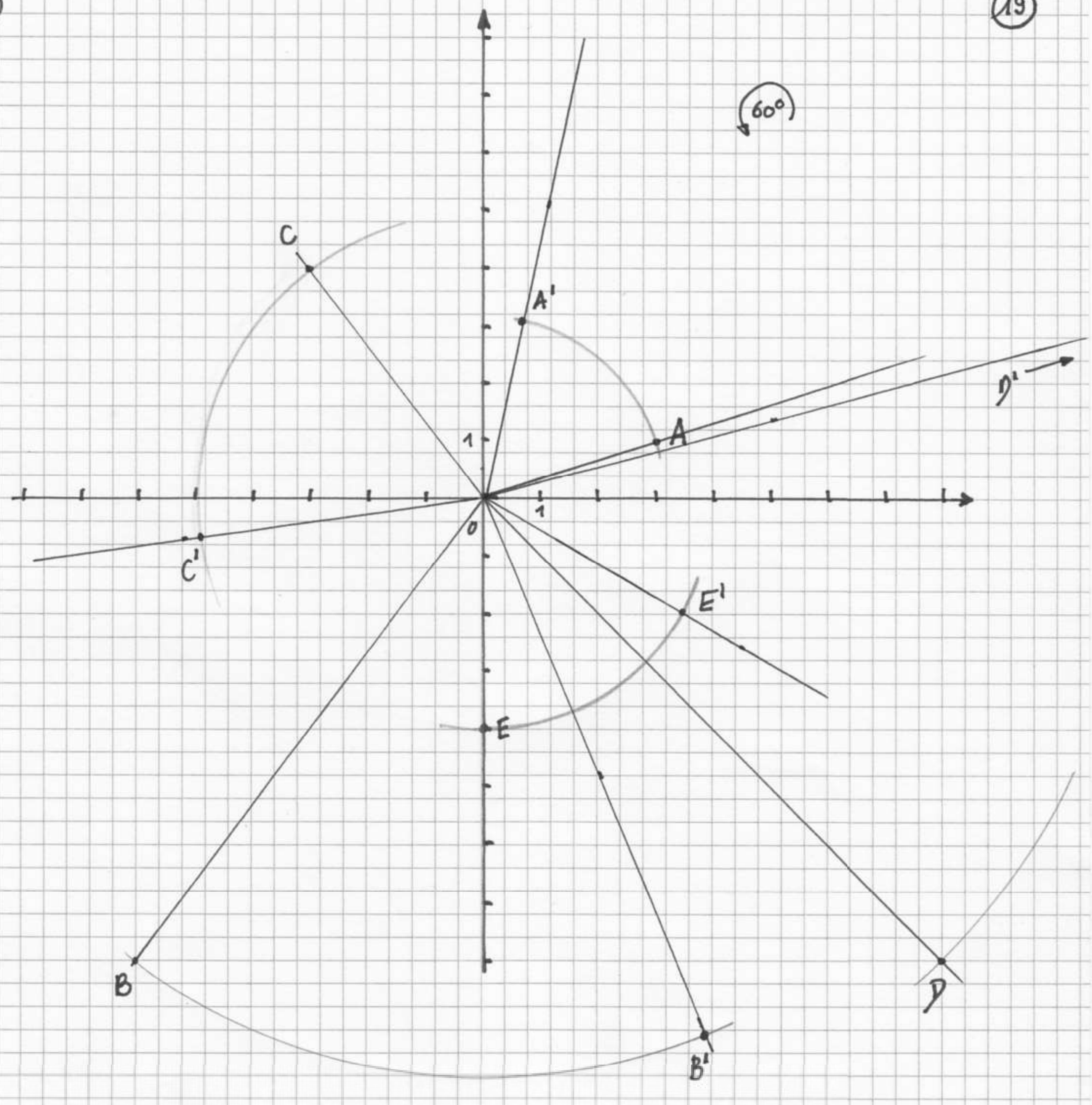
Pour B: on a $r = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$ et $\tan(\beta) = \dfrac{6}{8} \Rightarrow \beta = 36,87^\circ$;
ainsi $\alpha = 270^\circ - 36,87^\circ = \underline{\underline{233,13^\circ}}$.

