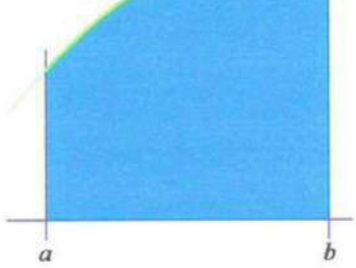
Chapitre 5

Calcul intégral

5.1 L'intégrale définie

5.1.1 Définition par sommes de Riemann

Soit $f \in C^0[a;b]$ positive. On cherche à calculer l'aire S du domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox ainsi que les droites $x = a$ et $x = b$.



On partage l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles I_1, I_1, $\ldots I_n$ de façon arbitraire $I_k = [x_{k-1};\, x_k]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

On choisit ensuite un $\xi_k \in I_k$ de façon toujours arbitraire. Notons $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ la largeur de l'intervalle I_k et soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

la somme des surfaces rectangulaires déterminées par I_k et $f(\xi_k)$.
C'est une approximation de l'aire cherchée et cette approximation est d'autant meilleure que les Δx_k sont petits et donc que le nombre d'intervalles n est grand. A la limite (si elle existe), on obtiendra l'aire cherchée S. On pose alors la définition suivante :

Définition 5.1 (Fonction intégrable)**.** La fonction $f(x)$ est dite **intégrable** sur $[a;\, b]$ si la limite

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \sup_k \Delta x_k \to 0}} S_n$$

existe et ceci **indépendamment du choix** des x_k et des ξ_k. On note cette limite

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Remarque 5.2. On peut montrer, que pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable, il suffit de montrer la convergence des suites S_n pour deux choix particuliers des ξ_n. En effet, posons

$$M_k = \sup_{x \in I_k} f(x) \qquad\qquad m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$$

Alors $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$ pour tout choix de $\xi_k \in I_k$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k}_{=S_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k.$$

Si les termes de gauche et de droite converge vers la même limite S lorsque $n \to \infty$ et $\Delta x_k \to 0$, alors par le théorème des gendarmes, la somme S_n converge également vers S (pour tout choix des ξ_k) et f est ainsi intégrable.

Remarque 5.3. Si $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a; b]$ et f est intégrable, alors on a

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant 0.$$

Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ est une **aire algébrique** affectée d'un signe. Les domaines au-dessous de l'axe Ox sont comptés négativement.

5.1.2 Propriétés de l'intégrale définie

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$

(2)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx &= \int_a^c f(x)\, dx \\ \Longrightarrow \qquad \int_b^a f(x)\, dx &= -\int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

(3) Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx \quad + \quad \beta \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

(4) Si $a \leqslant b$ et $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in [a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

(5)

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Démonstration : Ceci découle du point (4) et de l'inégalité

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

pour tout $x \in [a; b]$.

(6) Inégalité de Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\int_a^b (f(x) - tg(x))^2\,dx \geqslant 0$ ce qui donne

$$\int_a^b (f^2(x) - 2tf(x)g(x) + t^2g^2(x))\,dx \geqslant 0$$

et par (3)

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \;-\; 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;+\; t^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0$$

et ceci pour tout t. Le discriminant de cette équation du 2ème degré en t doit donc être négatif ou nul. Ainsi

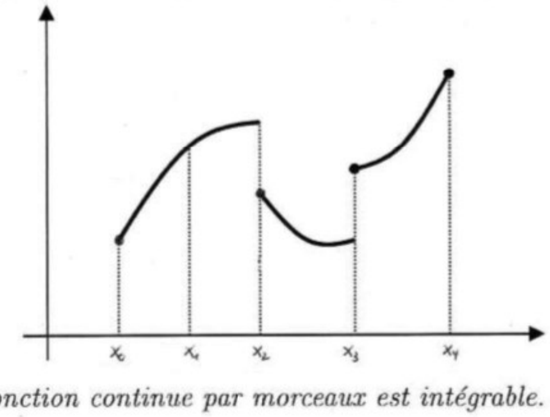
$$\Delta = B^2 - 4AC = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant 0.$$

□

Remarque 5.4. La variable d'intégration est une variable muette. Son changement n'affecte en rien la valeur de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du.$$

Définition 5.5. f est **continue par morceaux** sur $I = [a;b]$ s'il existe $I_k = [x_{k-1};x_k]$ $k = 1, 2, \ldots, n$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ de telle sorte que $f(x)$ soit continue sur chaque intervalle ouvert $]x_{k-1};x_k[$, continue à gauche en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et continue à droite en chaque $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.



Théorème 5.6. *Toute fonction continue par morceaux est intégrable.*

Sans démonstration.

5.1.3 Théorème fondamental du calcul intégral

Dans cette section, nous allons montrer le lien entre l'intégrale définie et la dérivée.

Lemme 5.7 (Théorème de la moyenne du calcul intégral)**.** *Soit $I = [a;b]$, $f \in C^0(I)$. Alors il existe $\xi \in I$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

DÉMONSTRATION :
Soit $m = \inf_{x\in I} f(x)$ et $M = \sup_{x\in I} f(x)$. Alors

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M \cdot (b-a).$$

et donc

$$f(x_m) = m \leqslant \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx}_{=c} \leqslant M = f(x_M).$$

Comme f est continue, il existe un $\xi \in I$ avec $f(\xi) = c$ par le corollaire du théorème de Bolzano (chapitre 3). □

Appliqué à l'intervalle $[x; x+h]$ ce lemme assure l'existence d'un $\xi = x + \theta h$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ avec

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dt = h \cdot f(x+\theta h). \qquad (*)$$

Théorème 5.8 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit $I = [a; b]$ et $f \in C^0(I)$. Posons*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Alors $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

DÉMONSTRATION :
Reprenons la définition de la dérivée :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\, dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(x+\theta h) \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad \text{par } (*) \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+\theta h) \\
&= f(x) \qquad \text{car } f \text{ est continue.}
\end{aligned}$$

□

En d'autres termes, on a

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x)}$$

Explication intuitive :

$$dF(x) = F(x+h) - F(x) = dx \cdot f(x) \Longrightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Théorème 5.9. *Soit $f(x)$ intégrable sur $I = [a; b]$ et $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. Alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$$

DÉMONSTRATION : Posons $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.
Alors par le théorème précédent, on a $\Phi'(x) = f(x) = F'(x)$. Ainsi $\Phi(x) = F(x) + c$ (cf. chapitre 4).
Or $\Phi(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad F(a) + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -F(a)$. Donc $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. On en déduit que

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

□

Corollaire 5.10. *Soit $f(x)$ une fonction continue et $\phi(x)$ une fonction dérivable. Alors*

(a)

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^a f(t)\, dt\right] = -f(x)$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt\right] = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$$

5.2 Primitives

5.2.1 Définition et propriétés

Définition 5.11. Soit $f(x)$ une fonction. Une **primitive** de $f(x)$ est une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Remarque 5.12. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors

$$G(x) = F(x) + c$$

en aussi une primitive de $f(x)$. Réciproquement, deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante (cf. chapitre 4 : $f'(x) \equiv 0 \Longrightarrow f(x) \equiv c$).

