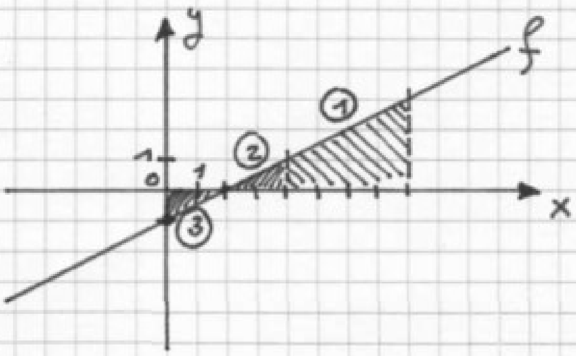
CALCUL INTEGRAL

CORRIGE DES EXERCICES

Exercice 1

$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$:



a) $\int_4^8 f(x)$ = aire du trapèze 1 $= \frac{3+1}{2} \cdot 4 = \frac{4}{2} \cdot 4 = 2 \cdot 4 = \underline{\underline{8.}}$

b) $\int_0^8 f(x)$ = aire du trapèze 1 + aire du triangle 2 − aire du triangle 3 (− car l'aire est au-dessous de l'axe Ox) =

$= 8 + \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = 8 + 1 - 1 = \underline{\underline{8.}}$

Exercice 2

a) $f(x) = x^2 \rightarrow \underline{\underline{F(x) = \frac{x^3}{3} + c^{ste}}}$

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$

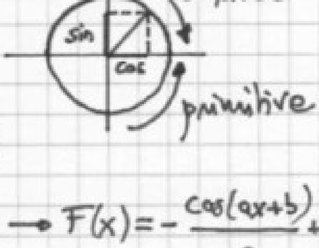
$\rightarrow \underline{\underline{F(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + c^{ste}}}$

c) $f(x) = x^n,\ n \neq -1,\ \rightarrow \underline{\underline{F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c^{ste}}}$

d) $f(x) = e^{2x} \rightarrow \underline{\underline{F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + c^{ste}}}$

e) $f(x) = e^{kx} \rightarrow \underline{\underline{F(x) = \frac{e^{kx}}{k} + c^{ste}}}$

f) $f(x) = \sin(x)$



$\rightarrow \underline{\underline{F(x) = -\cos(x) + c^{ste}}}$

g) $f(x) = \sin(ax+b) \rightarrow \underline{\underline{F(x) = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c^{ste}}}$

h) $f(x) = \frac{k}{x} \rightarrow \underline{\underline{F(x) = k\ln(x) + c^{ste}}}$

i) $f(x) = \frac{1}{ax+b} \rightarrow \underline{\underline{F(x) = \frac{\ln(ax+b)}{a} + c^{ste}}}$

← primitive	dérivée →	
x^n	nx^{n-1}	$n=3$
x^3	$3x^2$	$:3$
$\frac{x^3}{3}$	x^2	
$\frac{x^3}{3}$	x^2	$\cdot a$
$\frac{ax^3}{3}$	ax^2	
x^2	$2x$	$:2$
$\frac{x^2}{2}$	x	$\cdot b$
$\frac{bx^2}{2}$	bx	
x	1	$\cdot c$
cx	c	
x^{n+1}	$(n+1)x^n$	$:(n+1)$ $n\neq -1$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n	
e^x	e^x	
e^{2x}	$2e^{2x}$	$:2$
$\frac{e^{2x}}{2}$	e^{2x}	
e^{kx}	ke^{kx}	$:k$
$\frac{e^{kx}}{k}$	e^{kx}	
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	
$-\cos(ax+b)$	$a\sin(ax+b)$	$:a$
$-\frac{\cos(ax+b)}{a}$	$\sin(ax+b)$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$k\ln(x)$	$\frac{k}{x}$	
$\ln(ax+b)$	$\frac{1}{ax+b}\cdot a$	$:a$
$\frac{\ln(ax+b)}{a}$	$\frac{1}{ax+b}$	

j) $f(x) = (ax+b)^n,\ n \neq -1$

$\rightarrow F(x) = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c^{te}$

$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n	
$\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$(ax+b)^n \cdot a$	$: a$
$\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$	$(ax+b)^n$	

k) $f(x) = \sqrt{ax+b}$

$\rightarrow F(x) = \dfrac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + c^{te}$

