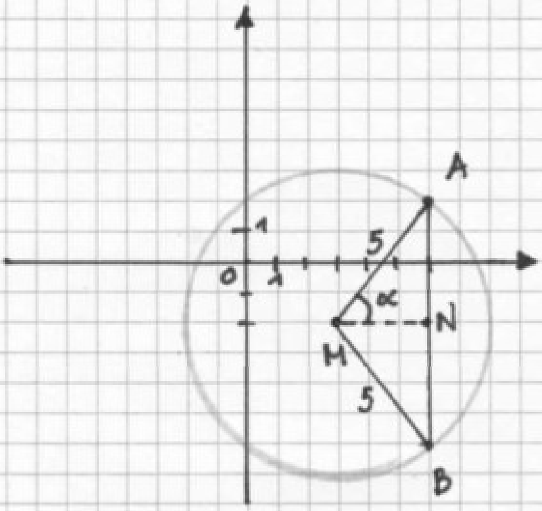
Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 11

Mathématiques de niveau 1

TRIGONOMETRIE

Corrigé du TE B

Exercice 1



a) L'équation cartésienne du cercle est:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=5^2, \text{ i.e.}$$

$$\underline{(x-3)^2+(y+2)^2-25=0.}$$

b) Pour $A(6;2)$, on a:

$$(x-3)^2+(y+2)^2-25=(6-3)^2+(2+2)^2-25=$$
$$=3^2+4^2-25=9+16-25=0.$$

Pour $B(6;-6)$, on a:

$$(x-3)^2+(y+2)^2-25=(6-3)+(-6+2)^2-25=$$
$$=3^2+(-4)^2-25=9+16-25=0.$$

Par conséquent <u>A et B sont sur le cercle.</u>

c) On va commencer par calculer α dans le triangle rectangle MNA et on aura alors $\widehat{AMB}=2\alpha$.

On a: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$;

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=8 \quad \text{et} \quad AN=\frac{AB}{2}=4.$$

Ainsi $\sin(\alpha)=\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{4}{5}$, d'où $\alpha=\sin^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)=53,13°$.

Par conséquent, $\widehat{AMB}=2\alpha=\underline{106,26°}$.

d) Le périmètre du cercle vaut $2\cdot\pi\cdot5=31,42$.

Il correspond à un angle au centre de $360°$.

Par une règle de 3, on trouve que la longueur de l'arc AB est

$$\frac{31,42}{360}\cdot106,26=\underline{9,27}.$$

Exercice 2

On a : $a: 8x-15y+7=0$ et $b: 12x+5y-5=0$.

Un vecteur orthogonal (perpendiculaire) à a est $\begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de a est donc $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Un vecteur orthogonal à b est $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de b est donc $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.

On va calculer les angles entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{a}$ et $-\vec{b}$, ce qui nous donnera les angles cherchés.

Nommons α l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et β l'angle entre $\vec{a}$ et $-\vec{b}$.

On a $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$ et $\cos(\beta) = \dfrac{\vec{a}\cdot(-\vec{b})}{\|\vec{a}\|\cdot\|-\vec{b}\|}$.

On a : $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = 15\cdot 5 + 8\cdot(-12) = 75 - 96 = -21$;

$\vec{a}\cdot(-\vec{b}) = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} = 15\cdot(-5) + 8\cdot 12 = -75 + 96 = 21$;

$\|\vec{a}\| = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$;

$\|\vec{b}\| = \|-\vec{b}\| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.

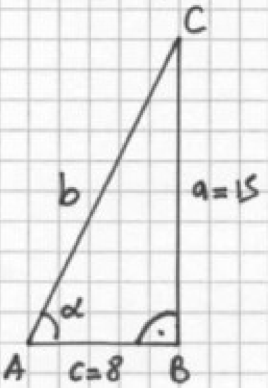
On a donc : $\cos(\alpha) = \dfrac{-21}{17\cdot 13} = \dfrac{-21}{221}$, d'où $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-21}{221}\right) = 95{,}45°$ et

$\cos(\beta) = \dfrac{21}{17\cdot 13} = \dfrac{21}{221}$, d'où $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{21}{221}\right) = 84{,}55°$.

On remarque que $\alpha + \beta = 180°$, qui est bien ce qu'il faut obtenir.

Ainsi, l'angle aigu entre a et b est $84{,}55°$ et l'angle obtus entre a et b est $95{,}45°$.

Exercice 3



Commençons par calculer b.

On a $b^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$, d'où $b = \sqrt{289} = 17$.

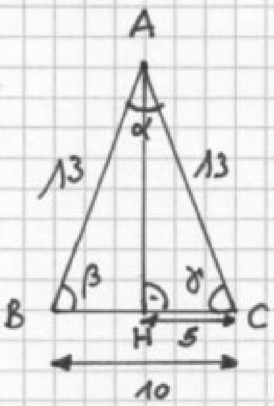
On a alors $\cos(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{8}{17}$, $\sin(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{15}{17}$ et

$\tan(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{15}{8}$.

Ainsi $x = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) + \tan(\alpha) = \frac{8}{17} + \frac{15}{17} + \frac{15}{8} =$

$$= \frac{23}{17} + \frac{15}{8} = \frac{184 + 255}{17 \cdot 8} = \frac{439}{17 \cdot 8} = \underline{\underline{\frac{439}{136}}}.$$

Exercice 4



On a : $\beta = \gamma$ puisque le triangle est isocèle.

Dans le triangle rectangle AHC, on a $\cos(\gamma) = \frac{5}{13}$.

Ainsi $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \underline{\underline{67{,}38°}}$.

Donc $\beta = \underline{\underline{67{,}38°}}$.

Finalement $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 2 \cdot 67{,}38° = \underline{\underline{45{,}24°}}$.

L'aire du triangle est $\frac{BC \cdot AH}{2}$.

On a : $BC = 10$.

De plus $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$.

Donc l'aire du triangle est $\frac{10 \cdot 12}{2} = \underline{\underline{60}}$.