CALCUL INTÉGRAL

Exercice 1

On donne la fonction $f(x)=\frac{1}{2}x-1$.

a) Calculer $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x$ et hachurer la surface correspondante.

b) Calculer $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x$ et hachurer la surface correspondante.

Exercice 2

Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=ax^2+bx+c$

c) $f(x)=x^n$, $n\neq -1$

d) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$

e) $f(x)=\mathrm{e}^{kx}$

f) $f(x)=\sin(x)$

g) $f(x)=\sin(ax+b)$

h) $f(x)=\frac{k}{x}$

i) $f(x)=\frac{1}{ax+b}$

j) $f(x)=(ax+b)^n$, $n\neq -1$

k) $f(x)=\sqrt{ax+b}$

l) $f(x)=\frac{ax+b}{x}$

Exercice 3

a) Montrer que $F(x)=\ln(ax)$ et $G(x)=\ln(x)$ sont deux primitives de la même fonction.

b) En déduire la relation $\ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$.

Exercice 4

a) Montrer que la dérivée de la fonction $F(x)=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot\mathrm{e}^x$ est de la forme $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\cdot\mathrm{e}^x$. Exprimer a, b et c en fonction de A, B et C.

b) Exprimer A, B et C en fonction de a, b et c puis en déduire une primitive de la fonction $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\mathrm{e}^x$.

Exercice 5

Trouver une primitive de $f(x)=(2x-5)\cdot\mathrm{e}^{-x}$ et de $g(x)=\left(-x^2+3x-5\right)\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Exercice 6

Calculer les intégrales ci-dessous et hachurer les surfaces correspondantes sur un graphe.

a) $\int_0^4 x(4-x)\mathrm{d}x$

c) $\int_{-5}^{5} |x|\,\mathrm{d}x$

e) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}$

b) $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x}$

d) $\int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

f) $\int_{-2}^{2} \cosh(x)\mathrm{d}x$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \frac{2x-5}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$

Indication : mettre la fonction à intégrer sous la forme $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$

b) $\int_4^5 \frac{3x+2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+7x+3}$

Exercice 8

Trouver une primitive des fonctions rationnelles ci-dessous.

a) $y=\frac{2x-5}{x+3}$

c) $y=\frac{2x^3-5x^2+7x-5}{2x-1}$

e) $y=\frac{1}{x^2+1}$

b) $y=\frac{x^2-4x+3}{2x-5}$

d) $y=\frac{1}{x^2-4}$

f) $y=\frac{1}{x^2-6x+9}$

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes, puis déterminer leur limite lorsque $b \to +\infty$

a) $\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

b) $\int_0^b x\cdot \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

c) $\int_0^b x^2\cdot \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

d) $\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

Exercice 10

Hachurer et calculer l'aire de la surface fermée délimitée par les paraboles $p_1 : y = -x^2 + 6x - 5$ et $p_2 : y = x^2 - 8x + 15$.

Exercice 11

On donne la parabole $p : y = x^2 - 4x + 3$ ainsi que $A(1; a)$ et $B(5; b)$ deux points de p. Calculer l'aire de la surface comprise entre l'arc AB et la corde qui l'intercepte.

Exercice 12

a) Représenter dans un repère orthonormé les graphes des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sur $[0; 2\pi]$.

b) Calculer l'aire de la surface fermée délimitée par les deux graphes.

Exercice 13

a) Représenter dans un repère orthonormé l'hyperbole d'équation $y = \frac{2x-1}{x+2}$ et la droite d'équation $x - y - 2 = 0$.

b) Calculer l'aire de la surface fermée délimitée par les deux courbes.

Exercice 14

On donne la fonction $f(x) = \frac{2x^2}{(x-3)^2}$.

a) Étudier cette fonction.

b) On considère la fonction $F(x) = ax + \frac{b}{x-3} + c \cdot \ln(|x-3|)$ où a, b et c sont des nombres réels. Trouver les valeurs de ces trois nombres, sachant que la fonction $F(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$.

c) Calculer l'aire de la surface comprise entre le graphe de f et son asymptote horizontale, pour $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$. Hachurer cette surface.

Exercice 15

En intégrant par parties, trouver une primitive des fonctions ci-dessous.

a) $y = x \cdot \cos(x)$ d) $y = \frac{\ln(x)}{x}$ ✓g) $y = \sin(x) \cdot e^x$

b) $y = x \cdot \ln(x)$ e) $y = x \cdot e^{-x}$ ✓h) $y = \cos(x) \cdot e^x$

c) $y = \ln(x) = \ln(x) \cdot 1$ f) $y = x^2 \cdot e^{-x}$ ✓i) $y = \cos(x) \cdot \sin(x)$

Exercice 16

En intégrant par parties, puis en employant une relation fondamentale de la trigonométrie, trouver une primitive des fonctions $\sin^2(x)$ et $\cos^2(x)$.

Exercice 17

En procédant par essai, trouver une primitive des fonctions ci-dessous.

a) $y = 3x \cdot e^{-x^2}$ d) $y = 5x \cdot \cos\left(x^2 - 1\right)$ g) $y = \frac{-2e^{-x}}{1 + 3e^{-x}}$

b) $y = x^2 \cdot e^{-2x^3}$ e) $y = \frac{-7x}{x^2 + 5}$ h) $y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

c) $y = \sin(3x - 5)$ f) $y = \frac{3x - 6}{x^2 - 4x + 9}$ i) $y = (3x - 2)^2$

Exercice 18

On donne la parabole p d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$. On appelle A le point d'intersection de p et de l'axe des ordonnées. La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points, on appelle B le point d'intersection qui a la plus grande abscisse. On considère encore les droites t_A et t_B où t_A est la tangente à la parabole en A et t_B la tangente à la parabole en B. Hachurer l'aire de la surface fermée délimitée par les deux tangentes et la parabole, puis calculer l'aire de cette surface.