$\frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$

$\dfrac{1}{3/2} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n	$n = \frac{1}{2}$
$\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$	$x^{\frac{1}{2}}$	
$\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{1}{2}}$	
$\dfrac{2}{3}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$	$(ax+b)^{\frac{1}{2}} \cdot a$	$: a$
$\dfrac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$	$(ax+b)^{\frac{1}{2}}$	

l) $f(x) = \dfrac{ax+b}{x} = \dfrac{ax}{x} + \dfrac{b}{x} = a + \dfrac{b}{x}$

$\rightarrow F(x) = ax + b\ln(x) + c^{te}$

ax	a
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$b\ln(x)$	$\dfrac{b}{x}$

Exercice 3

a) Cherchons les dérivées F' et G' de F et G:

$F(x) = \ln(ax) \longrightarrow F'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$;

$G(x) = \ln(x) \longrightarrow G'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi $F'(x) = G'(x)$, ce qui signifie que F et G sont des primitives de la même fonction.

b) Comme $F'(x) = G'(x)$, on a $F(x) = G(x) + c^{\underline{te}}$, i.e.

$\ln(ax) = \ln(x) + c^{\underline{te}}$.

Si on prend $x = 1$, on trouve $\ln(a) = \ln(1) + c^{\underline{te}}$.

Comme $\ln(1) = 0$, on en déduit que $c^{\underline{te}} = \ln(a)$.

D'où $\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$.

Exercice 4

a) $F(x)=(Ax^2+Bx+C)e^x = u\cdot v$ avec $u=Ax^2+Bx+C$ et $v=e^x$.

On a $F'(x)=u'v+uv'$ où $u'=2Ax+B$ et $v'=e^x$.

Ainsi $F'(x)=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx+C)e^x=$
$$=(2Ax+B+Ax^2+Bx+C)e^x=$$
$$=(Ax^2+(2A+B)x+B+C)e^x.$$

Ainsi $F'(x)$ est bien de la forme $(ax^2+bx+c)e^x$, avec $a=A$, $b=2A+B$ et $c=B+C$.

b) Avec $a=A$, $b=2A+B$ et $c=B+C$, on a:

$A=a$, $B=b-2A=b-2a$ et $C=c-B=c-(b-2a)=c-b+2a$.

La primitive de $f(x)=(x^2+1)e^x$ est donc $F(x)=(Ax^2+Bx+C)$ où $A=a$, $B=b-2a$ et $C=c-b+2a$ et $a=1$, $b=0$ et $c=1$.

Ainsi $A=1$, $B=0-2.1=-2$ et $C=1-0+2.1=1+2=3$.

Donc une primitive de $f(x)=(x^2+1)e^x$ est $(x^2-2x+3)e^x$.

Exercice 5

$f(x) = (2x-5)e^{-x}$.

Une primitive est de la forme $F(x) = (Ax+B)e^{-x}$.

On calcule $F'(x)$ et on identifiera F' à f.

$F(x) = u \cdot v$ avec $u = Ax+B$ et $v = e^{-x}$.

$F'(x) = u'v + uv'$ où $u' = A$ et $v' = -e^{-x}$.

Donc $F'(x) = Ae^{-x} + (Ax+B)(-e^{-x}) = Ae^{-x} + (-Ax-B)e^{-x} = (A-Ax-B)e^{-x} =$

$= (-Ax + A - B)e^{-x}$.

Par identification avec $f(x) = (2x-5)e^{-x}$, on a $-A = 2$ et $A - B = -5$,

d'où $A = -2$ et $-2 - B = -5 \Rightarrow -B = -3 \Rightarrow B = 3$.

On a donc $\underline{\underline{F(x) = (-2x+3)e^{-x}}}$.

$g(x) = (-x^2 + 3x - 5)e^{\frac{x}{2}}$.

Une primitive est de la forme $G(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{\frac{x}{2}}$.

On calcule $G'(x)$ et on identifiera G' à g.

$G(x) = u \cdot v$ avec $u = Ax^2 + Bx + C$ et $v = e^{\frac{x}{2}}$.