La section qui précède a montré que le calcul d'une intégrale définie se ramène au calcul d'une primitive.
De ce fait, on note

$$\int f(x)\,dx$$

l'ensemble de toutes les primitives de $f(x)$, que l'on appelle aussi **intégrale indéfinie**.

Déterminer les primitives d'une fonction est un problème difficile.

Le théorème du calcul intégral montre que toute fonction continue possède une primitive. Mais il existe des fonctions analytiques continues qui n'ont pas de primitives **analytiques** comme par exemple $f(x) = e^{-x^2}$.
Linéarité de la primitive : la linéarité de la dérivée implique celle de la primitive :

$$\boxed{\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx + \beta \cdot \int g(x)\,dx.}$$

5.2.2 Recherche des primitives

Primitives de quelques fonctions élémentaires

(I) Fonctions puissances Pour $q \neq -1$, on a

$$\int x^q\,dx = \frac{1}{q+1} \cdot x^{q+1} + C$$

et

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

(II) Fonction exponentielle :

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$$

(III) Fonctions trigonométriques :

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C \qquad \int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

(IV) etc...

Recherche par calcul direct

On obtient certaines primitives en transformant la fonction à intégrer de telle sorte à faire apparaître une forme connue de dérivée :

Exemples 5.13.

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{px+q}}\,dx =?$. On sait que $(\sqrt{px+q})' = \frac{p}{2\sqrt{px+q}}$. On a donc

$$\int \frac{1}{\sqrt{px+q}}\,dx = \int \frac{2}{p} \cdot \frac{p}{2\sqrt{px+q}}\,dx = \frac{2}{p} \cdot \int \frac{p}{2\sqrt{px+q}}\,dx = \frac{2}{p}\sqrt{px+q} + C.$$

(2)
$$\int \cos^2(px)\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2px))\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4p}\sin(2px) + C.$$

(3)
$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{x^2+1+x}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln|x| + \arctan(x) + C.$$

Plus généralement, comme $(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$, on a la formule

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) \;+\; C} \tag{5.1}$$

où $F(u)$ est une primitive de $f(u)$.

Une méthode pour intégrer est donc de mettre l'intégrant sous la forme $f(g(x)) \cdot g'(x)$ en sachant trouver une primitive de f.
Il est donc important lors du calcul d'une intégrale de <u>repérer les dérivées internes ($= g'(x)$)</u>.

Exemples 5.14.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1/2} \;+\; C$

$= \sqrt{x^2+1} \;+\; C.$
On a utilisé le principe précédent avec $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $g(x) = x^2+1 \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = 2x.$

(2) On veut calculer $\displaystyle\int \cos x \sin^3 x\,dx$. On voit que $\cos x$ est la dérivée de $\sin x$. On pose donc $g(x) = \sin x$ et $f(u) = u^3$ dont on connaît une primitive : $F(u) = \frac{1}{4}u^4$. Alors

$$\int \underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,\underbrace{\sin^3 x}_{f(g(x))}\,dx = F(g(x)) + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

En appliquant la formule 5.1 à des fonctions f particulières, on obtient les formules suivantes :

(I)
$$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C.$$

(II)
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C.$$

(III)
$$\int g'(x)[g(x)]^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot [g(x)]^{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1.$$

(IV)
$$\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx = \arctan[g(x)] + C.$$

(V)
$$\int g'(x)\cos(g(x))\,dx = \sin[g(x)] + C.$$

(VI) etc...

Intégration par parties

On sait que $(fg)' = f'g + fg'$ ce qui donne $f'g = (fg)' - fg'$. En intégrant des deux côtés on obtient la règle d'**intégration par parties** :

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.} \qquad \text{(I.P.P.)}$$

Exemples 5.15.

(1)
$$\int xe^x\,dx \overset{\text{I.P.P.}}{=} xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

avec $f' = e^x$ et $g = x$.

(2) $\displaystyle\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$ (cf. exercices)

(3)
$$\begin{aligned}\int \sin(x)e^x\,dx &\overset{\text{I.P.P.}}{=} \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx\\ &\overset{\text{I.P.P.}}{=} \sin(x)e^x - \left[\cos(x)e^x - \int -\sin(x)e^x\,dx\right]\\ &= (\sin x - \cos x)e^x - \int \sin(x)e^x\,dx\end{aligned}$$

On obtient (en passant le terme $-\int \sin(x)e^x\,dx$ de l'autre côté)

$$2\cdot\int \sin(x)e^x\,dx = (\sin x - \cos x)e^x$$

et donc
$$\int \sin(x)e^x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C\,.$$

(4)
$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx = \int 1\cdot\arctan x\,dx &\overset{\text{I.P.P.}}{=} x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

en posant $f' = 1$ et $g = \arctan x$.

Intégration par changement de variable

Théorème 5.16. *Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle I et $\varphi : [\alpha;\beta] \longrightarrow I$ une fonction de classe C^1 avec $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

La transformation $x = \varphi(t)$ s'appelle **un changement de variable**.

On effectue donc les trois substitutions suivantes :

$$\boxed{(i)\ \ x = \varphi(t)}$$

$$\boxed{(ii)\ \ dx = \varphi'(t)\,dt}$$

$$\boxed{\text{(iii) ET on change les bornes d'intégration.}}$$

DÉMONSTRATION : Soit $G(x) = \displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt$ et $g(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Alors par le corollaire 5.10, on a

$$G'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(x).$$

La fonction $G(x)$ est donc une primitive de $g(x)$. Il s'ensuit que

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$$

ce qui donne

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_a^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx - \int_a^{\varphi(\alpha)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx\,.$$

□

Remarque 5.17. Ce changement de variable est également valable pour calculer une primitive de $f(x)$ **à condition de pouvoir inverser la fonction** $\varphi(t)$ c'est-à-dire de pouvoir écrire $t = \varphi^{-1}(x)$.

Exemples 5.18.

1. Calculons $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

   On pose
   $$x = \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad dx = (1 + \tan^2 t)\,dt$$
   avec $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$.

   Et comme $\tan(0) = 0$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, on a
   $$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)\sqrt{1+\tan^2 t}}(1+\tan^2 t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos t|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Comme φ est inversible sur l'intervalle considéré, cet exemple permet de trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
En effet, on a $t = \arctan x$, ce qui donne

$$F(x) = \sin t = \sin(\arctan x) + C.$$

2. $\displaystyle\int x^3(1-x^2)^{5/2}\, dx = \quad ?$

   On a $x \in [-1;1]$. On pose $x = \sin t$ avec $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

$$x = \sin t \quad \Longrightarrow \quad dx = \cos t\, dt$$
$$t = \arcsin x \quad \Longrightarrow \quad \cos t = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

   On obtient

$$\begin{aligned}\int x^3(1-x^2)^{5/2}\, dx &= \int \sin^3 t \cdot (1-\sin^2 t)^{5/2} \cdot \cos t\, dt = \int \sin^3 t \cdot \cos^5 t \cdot \cos t\, dt \\ &= \int \sin t \cdot (1-\cos^2 t) \cdot \cos^6 t\, dt = \int (\sin t \cos^6 t - \sin t \cos^8 t)\, dt \\ &= -\frac{1}{7}\cos^7 t + \frac{1}{9}\cos^9 t + C \\ &= \frac{1}{9}(1-x^2)^{9/2} - \frac{1}{7}(1-x^2)^{7/2} + C.\end{aligned}$$

5.2.3 Intégration des fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle à intégrer.
On effectue les étapes suivantes :

1

1ère étape : si $deg(P) \geqslant deg(Q)$, on effectue la division eulidienne de $P(x)$ par $Q(x)$:

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

ce qui donne $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ avec cette fois-ci $deg(R) < deg(Q)$ et $D(x)$ intégrable.