Pour C: on a $r = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$ et $\tan(\gamma) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \gamma = 53,13^\circ$;
ainsi $\alpha = 180^\circ - 53,13^\circ = \underline{\underline{126,87^\circ}}$.

Pour D: on a $r = \sqrt{8^2+(-8)^2} = \sqrt{64+64} = \underline{\underline{\sqrt{128} = 8\sqrt{2}}}$ et $\tan(\delta) = \dfrac{8}{8} = 1$
$\Rightarrow \delta = 45^\circ$; ainsi $\alpha = 270^\circ + 45^\circ = \underline{\underline{315^\circ}}$.

Pour E: on a $\underline{\underline{r = 4}}$ et $\underline{\underline{\alpha = 270^\circ}}$.

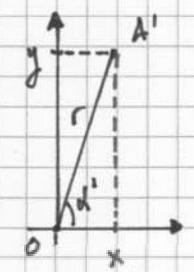
b)



Pour A, on avait $r = \sqrt{10}$ et $\alpha = 18,43°$.

Pour A', on a donc $r = \sqrt{10}$ et $\alpha' = 18,43° + 60° = 78,43°$.

Les coordonnées de A' sont alors :



on a : $\cos\alpha' = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha'$

$\sin\alpha' = \dfrac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\alpha'$

$x = r\cos\alpha' = \sqrt{10}\cos(78,43°) = 0,634$ et

$y = r\sin\alpha' = \sqrt{10}\sin(78,43°) = 3,098$

$\Rightarrow \underline{\underline{A'(0,634 ; 3,098)}}$.

Pour B, on avait $r = 10$ et $\alpha = 233,13°$.

Pour B', on a donc $r = 10$ et $\alpha' = 233,13° + 60° = 293,13°$.

Les coordonnées de B' sont alors : $x = r\cos\alpha' = 10 \cdot \cos(293,13°) = 3,928$ et

$y = r\sin\alpha' = 10 \cdot \sin(293,13°) = -9,196$.

$\Rightarrow \underline{\underline{B'(3,928\,;\,-9,196)}}$.

Pour C, on avait $r = 5$ et $\alpha = 126,87°$.

Pour C', on a donc $r = 5$ et $\alpha' = 126,87° + 60° = 186,87°$.

Les coordonnées de C' sont alors : $x = r\cos\alpha' = 5\cos(186,87°) = -4,964$ et

$y = r\sin\alpha' = 5\sin(186,87°) = -0,598$.

$\Rightarrow \underline{\underline{C'(-4,964\,;\,-0,598)}}$.

Pour D, on avait $r = 8\sqrt{2}$ et $\alpha = 315°$.

Pour D', on a donc $r = 8\sqrt{2}$ et $\alpha' = 315° + 60° = 375°$.

Les coordonnées de D' sont alors : $x = r\cos\alpha' = 8\sqrt{2}\cos(375°) = 10,928$ et

$y = r\sin\alpha' = 8\sqrt{2}\sin(375°) = 2,928$.

$\Rightarrow \underline{\underline{D'(10,928\,;\,2,928)}}$.

Pour E, on avait $r = 4$ et $\alpha = 270°$.