$G'(x) = u'v + uv'$ où $u' = 2Ax + B$ et $v' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

Donc $G'(x) = (2Ax+B)e^{\frac{x}{2}} + (Ax^2+Bx+C)\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} =$

$= \left(2Ax + B + (Ax^2 + Bx + C)\frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} =$

$= \left(2Ax + B + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}x + C\right)e^{\frac{x}{2}} =$

$= \left(\frac{A}{2}x^2 + \left(2A + \frac{B}{2}\right)x + B + C\right)e^{\frac{x}{2}}$.

Par identification avec $g(x) = (-x^2 + 3x - 5)e^{\frac{x}{2}}$, on a :

$\frac{A}{2} = -1$, $2A + \frac{B}{2} = 3$ et $B + C = -5$.

$\frac{A}{2} = -1 \Rightarrow A = -2$;

$2A + \frac{B}{2} = 3 \Rightarrow -4 + \frac{B}{2} = 3 \Rightarrow \frac{B}{2} = 7 \Rightarrow B = 14$;

$B + C = -5 \Rightarrow 14 + C = -5 \Rightarrow C = -19$.

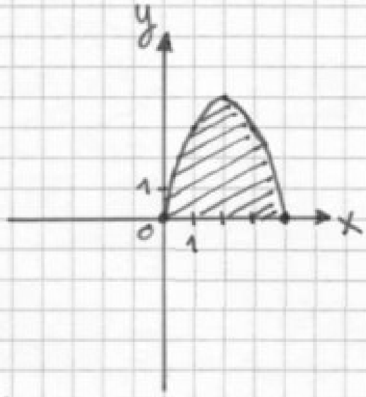
On a donc $\underline{\underline{G(x) = (-2x^2 + 14x - 19)e^{\frac{x}{2}}}}$.

Exercice 6

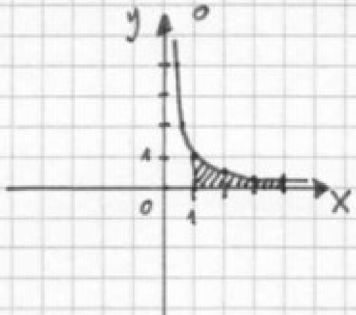
a) $\int_0^4 x(4-x)dx = \int_0^4 (4x-x^2)dx = \int_0^4 4x\,dx - \int_0^4 x^2 dx = 4\int_0^4 x\,dx - \int_0^4 x^2\,dx =$

$= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 4\left(\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{4^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) = 4\cdot\frac{16}{2} - \frac{64}{3} = \frac{64}{2} - \frac{64}{3} =$

$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{96}{3} - \frac{64}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}.$

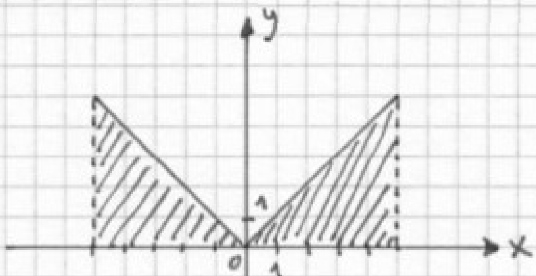


b) $\int_1^4 \frac{dx}{x} = \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^4 = \ln(4) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \underline{\ln(4) \cong 1{,}386.}$

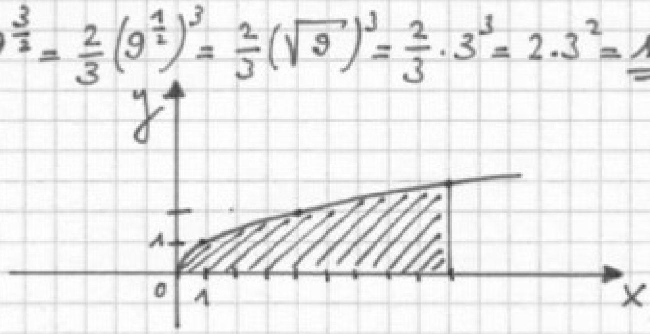


c) $\int_{-5}^{5} |x|\,dx = \int_{-5}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{5} |x|\,dx = \int_{-5}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{5} x\,dx = -\int_{-5}^{0} x\,dx + \int_{0}^{5} x\,dx =$