Dans la suite, on ne considère donc que les fonctions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$ et $Q(x) = x^n + \cdots + a_1x + a_0$ normalisé.

2ème étape : On sait que $Q(x)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en un produit de polynômes du premier degré et/ou du deuxième degré sans racines réelles :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_p)^{m_p}(x^2+2A_1x+B_1)^{l_1} \cdots (x^2+2A_sx+B_s)^{l_s} \tag{5.2}$$

On décompose alors la fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en une somme de fractions simples, chaque terme dans (5.2) contribuant de la manière suivante :

$$(x-\alpha)^m \mapsto \frac{C_1}{x-\alpha} + \frac{C_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{C_m}{(x-\alpha)^m} \qquad \text{fractions simples de 1ère espèce}$$

$$(x^2+2Ax+B)^l \mapsto \frac{D_1x+E_1}{x^2+2Ax+B} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+2Ax+B)^2} + \cdots + \frac{D_lx+D_l}{(x^2+2Ax+B)^l}$$

fractions simples de 2ème espèce

3ème étape : On intègre chaque fraction simple (cf. plus bas).

Exemples pour la 2ème étape :

1)
$$\frac{x^2+x+4}{x^4-x^3+2x^2-2x}=\frac{x^2+x+4}{x(x-1)(x^2+2)}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+2} \qquad (*)$$

- En multipliant (*) par x et en posant $x=0$, on obtient

$$\left.\frac{x^2+x+4}{(x-1)(x^2+2)}\right|_{x=0}=\left[C_1+\frac{C_2x}{x-1}+\frac{(Dx+E)x}{x^2+2}\right]_{x=0}$$
$$\frac{4}{-1\cdot 2}=C_1$$

donc $C_1=-2$.

- En multipliant (*) par $x-1$ et en posant $x=1$, on obtient

$$\left.\frac{x^2+x+4}{x(x^2+2)}\right|_{x=1}=\left[\frac{C_1(x-1)}{x}+C_2+\frac{(Dx+E)(x-1)}{x^2+2}\right]_{x=1}$$
$$\frac{6}{1\cdot 3}=C_2$$

donc $C_2=2$.

- En multipliant (*) par x et en faisant $x\to\infty$, on obtient

$$0=C_1+C_2+D$$

donc $D=0$.

- On choisit une valeur particulière pour déterminer E. Par exemple, en posant $x=-1$, on a $\frac{4}{6}=-C_1-\frac{C_2}{2}+\frac{E}{3}$ ce qui donne $E=-1$. En conclusion

$$\frac{x^2+x+4}{x(x-1)(x^2+2)}=-\frac{2}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2+2}.$$

2)
$$\frac{x^3+5x+2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^3+5x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{C_1}{x-1}+\frac{C_2}{(x-1)^2}+\frac{C_3}{x+1}+\frac{C_4}{(x+1)^2}.$$

- Multiplication par $(x-1)^2$ et $x:=1$: $\frac{8}{4}=C_2$
- Multiplication par $(x+1)^2$ et $x:=-1$: $\frac{-4}{4}=C_4=-1$
- Multiplication par x et $x\to\infty$: $1=C_1+C_3$
- On pose $x=0$: $2=-C_1+C_2+C_3+C_4$ donc $1=C_3-C_1$

Les 2 dernières équations donne : $C_3=1$ et $C_1=0$. Finalement

$$\frac{x^3+5x+2}{(x^2-1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

3ème étape : intégration des fractions simples

Les fractions simples ont toutes des primitives élémentaires :

Fractions simples de 1ère espèce :

- si $m \neq 1$ alors
$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^m}\,dx = -\frac{1}{(m-1)} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} + C$$
- sinon
$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + C$$

Fractions simples de 2ème espèce :

- $$\begin{aligned}\int \frac{Dx+E}{x^2+2Ax+B}\,dx &= \int \frac{\frac{D}{2}(2x+2A)+E-DA}{x^2+2Ax+B}\,dx \\ &= \frac{D}{2}\int \frac{2x+2A}{x^2+2Ax+B} \quad + \quad (E-DA)\int \frac{1}{(x+A)^2+B-A^2}\,dx \\ &= \frac{D}{2}\cdot \ln(x^2+2Ax+B) \quad + \quad \frac{E-DA}{\sqrt{B-A^2}} \cdot \int \frac{1/\sqrt{B-A^2}}{1+\left(\frac{x+A}{\sqrt{B-A^2}}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{D}{2}\cdot \ln(x^2+2Ax+B) \quad + \quad \frac{E-DA}{\sqrt{B-A^2}} \arctan\left(\frac{x+A}{\sqrt{B-A^2}}\right) + C \end{aligned} \tag{5.3}$$

- $$\begin{aligned}\int \frac{Dx+E}{(x^2+2Ax+B)^2}\,dx &= \int \frac{\frac{D}{2}(2x+2A)+E-DA}{(x^2+2Ax+B)^2}\,dx \\ &= \frac{D}{2}\int \frac{2x+2A}{(x^2+2Ax+B)^2} \quad + \quad (E-DA)\int \frac{1}{(x^2+2Ax+B)^2}\,dx \\ &= -\frac{D}{2}\cdot \frac{1}{x^2+2Ax+B} \quad + \quad (E-DA)\cdot I \end{aligned}$$

Il reste à calculer
$$I = \int \frac{1}{(x^2+2Ax+B)^2}\,dx.$$

On pose $u = x + A$ et on applique la formule suivante :
$$\int \frac{1}{(u^2+\beta)^2}\,du = \frac{u}{2\beta(u^2+\beta)} + \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\beta}}\right) + C.$$

La formule précédente peut être vérifiée directement ou s'obtient par parties. Plus généralement on a la formule récurrente :
$$\int \frac{1}{(u^2+\beta)^{n+1}}\,du = \frac{u}{2n\beta(u^2+\beta)^n} + \frac{2n-1}{2n\beta}\int \frac{1}{(u^2+\beta)^n}\,du.$$

Exemple complet : Calculons $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx.$

1ère étape : division euclidienne : $7-2x^3=(-2)(x^3+x^2-2)+(2x^2+3)$ et donc

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}=-2+\frac{2x^2+3}{x^3+x^2-2}.$$

2ème étape : On factorise $Q(x)$: $Q(x)=x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$

Décomposition en fractions simples :

$$\frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{C_1}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2}.$$

- Multiplication par $x-1$ et $x=1$: $\frac{5}{5}=C_1$ donc $C_1=1$.
- Multiplication par x et $x\to\infty$: $2=C_1+D$ donc $D=1$.
- $x=0$: $\frac{3}{-2}=-C_1+\frac{E}{2}$ donne $E=-1$.