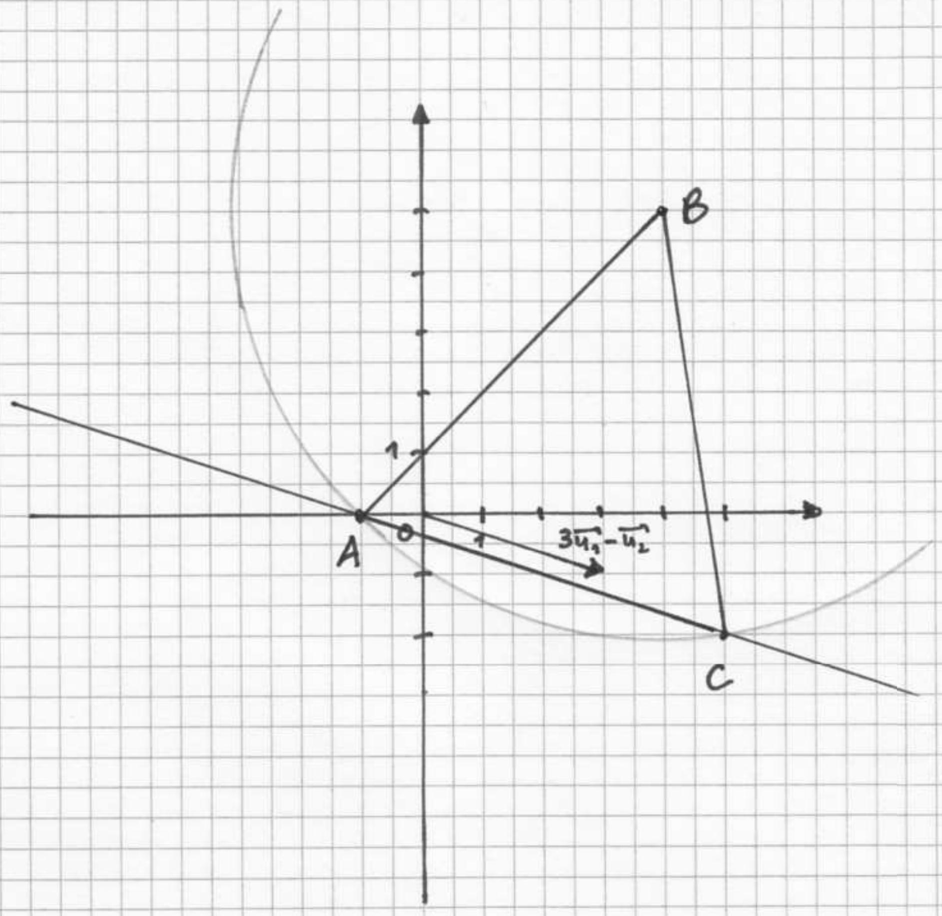
Pour E', on a donc $r = 4$ et $\alpha' = 270° + 60° = 330°$.

Les coordonnées de E' sont alors : $x = r\cos\alpha' = 4\cos(330°) = 3,464$ et

$y = r\sin\alpha' = 4\sin(330°) = -2$.

$\Rightarrow \underline{\underline{E'(3,464\,;\,-2)}}$.

Exercice 15



D'après le dessin, on a $C(5\,;-2)$.

AC est parallèle à $3\vec{u_1}-\vec{u_2}$. AC est donc parallèle au vecteur $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Il est perpendiculaire à $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et la droite d_{AC} a pour équation cartésienne :

$x+3y+c=0$.

Avec $A(-1\,;0)$, on trouve $-1+3\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=1$.

Ainsi, on a : $d_{AC}:\ x+3y+1=0$

De plus $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}$.

En posant $C(x\,;y)$, on a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-4\\y-5\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{BC}\|=$

$=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$.

On doit donc avoir $\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=\sqrt{50} \Rightarrow (x-4)^2+(y-5)^2=50$.

De $x+3y+1=0$, on tire $x=-3y-1$. Ainsi $x-4=-3y-1-4=-3y-5$.

On doit donc avoir $(-3y-5)^2+(y-5)^2=50 \Rightarrow 9y^2+30y+25+y^2-10y+25=50$

$\Rightarrow 10y^2+20y+50=50 \Rightarrow 10y^2+20y=0 \Rightarrow 10y(y+2)=0$

$\Rightarrow$ soit $10y=0$, i.e. $y=0$, soit $y+2=0$, i.e. $y=-2$.

Avec $y=0$, on a $x=-3y-1=-1$, ce qui donne le point A.

Avec $y=-2$, on a $x=-3y-1=6-1=5$, ce qui donne le point $C(5\,;-2)$.