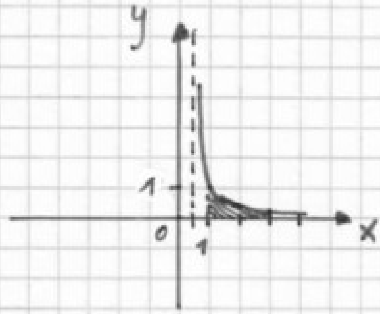
$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = -\left[\frac{0^2}{2} - \frac{(-5)^2}{2}\right] + \left[\frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = -\left(-\frac{25}{2}\right) + \frac{25}{2} = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} = \underline{\underline{25.}}$



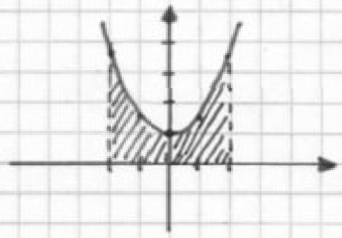
d) $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot 3^3 = 2\cdot 3^2 = \underline{\underline{18.}}$



e) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{2x-1} = \left[\frac{\ln(2x-1)}{2}\right]_1^3 = \frac{\ln(2\cdot 3-1)}{2} - \frac{\ln(2\cdot 1-1)}{2} = \frac{\ln(5)}{2} - \frac{\ln(1)}{2} = \frac{\ln(5)}{2} \cong 0{,}805.$



f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \cosh(x)\,dx = \left[\sinh(x)\right]_{-2}^{2} = \sinh(2) - \sinh(-2) \cong 3{,}627 - (-3{,}627) = 7{,}254.$



Exercice 7

a) Décomposons $f(x)$ sous la forme $\frac{2x-5}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$:

$\Rightarrow 2x-5 = A(x+1) + Bx \Rightarrow 2x-5 = Ax+A+Bx \Rightarrow 2x-5 = (A+B)x + A$

$\Rightarrow A+B = 2$ et $A = -5 \Rightarrow A = -5$ et $B = 7$.

Donc: $f(x) = -\frac{5}{x} + \frac{7}{x+1}$.

Une primitive de $-\frac{5}{x}$ est $-5\ln(x)$.
Une primitive de $\frac{7}{x+1}$ est $7\ln(x+1)$.
Donc une primitive de f est $F(x) = -5\ln(x) + 7\ln(x+1)$.

On a ainsi $\int_1^2 \frac{2x-5}{x(x+1)}\,dx = \left[-5\ln(x)+7\ln(x+1)\right]_1^2 =$

$= -5\ln(2)+7\ln(3) - (-5\underbrace{\ln(1)}_{0} + 7\ln(2)) =$

$= -5\ln(2) + 7\ln(3) - 7\ln(2) = \underline{\underline{7\ln(3) - 12\ln(2)}}$.

b) On a: $x^2-9 = (x+3)(x-3)$.

Ainsi $\frac{3x+2}{x^2-9} = \frac{3x+2}{(x+3)(x-3)}$.

Décomposons $\frac{3x+2}{x^2-9}$ en $\frac{3x+2}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$:

$\Rightarrow 3x+2 = A(x-3) + B(x+3) \Rightarrow 3x+2 = Ax - 3A + Bx + 3B$

$\Rightarrow 3x+2 = (A+B)x + 3B - 3A \Rightarrow A+B = 3$ et $3B - 3A = 2$

$\Rightarrow B = 3-A \Rightarrow 3(3-A) - 3A = 2 \Rightarrow 9 - 3A - 3A = 2$

$\Rightarrow -6A = -7 \Rightarrow A = \frac{7}{6} \Rightarrow B = 3 - \frac{7}{6} = \frac{18}{6} - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$

Donc $\frac{3x+2}{x^2-9} = \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x+3} + \frac{11}{6}\cdot\frac{1}{x-3}$.

Une primitive de $\frac{1}{x+3}$ est $\ln(x+3)$.
Une primitive de $\frac{1}{x-3}$ est $\ln(x-3)$.
Donc une primitive de $\frac{3x+2}{x^2-9}$ est $\frac{7}{6}\ln(x+3) + \frac{11}{6}\ln(x-3)$.