Finalement

$$\frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+2x+2}$$

3ème étape : Intégration

$$\int\frac{1}{x-1}\,dx=\ln|x-1|+C$$
$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)+C$$

en appliquant la formule (5.3) avec $A=1$, $B=2$, $D=1$ et $E=-1$. En mettant ces termes ensembles, on obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx&=\int -2+\frac{2x^2+3}{x^3+x^2-2}\,dx\\&=-2x+\int\frac{1}{x-1}\,dx\ +\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx\\&=-2x+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)+C.\end{aligned}$$

5.2.4 Intégration des fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques

Pour intégrer une fonction de la forme $\frac{P(\sin x;\cos x)}{Q(\sin x;\cos x)}$, on effectue un des changements de variables suivants :

(a) $t=\sin x$ ou $t=\cos x$

(b) $t=\tan x$ ce qui donne $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $dx=\frac{1}{1+t^2}\,dt$

(c) $t=\tan\frac{x}{2}\Longrightarrow\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$

Le dernier changement (c) fonctionne toujours mais peut être plus compliqué que les changements (a) et (b).

Exemple 5.19.

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{2-\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)}\,dx \qquad \text{changement (a) : } t=\cos x \text{ et } dt=-\sin x\,dx\\ &= -\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = -\int (\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1})dt\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)-\ln|\cos x|+C.\end{aligned}$$

5.2.5 Quelques autres techniques

(A) $\sqrt{a^2-b^2x^2}$

Pour intégrer une fonction comportant des termes de la forme $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ on peut parfois effectuer le changement de variable

$$x=\frac{a}{b}\sin t \qquad \Longrightarrow \qquad dx=\frac{a}{b}\cos t\,dt$$

ce qui donne $\sqrt{a^2-b^2x^2}=|a|\sqrt{1-\sin^2 t}=|a|\cos t$.

Exemple :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\;dt\\ &= \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\;dt = \int \cos^2 t\,dt\\ &= \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)+C\\ &\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)+C\end{aligned}$$

(B) $\sqrt{a^2+b^2x^2}$

Pour des fonctions comportant un terme de la forme $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, on effectue le changement $x=\frac{a}{b}\sinh(t)$ ce qui donne $dx=\frac{a}{b}\cosh(t)\,dt$ et

$$\sqrt{a^2+b^2x^2}=|a|\sqrt{\cosh^2 t}=|a|\cosh t.$$

Exemple :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\;dt\\ &= \int \cosh^2 t\;dt = \int \frac{1}{2}(t+\cosh(2t))\;dt\\ &= \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sinh t+C\\ &= \frac{1}{2}\text{arcsinh}\,x+\frac{1}{4}\sinh(2\text{arcsinh}\,x)+C\end{aligned}$$

(C) Fonctions irrationnelles

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$

On pose

$$t = \sqrt[6]{x} \qquad \Longrightarrow \qquad x = t^6 \qquad \Longrightarrow \qquad dx = 6t^5 dt.$$

Ceci donne $\sqrt{x} = t^3$ et $\sqrt[3]{x} = t^2$. L'intégrale se transforme en une intégrale rationnelle :

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int \frac{t^3+1}{t^6-4t^2}\,6t^5\,dt\\ &= 6\int \frac{t^6+t^3}{t^4-4}\,dt = \dots\end{aligned}$$

5.3 Intégrales impropres

5.3.1 Définitions

On désire calculer des termes de la forme $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$. Quel sens donner à la borne ∞ ?

Définition 5.20. Soit $f(x)$ une fonction bornée et continue. On appelle **intégrale impropre** de **1ère espèce** une intégrale de $f(x)$ où l'une des bornes tend vers l'infini.
On pose

$$\Phi(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$$

et l'on calcule $\displaystyle\lim_{\xi\to\infty}\Phi(\xi)$. Si cette limite existe, on définit

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\xi\to\infty}\Phi(\xi).$$

On note parfois $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^\infty$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Exemples 5.21.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi e^{-x}\,dx = \lim_{\xi\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^\xi = \lim_{\xi\to\infty}\Big[1-e^{-\xi}\Big] = 1.$

(2) Que vaut $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$? On a

$$\int_0^\xi \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^\xi = \sin\xi$$

et la limite $\displaystyle\lim_{\xi\to\infty}\sin\xi$ n'existe pas. Donc $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$ n'existe pas.

Définition 5.22. Soit $f(x)$ une fonction continue sur $]a;b]$ avec $\displaystyle\lim_{x\to a^+} = \pm\infty$. On appelle intégrale impropre de 2ème espèce l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Si la limite existe, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx.$$

On note parfois

$$\int_a^b f(x)\;dx = F(x)\Big|_{a^+}^b$$

Ici $F(a^+)$ signifie $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$.

Exemples 5.23.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2.$

(b) L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

n'existe pas car

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln(1) - \ln(\epsilon) = -\ln(\epsilon)$$

et la limite quand $\epsilon \to 0^+$ n'existe pas (elle vaut $+\infty$).

Définitions :

- Si une intégrale impropre existe, on dit qu'elle **converge** ; sinon, elle **diverge**.

- Une intégrale impropre $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx$ converge.

Ici, et dans la suite, on peut avoir $I = [a;\infty[$ ou $I =]-\infty;b]$.

Théorème 5.24. *Soit $f(x) \in C^0(I)$. Si $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx$ converge, alors $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ converge.*

DÉMONSTRATION : Ceci découle de l'inégalité $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$

□

Techniques d'intégration

Les intégrations par parties et par changement de variables s'appliquent aussi aux intégrales impropres :

Exemple 5.25. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\;dx \overset{\text{I.P.P.}}{=} -xe^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}\;dx = 0 - \left[e^{-x}\right]_0^\infty = 1$

Quelques remarques importantes

(1) Pour calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, il faut calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi}^{a} f(x)\,dx + \lim_{\xi \to \infty} \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx$$

et NON PAS

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_{-\xi}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Exemple : L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ n'existe pas car les limites

$$\lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi}^{0} \sin x\,dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{\xi \to \infty} \int_{0}^{\xi} \sin x\,dx$$

n'existent pas.
Il est FAUX de penser que $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = 0$ parce que $\sin x$ est impaire.

(2) Pour calculer $\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$, il faut calculer

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

car la fonction a un pôle en $x = 2$. Or

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{x-2}\Big|_0^2$$

ne converge pas. Donc l'intégrale $\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ ne converge pas.

Le calcul

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{x-2}\Big|_0^3 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

est FAUX.

5.3.2 Critères de convergence

Comme pour les séries, on a un critère de comparaison :

Théorème 5.26. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions telles que $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ sur I.*
1) Si l'intégrale $\int_I |g(x)|\,dx$ converge, alors l'intégrale $\int_I |f(x)|\,dx$ converge.
2) Si l'intégrale $\int_I |f(x)|\,dx$ diverge alors l'intégrale $\int_I |g(x)|\,dx$ diverge.