Calculons l'angle $\widehat{ABC}$. On sait que $\cos(\widehat{ABC})=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}$.

On a : $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix};$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 1 + (-5) \cdot (-7) = -5 + 35 = 30;$

$\| \overrightarrow{BA} \| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$

$\| \overrightarrow{BC} \| = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

Ainsi $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{30}{5\sqrt{2}\,5\sqrt{2}} = \dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5}$, d'où $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) = 53,13°$.

Comme le triangle ABC est isocèle ($AB = BC$), on a :
$\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{1}{2}(180° - 53,13°) = 63,43°.$

Ainsi $\underline{\underline{\widehat{ABC} = 53,13° \text{ et } \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 63,43°.}}$

Exercice 16

a) Un vecteur directeur de a est $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ (puisque $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à a).

Un vecteur directeur de b est $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ (puisque $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à b).

L'angle aigu α entre a et b est alors donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$.

On a : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 12 + (-3) \cdot (-5) = 48 + 15 = 63$;

$\|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$;

$\|\vec{b}\| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$.

Ainsi $\cos(\alpha) = \dfrac{63}{5 \cdot 13} = \dfrac{63}{65}$, d'où $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{63}{65}\right) = \underline{\underline{14{,}25°}}$.

b) <u>Avec l'axe x :</u> un vecteur directeur de a est $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$;

un vecteur directeur de l'axe x est $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

l'angle β entre a et l'axe x est donné par $\cos(\beta) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{e_1}|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{e_1}\|}$;

on a : $\vec{a} \cdot \vec{e_1} = 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 = 4$;

$\|\vec{a}\| = 5$; $\|\vec{e_1}\| = 1$;

ainsi : $\cos(\beta) = \dfrac{4}{5 \cdot 1} = \dfrac{4}{5}$, d'où $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right) = \underline{\underline{36{,}87°}}$.

<u>Avec l'axe y :</u> un vecteur directeur de a est $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$;

un vecteur directeur de l'axe y est $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

l'angle γ entre a et l'axe y est donné par $\cos(\gamma) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{e_2}|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{e_2}\|}$;

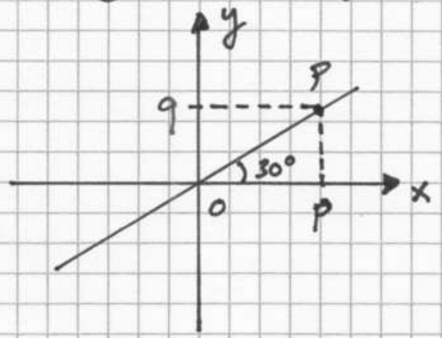
on a : $\vec{a} \cdot \vec{e_2} = 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = -3$;

$\|\vec{a}\| = 5$; $\|\vec{e_2}\| = 1$;

ainsi : $\cos(\gamma) = \dfrac{|-3|}{5 \cdot 1} = \dfrac{3}{5}$, d'où $\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \underline{\underline{53{,}13°}}$.

Exercice 17

L'équation d'une droite qui passe par l'origine est de la forme $y = ax$, où a est la pente de la droite :



Pour un point $P(p;q)$ de la droite, on doit avoir : $q = a \cdot p$.

En outre : $\tan(30°) = \frac{q}{p} \Rightarrow q = p \cdot \tan(30°)$.

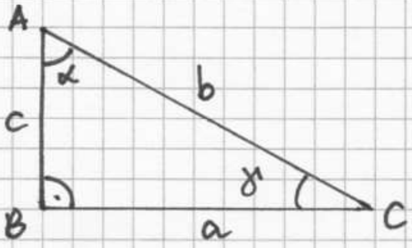
En combinant ces deux relations, on obtient $a \cdot p = p \cdot \tan(30°) \Rightarrow a = \tan(30°)$

Par symétrie, la droite de pente $-a$ fait aussi un angle de 30° avec l'axe des abscisses.

On a donc $a = \pm \tan(30°)$.

Les droites cherchées sont donc $y = \pm \tan(30°) \cdot x$, i.e. $\underline{\underline{y = \pm 0{,}577x}}$.