On a ainsi $\int_4^5 \frac{3x+2}{x^2-9}\,dx = \left[\frac{7}{6}\ln(x+3) + \frac{11}{6}\ln(x-3)\right]_4^5 =$

$= \frac{7}{6}\ln(8) + \frac{11}{6}\ln(2) - \frac{7}{6}\ln(7) - \frac{11}{6}\underbrace{\ln(1)}_{0} =$

$= \underline{\underline{\frac{7}{6}\ln(8) + \frac{11}{6}\ln(2) - \frac{7}{6}\ln(7)}}$.

c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x^2+7x+3}\,dx$: factorisons $2x^2+7x+3$:

$2x^2+7x+3=0$: $a=2$, $b=7$ et $c=3$;

$\Delta=b^2-4ac=7^2-4.2.3=49-24=25$; $\sqrt{\Delta}=5$;

donc $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7+5}{2\cdot 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ et

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7-5}{2\cdot 2}=\frac{-12}{4}=-3$;

on a donc $2x^2+7x+3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x+1)(x+3)$.

Ainsi $\frac{1}{2x^2+7x+3}=\frac{1}{(2x+1)(x+3)}$.

Décomposons $\frac{1}{2x^2+7x+3}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x+3}$:

$\Rightarrow 1=A(x+3)+B(2x+1) \Rightarrow 1=Ax+3A+2Bx+B$

$\Rightarrow 1=(A+2B)x+3A+B \Rightarrow A+2B=0$ et $B+3A=1$

$\Rightarrow A=-2B \Rightarrow B+3(-2B)=1 \Rightarrow B-6B=1 \Rightarrow -5B=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow A=-2\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$.

Donc $\frac{1}{2x^2+7x+3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{5}\,\frac{1}{x+3}$.

Une primitive de $\frac{1}{2x+1}$ est $\frac{\ln(2x+1)}{2}$.

Une primitive de $\frac{1}{x+3}$ est $\ln(x+3)$.

Donc une primitive de $\frac{1}{2x^2+7x+3}$ est $\frac{2}{5}\,\frac{\ln(2x+1)}{2}-\frac{1}{5}\ln(x+3)=$

$=\frac{\ln(2x+1)}{5}-\frac{\ln(x+3)}{5}$.

On a ainsi $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x^2+7x+3}\,dx=\left[\frac{\ln(2x+1)}{5}-\frac{\ln(x+3)}{5}\right]_0^3=$

$=\frac{\ln(7)}{5}-\frac{\ln(6)}{5}-\left(\underbrace{\frac{\ln(1)}{5}}_{0}-\frac{\ln(3)}{5}\right)=$

$=\frac{\ln(7)}{5}-\frac{\ln(6)}{5}+\frac{\ln(3)}{5}=\frac{1}{5}\left(\ln(7)+\ln(3)-\ln(6)\right)=$

$=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{7\cdot 3}{6}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{7}{2}\right)}}$.

Exercice 8

a) $y = \frac{2x-5}{x+3}$: on effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2x-5 & x+3 \\ \cline{2-2} -(2x+6) & 2 \\ \hline -11 & \end{array}$$

Ainsi : $y = 2 - \frac{11}{x+3} = 2 - 11 \cdot \frac{1}{x+3}$.

Une primitive de y est donc : $\underline{\underline{2x - 11\ln(x+3) + c^{\underline{ste}}}}$.

b) $y = \frac{x^2-4x+3}{2x-5}$: on effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+3 & 2x-5 \\ \cline{2-2} -\left(x^2-\frac{5x}{2}\right) & \frac{x}{2}-\frac{3}{4} \\ \cline{1-1} -\frac{3}{2}x+3 & \\ -\left(-\frac{3}{2}x+\frac{15}{4}\right) & \\ \cline{1-1} -\frac{3}{4} & \end{array}$$

Ainsi $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x-5}$.

Une primitive de y est donc $\frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\frac{\ln(2x-5)}{2} + c^{\underline{ste}} =$

$$= \underline{\underline{\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} - \frac{3\ln(2x-5)}{8} + c^{\underline{ste}}}}.$$

c) $y = \frac{2x^3-5x^2+7x-5}{2x-1}$; on effectue la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x^2+7x-5 & 2x-1 \\ \cline{2-2} -\left(2x^3-x^2\right) & x^2-2x+\frac{5}{2} \\ \cline{1-1} -4x^2+7x-5 & \\ -\left(-4x^2+2x\right) & \\ \cline{1-1} 5x-5 & \\ -\left(5x-\frac{5}{2}\right) & \\ \cline{1-1} -\frac{5}{2} & \end{array}$$

Ainsi $y = x^2 - 2x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2x-1}$.