Ce théorème est très utile avec les résultats suivants :

Théorème 5.27.

$$\int_0^b \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r}\,b^{1-r} & si\ r<1 \\ +\infty & si\ r \geqslant 1. \end{cases}$$

Donc l'intégrale $\int_0^b \frac{1}{x^r}\,dx$ *converge si et seulement si* $r<1$.

DÉMONSTRATION : Pour $r \neq 1$, on a

$$\int_0^b x^{-r}\,dx = \frac{1}{1-r}x^{1-r}\Big|_0^b = \begin{cases} \frac{1}{1-r}\,b^{1-r} & \text{si } r<1 \\ +\infty & \text{si } r>1. \end{cases}$$

Si $r=1$, on a $\int_0^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_0^b = +\infty$. □

Exemple : le critère de comparaison permet d'affirmer que l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx$ converge car $\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ pour $x \in]0;2]$.

Théorème 5.28. *Soient* $a>0$ *et* $r>0$. *Alors*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} +\infty & si\ \ r \leqslant 1 \\ \frac{1}{r-1}\,a^{1-r} & si\ \ r>1. \end{cases}$$

Ainsi $\int_a^\infty \frac{1}{x^r}\,dx$ *converge si et seulement si* $r>1$.

DÉMONSTRATION : Pour $r \neq 1$, on a

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r}x^{1-r}\Big|_a^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ r<1 \\ \frac{1}{r-1}\,a^{1-r} & \text{si } \ r>1. \end{cases}$$

Pour $r=1$, on a $\int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_a^\infty = +\infty$. □

Application : soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle. Supposons que $Q(x) \neq 0$ pour $x \geqslant a$. Alors $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge lorsque

$$\deg(Q) - \deg(P) \geqslant 2$$

et diverge sinon.

Exemple :

$$\int_0^\infty \frac{x(1+\cos^2 x)}{1+x^2}\,dx > \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

et $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ diverge car

$$\deg(1+x^2) - \deg(x) = 1 \ngeqslant 2.$$

Fonctions exponentielles

Pour $q > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^\infty e^{-qx}\,dx = -\frac{1}{q}\,e^{-qx}\Big|_a^\infty = \frac{1}{q}\,e^{-aq}$$

Corollaire 5.29. *Pour tout $p, q > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^\infty x^p e^{-qx}\,dx$ converge.*

DÉMONSTRATION : En effet, on a

$$\frac{x^p}{e^{q/2x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

ce qui implique, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x^p < e^{q/2x} \qquad \forall x \geqslant N.$$

Donc $x^p e^{-qx} < e^{-q/2x}$. Le critère de comparaison implique la convergence de l'intégrale considérée.

5.4 Application : calcul d'aires

5.4.1 Aire entre 2 courbes

Nous avons vu que l'aire du domaine limité par Ox et $y = f(x)$ entre a et x est donné par

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad A'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dA}{dx} = f(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{dA = f(x)dx = ydx.} \qquad (*)$$

dA est l'élément différentiel d'aire et on a

$$A = \int dA.$$

Si $f(x) \leqslant g(x)$ sur le domaine considéré, alors l'aire du domaine limité par $y = f(x)$ et $y = g(x)$ entre a et b est donné par

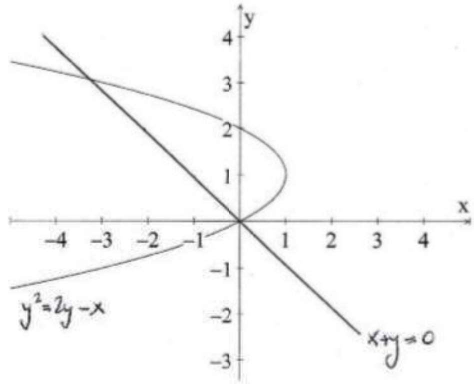
$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\,dx.$$

ATTENTION : si le graphe de f coupe celui de g, il faut faire attention au signe.

Dans certains cas, il est plus simple d'intégrer en fonction de la variable y, les bords du domaine étant alors des fonctions de y. On a la formule symétrique :

$$\boxed{dA = x(y)\,dy.}$$

Exemple : calculons l'aire du domaine compris entre la droite $x + y = 0$ et la parabole $y^2 = 2y - x$.



- On calcule d'abord les points d'intersection : $O(0;0)$ et $I(-3;3)$.
- On exprime les bords comme des fonctions de la variable y :

droite : $x = -y = g_1(y)$
parabole : $x = 2y - y^2 = g_2(y)$.
Alors

$$dA = [g_2(y) - g_1(y)] = \left[(2y - y^2) - (-y)\right]\ dy = \left(3y - y^2\right)\ dy$$

et l'aire est donc

$$A = \int dA = \int_{y=0}^{y=3} 3y - y^2\ dy = \left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Représentation paramétrique

Supposons qu'une courbe soit donnée sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Alors $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} \implies dx = \dot{x}(t)\,dt$. La formule (*) devient

$$\boxed{dA = y\,dx = y(t)\dot{x}(t)\,dt}$$

et l'aire entre $t = t_P$ et $t = t_Q$ vaut alors

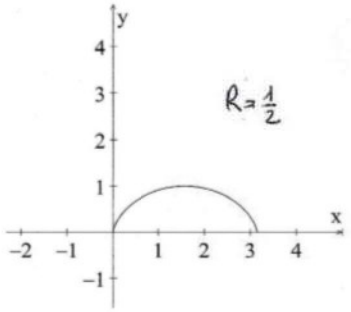
$$\boxed{A = \int_{t_P}^{t_Q} y(t)\dot{x}(t)\,dt.}$$

Exemple : la cycloïde

La trajectoire d'un point d'un cercle roulant sur une droite est donnée par la **cycloïde** :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Calculons l'aire d'un arc de cycloïde.



On a $\dot{x}(t) = R(1 - \cos t)$. Alors

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)R(1-\cos t)\,dt \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\,dt = R^2(2\pi - 0 + \pi) = 3\pi R^2 \end{aligned}$$

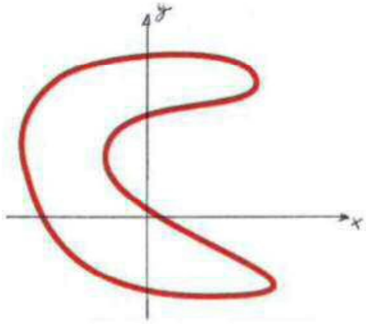
Rappel :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi$$

et donc par symétrie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$.

5.4.2 Domaine fermé

Soit D un domaine fermé dont la frontière est définie par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ pour $t \in [t_1; t_2]$.