Exercice 18



On a les relations:

$\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$, $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$,

$\cos(\gamma) = \frac{a}{b}$, $\sin(\gamma) = \frac{c}{b}$, $\tan(\gamma) = \frac{c}{a}$,

$b^2 = a^2 + c^2$, $\alpha + \gamma = 90°$.

a) $b = 17,\ a = 8 \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{8}{17} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 28{,}07°}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma}} = 90 - 28{,}07 = \underline{\underline{61{,}93°}}$.

$\underline{\underline{c}} = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = \underline{\underline{15}}$.

b) $b = 6,\ \gamma = 64° \Rightarrow \underline{\underline{a}} = b\cos(\gamma) = 6 \cdot \cos(64°) = \underline{\underline{2{,}63}}$.

$\underline{\underline{c}} = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{6^2 - 2{,}63^2} = \underline{\underline{5{,}39}}$.

$\underline{\underline{\alpha}} = 90° - 64° = \underline{\underline{26°}}$.

c) $\alpha = 24°,\ a = 13 \Rightarrow \underline{\underline{b}} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{13}{\sin(24°)} = \underline{\underline{31{,}96°}}$.

$\underline{\underline{c}} = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{31{,}96^2 - 13^2} = \underline{\underline{29{,}20}}$.

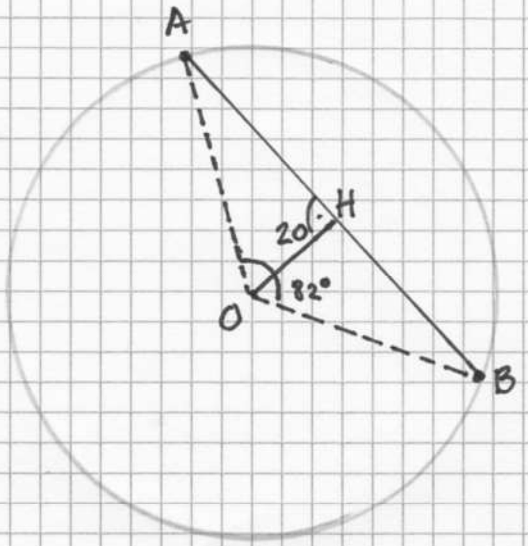
$\underline{\underline{\gamma}} = 90° - 24° = \underline{\underline{66°}}$.

d) $a = 50,\ c = 120 \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{50}{120} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 22{,}62°}}$.

$\underline{\underline{b}} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{50^2 + 120^2} = \underline{\underline{130}}$.

$\underline{\underline{\gamma}} = 90° - \alpha = 90 - 22{,}62 = \underline{\underline{67{,}38°}}$.

Exercice 19



Le triangle OAH est rectangle en H.

L'angle $\alpha = \widehat{AOH}$ vaut $\frac{82^\circ}{2} = 41^\circ$.

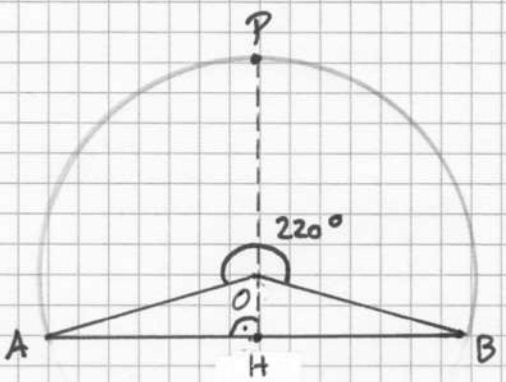
On a $\tan(\alpha) = \frac{AH}{OH}$, d'où

$AH = OH \cdot \tan(\alpha) = 20 \cdot \tan(41^\circ) = 17{,}386$ cm.

Par conséquent, la longueur de la corde est

$AB = 2AH = 2 \cdot 17{,}386 = \underline{\underline{34{,}77 \text{ cm.}}}$

Exercice 20



Le rayon de l'arc de cercle est OA.

Le triangle AHO est rectangle en H.

On a : $\widehat{AOB} = 360° - 220° = 140°$.

Ainsi $\alpha = \widehat{AOH} = \frac{140°}{2} = 70°$.

De plus $AH = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

On a $\sin(\alpha) = \frac{AH}{AO} \Rightarrow AO = \frac{AH}{\sin(\alpha)}$.

Ainsi $AO = \frac{6}{\sin(70°)} = 6{,}385\,m$.

Le rayon de l'arc de cercle est donc $\underline{\underline{6{,}385\,m}}$.

La hauteur maximale de la voûte est PH.

On a : $PH = OP + OH$.

$OP = OA = 6{,}385\,m$.

Calculons OH : dans le triangle rectangle AHO, on a :

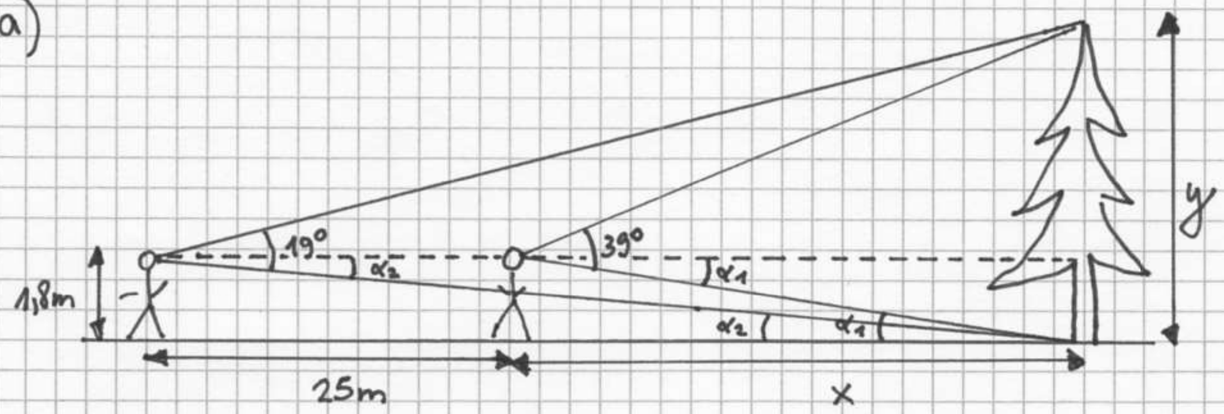
$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{6{,}385^2 - 6^2} = 4{,}769$.

Ainsi $PH = 6{,}385 + 4{,}769 = 11{,}15\,m$.

La hauteur maximale est donc de $\underline{\underline{11{,}15\,m}}$.

Exercice 21

a)



On a : $\tan(\alpha_1) = \frac{1,8}{x}$ et $\tan(\alpha_2) = \frac{1,8}{x+25}$;

$$\tan(39° - \alpha_1) = \frac{y-1,8}{x} \text{ et } \tan(19° - \alpha_2) = \frac{y-1,8}{x+25}.$$

De plus, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$ (voir "Formulaires et tables", p. 28).

Ici $\alpha = 39°$ et $\beta = \alpha_1$.

Ainsi $\tan(39° - \alpha_1) = \frac{\tan(39°) - \tan(\alpha_1)}{1 + \tan(39°)\tan(\alpha_1)}$.

De même, $\tan(19° - \alpha_2) = \frac{\tan(19°) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(19°)\tan(\alpha_2)}$.

Avec $\tan(\alpha_1) = \frac{1,8}{x}$, on trouve $\tan(39° - \alpha_1) = \frac{\tan(39°) - \frac{1,8}{x}}{1 + \tan(39°)\frac{1,8}{x}} = \frac{x\tan(39°) - 1,8}{x + 1,8\tan(39°)}$.

Avec $\tan(\alpha_2) = \frac{1,8}{x+25}$, on trouve $\tan(19° - \alpha_2) = \frac{\tan(19°) - \frac{1,8}{x+25}}{1 + \tan(19°)\frac{1,8}{x+25}} = \frac{(x+25)\tan(19°) - 1,8}{x + 25 + 1,8\tan(19°)}$.