On a $t_1 < t_D < t_G < t_2$.

$$\begin{aligned} A_D &= \int_{x_G}^{x_D} y^+\,dx - \int_{x_G}^{x_D} y^-\,dx = \int_{t_G}^{t_D} y(t)\dot{x}(t)\,dt - \left(\int_{t_G}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_D} y(t)\dot{x}(t)\,dt\right) \\ &= -\int_{t_D}^{t_G} y\dot{x} - \int_{t_G}^{t_2} y\dot{x} - \int_{t_1}^{t_D} y\dot{x} \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}y\,dt \end{aligned}$$

En intégrant selon y, c'est-à-dire en prenant $dA = xdy$, on obtient

$$A_D = \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\,dt.$$

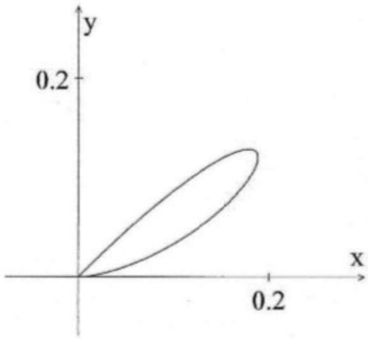
En additionnant les 2 formules et en divisant par 2, on obtient

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\oint (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt.}$$

$$\oint = \text{intégrale curviligne} = \int_{t_1}^{t_2} \ldots\,dt$$

où $[t_1; t_2]$ parcourt le bord de D dans le **sens trigo** une et une seule fois.

Exemple : Aire de la boucle de la courbe $\Gamma : y^3 - xy^2 + x^4 = 0$



Paramétrisation : si l'on pose $y = tx$, on obtient $t^3x^3 - t^2x^3 + x^4 = 0$ ce qui donne $x^3\left[(t^3 - t^2) + x\right] = 0$ et donc

$$\begin{cases} x = t^2 - t^3 \\ y = t^3 - t^4 \end{cases}$$

$t = 0 \longrightarrow (0; 0)$
$t = 1 \longrightarrow (0; 0)$
Et pour $0 < t < 1$, on a $x > 0$ et $y > 0$. Donc si t parcourt l'intervalle $[0; 1]$, on parcourt le bord de D **une et une seule fois**. Alors

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^2 - t^3)(3t^2 - 4t^3) - (2t - 3t^2)(t^3 - t^4)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^4(1-t)^2\,dt = \cdots = \frac{1}{210}. \end{aligned}$$

5.4.3 Surfaces sectorielles

Domaines limités par un arc PQ et par les segments OP et OQ. Alors

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{t_P}^{t_Q} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt}$$

DÉMONSTRATION :
Paramétrisation de OP :

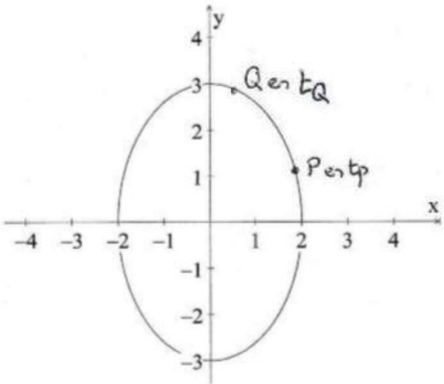
$$\begin{cases} x = t \\ y = mt \end{cases} \quad (\text{pente} = m) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = m \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x\dot{y} - \dot{x}y = mt - mt = 0$$

Idem pour QO : $x\dot{y} - \dot{x}y = 0$.

Donc

$$\oint (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt = \int_{OP} \cdots \quad + \int_{PQ} \cdots \quad + \int_{QO} \cdots \quad = 0 + \int_P^Q \cdots + 0 = \int_P^Q x\dot{y} - \dot{x}y.$$

Exemple : secteur d'une ellipse d'équation : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$



Alors
$$A = \frac{1}{2}\int_{t_P}^{t_Q} (a\cos t \cdot b\cos t + a\sin t \cdot b\sin t)\, dt = \frac{1}{2}ab \cdot (t_Q - t_P).$$

Si $t = 0$ et $t = 2\pi$, on obtient l'aire de l'ellipse :

$$\boxed{A_{\text{ellipse}} = \pi ab.}$$

Coordonnées polaires

Si l'arc PQ est donnée en coordonnées polaires $\rho = \rho(\varphi)$, alors

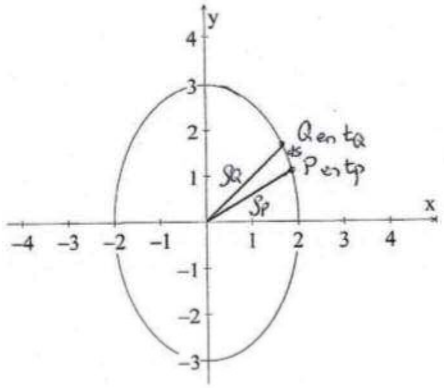
$$x = \rho\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\varphi$$

donne
$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi \qquad \text{et} \qquad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi.$$

L'aire est égale alors à

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_P^Q (x\dot{y} - \dot{x}y)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} \rho\cos\varphi \cdot (\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi) - \rho\sin\varphi \cdot (\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} \rho^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \end{aligned}$$

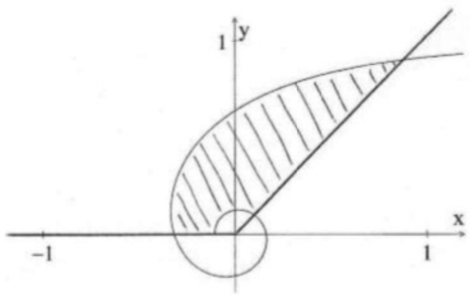
Explication intuitive :



L'aire du triangle infinitésimal est égale à

$$dA = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur} \approx \frac{1}{2} ds \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho \cdot d\varphi \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi.$$

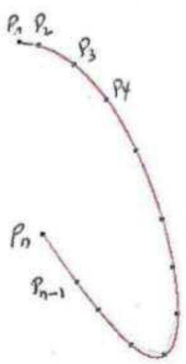
Exemple : Aire du domaine hachuré de la spirale hyperbolique : $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$.



$$A = \frac{1}{2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi} \frac{a^2}{\varphi^2} d\varphi - \int_{9\pi/4}^{3\pi} \frac{a^2}{\varphi^2} d\varphi \right) = \frac{1}{2} \left(- \frac{a^2}{\varphi} \bigg|_{\pi/4}^{\pi} + \dots \right) = \frac{13}{9\pi} a^2.$$

5.4.4 Longueur d'arc

Soit $\Gamma : y = f(x)$ une courbe avec f dérivable. On note s la longueur d'arc de Γ entre le point P et le point Q. On approxime l'arc PQ par une suite de cordes $P_k P_{k+1}$.



Longueur de la corde $P_k P_{k+1}$:

$$|P_k P_{k+1}| = \Delta l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

Si l'on divise l'arc en n cordes alors on a

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \Delta l_k = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \right)^2} \cdot \Delta x_k \qquad (*)$$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$ et $\Delta x_k, \Delta y_k \longrightarrow 0$ alors $\dfrac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = y'$ et la série (*) a comme limite

$$\boxed{s = \int_{x_P}^{x_Q} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{x_P}^{x_Q} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

De $s(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ on en déduit $s'(x) = \dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ et donc

$$\boxed{ds = s'(x) \cdot dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}} \qquad (**)$$

ds = élément différentiel de longueur d'arc.

Si la courbe est sous **forme paramétrique :**

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} dx = \dot{x}(t)\, dt \\ dy = \dot{y}(t)\, dt \end{cases}$$

la formule (**) devient $\boxed{ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\; dt}$ et ainsi

$$\boxed{s = \int_{t_P}^{t_Q} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\; dt}$$

Exemple 5.30.
Longueur d'une ellipse :

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $0 < a < b$.