On obtient donc les 2 équations suivantes :

$$\frac{x\tan(39°) - 1,8}{x + 1,8\tan(39°)} = \frac{y-1,8}{x} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{(x+25)\tan(19°) - 1,8}{x + 25 + 1,8\tan(19°)} = \frac{y-1,8}{x+25} \quad (2).$$

De (1), on déduit que $y = \frac{x^2\tan(39°) - 1,8x}{x + 1,8\tan(39°)} + 1,8$.

De (2), on déduit que $y = \frac{(x+25)^2\tan(19°) - 1,8(x+25)}{x + 25 + 1,8\tan(19°)} + 1,8$.

On trouve ainsi $\frac{x^2\tan(39°) - 1,8x}{x + 1,8\tan(39°)} + 1,8 = \frac{(x+25)^2\tan(19°) - 1,8(x+25)}{x + 25 + 1,8\tan(19°)} + 1,8$,

d'où $\frac{x^2\tan(39°) - 1,8x}{x + 1,8\tan(39°)} = \frac{(x+25)^2\tan(19°) - 1,8(x+25)}{x + 25 + 1,8\tan(19°)}$.

On a donc :

$(x^2\tan(39°)-1{,}8x)(x+25+1{,}8\tan(19°)) = (x+1{,}8\tan(39°))((x+25)^2\tan(19°)-1{,}8(x+25)) \Longrightarrow$

$\tan(39°)x^3+\tan(39°)(25+1{,}8\tan(19°))x^2-1{,}8x^2-1{,}8(25+1{,}8\tan(19°))x =$

$\quad = (x+1{,}8\tan(39°))((x^2+50x+625)\tan(19°)-1{,}8x-45) \Longrightarrow$

$\tan(39°)x^3+\left[\tan(39°)(25+1{,}8\tan(19°))-1{,}8\right]x^2-1{,}8(25+1{,}8\tan(19°))x =$

$\quad = \tan(19°)x^3+50\tan(19°)x^2+625\tan(19°)x-1{,}8x^2-45x+1{,}8\tan(19°)\tan(39°)x^2$

$\qquad + 90\tan(19°)\tan(39°)x+1125\tan(19°)\tan(39°)-3{,}24\tan(39°)x-81\tan(39°) \Longrightarrow$

$\tan(39°)x^3+\left[\tan(39°)(25+1{,}8\tan(19°))-1{,}8\right]x^2-1{,}8(25+1{,}8\tan(19°))x =$

$\quad = \tan(19°)x^3+\left[50\tan(19°)-1{,}8+1{,}8\tan(19°)\tan(39°)\right]x^2 +$

$\qquad + \left[625\tan(19°)-45+90\tan(19°)\tan(39°)-3{,}25\tan(39°)\right]x +$

$\qquad + 1125\tan(19°)\tan(39°)-81\tan(39°) \Longrightarrow$

$\left[\tan(39°)-\tan(19°)\right]x^3+\left[\tan(39°)(25+1{,}8\tan(19°))-1{,}8-50\tan(19°)+1{,}8-1{,}8\tan(19°)\tan(39°)\right]x^2+$

$\quad + \left[-1{,}8(25+1{,}8\tan(19°))-625\tan(19°)+45-90\tan(19°)\tan(39°)+3{,}25\tan(39°)\right]x+$

$\quad + 81\tan(39°)-1125\tan(19°)\tan(39°)=0.$

C'est une équation de la forme $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$, où

$A=\tan(39°)-\tan(19°)=0{,}465,$

$B=\tan(39°)(25+1{,}8\tan(19°))-50\tan(19°)-1{,}8\tan(19°)\tan(39°) = 3{,}028,$

$C=-1{,}8(25+1{,}8\tan(19°))-625\tan(19°)+45-90\tan(19°)\tan(39°)+3{,}25\tan(39°)=-238{,}783,$