Paramétrisation : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = b\cos t \end{cases}$

Alors la longueur vaut :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\;\; dt = b\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin^2 t + \cos^2 t}\;\; dt \\ &= b\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\;\; dt \end{aligned}$$

où $k^2 = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2$.
Cette intégrale n'est pas élémentaire : on ne peut la calculer qu'avec des méthodes numériques.

Longueur en coordonnées polaires

Soit $\Gamma : \rho = \rho(\varphi)$ donnée en coordonnées polaires. Alors les équations

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\varphi$$

donnent, comme précédemment,

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi \qquad \text{et} \qquad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi.$$

L'élément différentiel de longueur vaut alors

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, d\varphi = \cdots = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}\, d\varphi$$

et la longueur entre les points P et Q vaut

$$\boxed{s = \int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}\, d\varphi.}$$

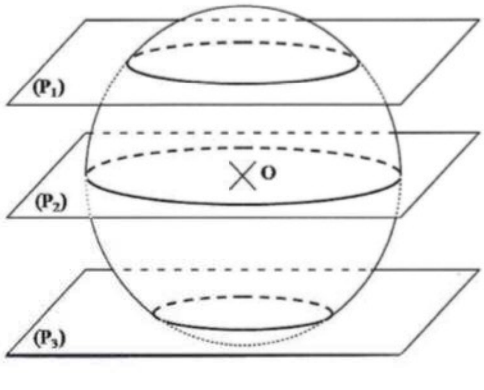
Exemple : Longueur de la cardioïde : $\rho = a(1+\cos\varphi)$ avec $a > 0$.

$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\; d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \underbrace{\sqrt{2+2\cos\varphi}}_{=4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\; d\varphi \\ &= 2a\int_0^{\pi} |2\cos\frac{\varphi}{2}|\, d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

5.5 Calcul des volumes

5.5.1 Cas où l'aire des sections est connue

On suppose que l'aire A de la section de ce corps par chaque plan horizontaux est connue ; elle est alors fonction de z : $A = A(z)$.



Le volume du domaine du corps limité par 2 plans très proches $z = z_k$ et $z = z_k + \Delta z_k$ est approximativement égale au volume du cylindre de base $A(z_k)$ et de hauteur Δz_k. Ainsi

$$\Delta V_k = A(z_k)\cdot\Delta z_k$$

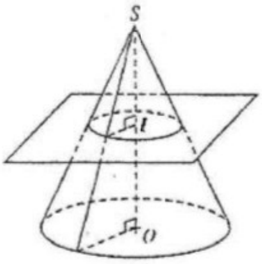
En partageant ainsi la hauteur du corps en n intervalles, on obtient :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} A(z_k) \cdot \Delta z_k.$$

C'est une somme de Riemann et l'on peut faire tendre n vers l'infini. Si la limite existe, on obtient

$$\boxed{V = \lim_{n\to\infty} V_n = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} A(z)\,dz.}$$

Exemples 5.31.
(1) Volume d'un cône de base quelconque B et de hauteur h.



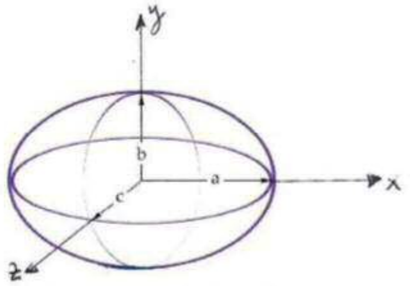
Comme B et $B(z)$ sont homothétiques, on a pour tout $z \in [0; h]$:

$$\frac{B(z)}{B} = \left(\frac{z}{h}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad B(z) = \frac{B}{h^2} z^2.$$

Donc

$$V = \int_0^h B(z)\,dz = \int_0^h \frac{B}{h^2} z^2\,dz = \frac{B}{h^2} \cdot \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} B \cdot h\,.$$

(2) Volume de l'ellipsoïde : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$



Dans chaque plan, $z = z_0$, la section est une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} = \delta_0^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{x^2}{(a\delta_0)^2} + \frac{y^2}{(b\delta_0)^2} = 1$$

L'aire de chaque ellipse vaut

$$A_0 = \pi(a\delta_0)(b\delta_0) = \pi ab\delta_0^2 = \pi ab \cdot \left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad A(z) = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

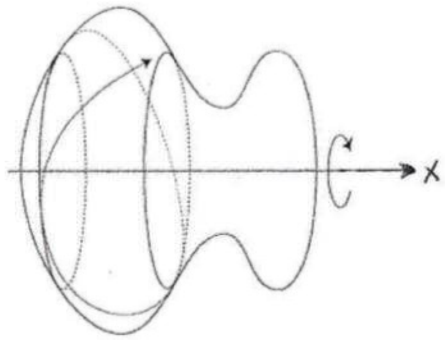
On obtient pour le volume :

$$V = \int_{-c}^{c} \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \int_0^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \left(z - \frac{z^2}{3c^2}\right)\Big|_0^c = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Si $a = b = c = R$, l'ellipsoïde est une sphère de volume $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

5.5.2 Corps de révolution

Considérons une courbe $\Gamma : y = f(x)$



On peut générer un volume en faisant tourner

- le domaine D autour de l'axe Ox : alors

$$\boxed{dV = \pi y^2\, dx}$$

et donc

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\, dx.$$

- le domaine D' autour de l'axe Oy :

$$\boxed{dV = \pi x^2 dy}$$

ce qui donne

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} [f^{-1}(y)]^2\, dy$$

ou également

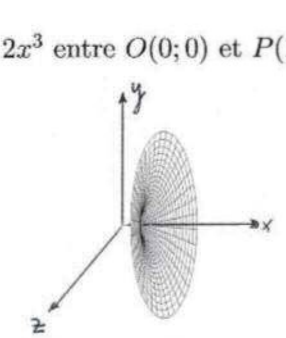
$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 \underbrace{f'(x)dx}_{=dy}$$

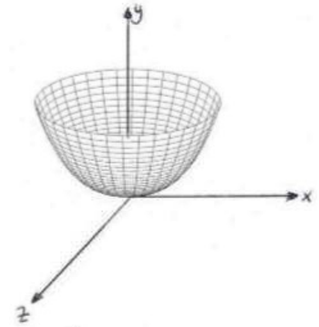
car $dy = f'(x)\, dx$.

Si le domaine est limité par deux courbes f et g, alors

$$V = \pi \int f^2(x) - g^2(x)\, dx.$$

Exemple 5.32. $y = f(x) = 2x^3$ entre $O(0;0)$ et $P(1;2)$.





Rotation autour de l'axe Ox du domaine D : $V = \pi \int_0^1 4x^6\,dx = \frac{4}{7}\pi$.