$D=81\tan(39°)-1125\tan(19°)\tan(39°)=-248{,}092.$

On peut la transformer en $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ (par division par a_1), où

$a_1=\dfrac{B}{A}=6{,}5$, $a_2=\dfrac{C}{A}=-513$ et $a_3=\dfrac{D}{A}=-533$

D'après la feuille ci-jointe (méthode de résolution des équations du troisième degré), on a:

$Q=\dfrac{3a_2-a_1^2}{9}=-175{,}7$; $R=\dfrac{9a_1a_2-27a_3-2a_1^3}{54}=-300$;

$D=Q^3+R^2=-5334526{,}6<0.$

Ainsi les solutions de l'équation sont : $\begin{cases} x_1=2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta)-\frac{1}{3}a_1 \\ x_2=2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta+120°)-\frac{1}{3}a_1 \\ x_3=2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta+240°)-\frac{1}{3}a_1, \end{cases}$

où $\cos\theta=\dfrac{R}{\sqrt{-Q^3}}$.

On a $\cos\theta=\dfrac{-300}{\sqrt{-(-175{,}7)^3}}=-0{,}13$, d'où $\theta=97{,}4°$.

Ainsi $x_1=2\sqrt{175{,}7}\cos\left(\dfrac{97{,}4}{3}\right)-\dfrac{6{,}5}{3}=20{,}2\,m,$

$x_2=2\sqrt{175{,}7}\cos\left(\dfrac{97{,}4}{3}+120°\right)-\dfrac{6{,}5}{3}=-25{,}7$ et

$x_3=2\sqrt{175{,}7}\cos\left(\dfrac{97{,}4}{3}+240°\right)-\dfrac{6{,}5}{3}=-1.$

Comme on cherchait les valeurs positives de x (x est une longueur), les solutions sont exclues et on trouve donc $x = 20,2$ m.

Ainsi, l'observateur se trouve au début à <u>20,2 m de l'arbre.</u>

b) On a, d'après a), que la hauteur de l'arbre est $y = \dfrac{x^2 \tan(39°) - 1,8x}{x + 1,8 \tan(39°)} + 1,8$.

On en conclut ainsi que : $\underline{\underline{y = 15,4 \text{ m}}}$.

Résolution d'équations du troisième degré de la forme: $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

Soit
$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54},$$
$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

où $ST = -Q$.

Solutions :
$$\begin{cases} x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = -\frac{1}{3}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \end{cases}$$

Si a_1, a_2, a_3 sont réels et si $D = Q^3 + R^2$ est le *discriminant*, alors

(i) une racine est réelle et deux sont conjuguées complexes si $D > 0$
(ii) toutes les racines sont réelles et au moins deux sont égales si $D = 0$
(iii) toutes les racines sont réelles et inégales si $D < 0$

Si $D < 0$, les calculs sont simplifiés par l'utilisation de la trigonométrie.

Solutions si $D < 0$:
$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta + 120°\right) - \frac{1}{3}a_1 \\ x_3 = 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta + 240°\right) - \frac{1}{3}a_1 \end{cases} \quad \text{où} \quad \cos\theta = R/\sqrt{-Q^3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_2, \quad x_1x_2x_3 = -a_3$$
où $x_1 + x_2 + x_3$ sont les trois racines.

Exercice 22

On part des formules : $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ et
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

a) On a : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Ainsi : $\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) =$
$= \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) =$
$= \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) =$
$= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)$.

On a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, i.e. $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Donc : $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) =$
$= \cos^3(x) - 3\cos(x) + 3\cos^3(x) = 4\cos^2(x) - 3\cos(x)$.

On a donc bien : $\underline{\underline{\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)}}$.

b) On a : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Ainsi : $\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$
$= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\sin(x) =$
$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) =$
$= 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$.

On a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, i.e. $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

Donc : $\sin(3x) = 3\sin(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) - \sin^3(x) =$
$= 3\sin(x) - 3\sin^3(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

On a donc bien : $\underline{\underline{\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)}}$.