Rotations autour de l'axe Oy du domaine D : $x = f^{-1}(y) = g(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}$ et $h(y) = 1$. Alors

$$V = \pi \int_{y=0}^{y=2} h(y)^2 - g(y)^2\,dy = \pi \int_0^2 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^{2/3} dy = \pi \left(y - \frac{1}{2^{2/3}} \cdot \frac{3}{5} y^{5/3}\right)\Big|_0^2 = \pi(2 - \frac{6}{5}) = \frac{4\pi}{5}.$$

Courbes paramétriques

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

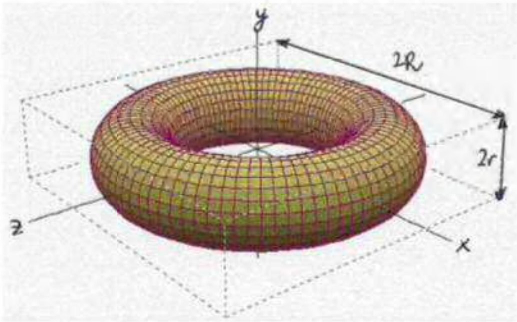
$$\boxed{dV = \pi y^2(t)\dot{x}(t)\,dt} \qquad \text{(rotation autour de l'axe } Ox\text{)}$$

$$\boxed{dV = \pi x^2(t)\dot{y}(t)\,dt} \qquad \text{(rotation autour de l'axe } Oy\text{)}$$

Si pour $t \in [t_1; t_2]$, le domaine limité par Γ est **fermé** et **entièrement situé d'un côté de l'axe**, alors le volume du corps de révolution est

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)\,dt.$$

Exemple : Volume du tore :



$$\begin{cases} x = R + r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi]$$

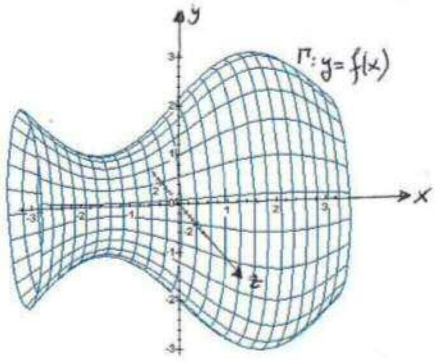
Alors (axe de rotation = axe Oy)

$$V = \pi \int x^2 \dot{y}\,dt = \pi \int_0^{2\pi} (R + r\cos t)^2 \cdot r\cos t\,dt = \pi r \int_0^{2\pi} (R^2\cos t + 2Rr\cos^2 t + r^2\cos^3 t)\,dt$$
$$= \pi r(0 + 2Rr \cdot \pi + 0) = 2\pi^2 Rr^2.$$

5.6 Surface de révolution

Rotation autour de l'axe Ox

On considère à nouveau une courbe $\Gamma : y = f(x)$ que l'on fait tourner autour de l'axe Ox.



On engendre ainsi une **surface de révolution** dont on veut déterminer l'aire.

Pour ce faire, on divise Γ en n cordes $P_{k-1}P_k$. Chaque segment $P_{k-1}P_k$ engendre, en tournant, une surface qui est égale à

$$\Delta s_k = 2\pi \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot l_k$$

où l_k est la longueur de la corde $P_{k-1}P_k$. Or, on a montré que $l_k = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$.
Donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient, si la limite existe

$$\boxed{S = 2\pi \int_{x_P}^{x_Q} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.}$$

L'élément différentiel de surface est

$$\boxed{dS = 2\pi y\, ds = 2\pi y \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

où $ds =$ élément différentiel de longueur $= \sqrt{dx^2 + dy^2}\, dx$.

Rotation autour de l'axe Oy

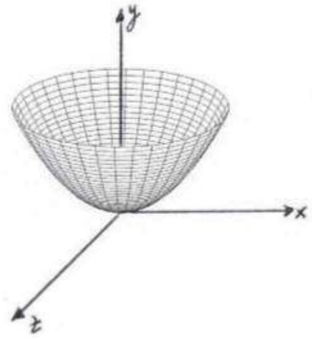
Par analogie, la rotation autour de l'axe Oy donnera la surface

$$S = 2\pi \int_{x_P}^{x_Q} x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ici, on a $\boxed{dS = 2\pi x\, ds}$

Exemples 5.33.

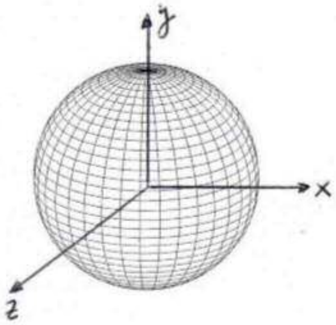
1) Miroir parabolique : soit $y = x^2$ un arc de parabole avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.
La rotation autour de Oy donne un miroir parabolique.



Sa surface vaut

$$S = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\,(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

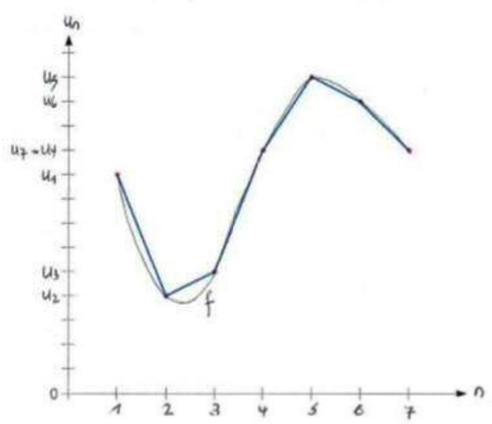
2) Surface d'une sphère. On a $\Gamma : \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$ $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$.



$$\begin{aligned} S &= 2\cdot \int dS = 2\cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} x\sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2}\, d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} R\cos\varphi \cdot R\, d\varphi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

5.7 Convergence des séries : critère intégral

Considérons la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
Posons $f(n) = u_n$ et prolongeons la fonction discrète $f(n)$ aux valeurs réelles $x > 1$.



La condition nécessaire de convergence de la série est que $u_n \longrightarrow 0$ ce qui implique que $f(x) \longrightarrow 0$.

Om impose de plus que $f(x)$ soit décroissante.
Alors la somme partielle

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

est la somme des aires des rectangles de base 1 et de hauteur $f(n)$. Comme $f(x)$ décroît, on a

$$u_n > \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

et donc

$$s_n > \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

De même,

$$u_{n+1} = f(n+1)\cdot 1 < \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

d'où

$$s_{n+1} < u_1 + \int_1^2 + \cdots + \int_n^{n+1} = u_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini, on obtient le critère suivant :

- si $I = \displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge, alors $s_n > \displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$: la série diverge
- si $I = \displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s < u_1 + I$: la série converge

Applications

Les séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n^r}$ $(r > 0)$ converge si $r > 1$ et diverge sinon.

Exemples :

1) Que peut-on dire de $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$?

Posons

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}.$$

- On a bien $f(x)$ décroissante car $f' = \dfrac{-1}{(x\ln x)^2}(\ln x + 1) < 0$ si $x \geqslant 2$.
- $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^\infty = +\infty.$

On en déduit que la série diverge.

2) Prenons $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

Alors $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ est décroissante et

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x}(\ln x)^{-2}\,dx = -(\ln x)^{-1}\Big|_2^\infty = \frac{1}{\ln 2} - \lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{\ln\xi} = \frac{1}{\ln 2}.$$

On en déduit que la série converge.