Une primitive de y est donc : $\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}\frac{\ln(2x-1)}{2} + c^{\underline{ste}} =$

$$= \underline{\underline{\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{5\ln(2x-1)}{4} + c^{\underline{ste}}}}.$$

d) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$: on a $x^2-4 = (x+2)(x-2)$.

Décomposons y en $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$:

$\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x+2) \Rightarrow 1 = Ax - 2A + Bx + 2B$

$\Rightarrow 1 = (A+B)x + 2B - 2A \Rightarrow A + B = 0$ et $2B - 2A = 1$

$\Rightarrow B = -A \Rightarrow 2(-A) - 2A = 1 \Rightarrow -2A - 2A = 1 \Rightarrow -4A = 1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow B = \dfrac{1}{4}$.

Donc $\dfrac{1}{x^2-4} = -\dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{x-2}$.

Une primitive de $\dfrac{1}{x+2} = \ln(x+2)$.

Une primitive de $\dfrac{1}{x-2} = \ln(x-2)$.

Donc une primitive de y est $\underline{\underline{-\dfrac{1}{4}\ln(x+2) + \dfrac{1}{4}\ln(x-2) + c^{ste}}}$.

e) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$: x^2+1 ne se décompose pas.

D'après "Formulaires et tables", une primitive de $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ est $\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Ici $a = 1 \Rightarrow$ une primitive de y est $\underline{\underline{\arctan(x) + c^{ste}}}$.

f) $y = \dfrac{1}{x^2-6x+9}$: on a $x^2-6x+9 = (x+3)^2$

Donc $y = \dfrac{1}{(x+3)^2}$.

Une primitive de $\dfrac{1}{x^2}$ est $-\dfrac{1}{x}$.

Donc une primitive de $y = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ est $\underline{\underline{-\dfrac{1}{x+3} + c^{ste}}}$.

Exercice 9

a) Une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$.

On a donc $\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b}-(-e^{-0}) = -e^{-b}+1 = \underline{\underline{1-e^{-b}}}$.

Si $b \to +\infty$, $e^{-b} \to 0$, et, donc $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \underline{\underline{1}}$.

b) Une primitive de xe^{-x} est de la forme $F(x) = (Ax+B)e^{-x}$.

On a $F'(x) = Ae^{-x} + (Ax+B)(-e^{-x}) = Ae^{-x} + (-Ax-B)e^{-x} =$
$= (A-Ax-B)e^{-x} = (-Ax+A-B)e^{-x}$.

On doit avoir $F'(x) = xe^{-x} \Rightarrow -A=1$ et $A-B=0 \Rightarrow A=-1$ et $B=-1$.

Une primitive de xe^{-x} est $(-x-1)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$.

On a donc $\int_0^b xe^{-x}\,dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^b = -(b+1)e^{-b} - (-(0+1)e^{-0}) =$
$= -(b+1)e^{-b}+1 = \underline{\underline{1-(b+1)e^{-b}}}$.

Si $b \to +\infty$, $(b+1)e^{-b} \to 0$ (puisque l'exponentielle gagne), et, donc, $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \underline{\underline{1}}$.

c) Une primitive de x^2e^{-x} est de la forme $F(x) = (Ax^2+Bx+C)e^{-x}$.

On a $F'(x) = (2Ax+B)e^{-x} + (Ax^2+Bx+C)(-e^{-x}) =$
$= (2Ax+B-Ax^2-Bx-C)e^{-x} = (-Ax^2+(2A-B)x+B-C)e^{-x}$.

On doit avoir $F'(x) = x^2e^{-x} \Rightarrow -A=1$, $2A-B=0$ et $B-C=0$
$\Rightarrow A=-1$, $B=2A=-2$ et $C=B=-2$.

Une primitive de x^2e^{-x} est ainsi $(-x^2-2x-2)e^{-x} = -(x^2+2x+2)e^{-x}$.

On a donc $\int_0^b x^2e^{-x} = \left[-(x^2+2x+2)e^{-x}\right]_0^b = -(b^2+2b+2)e^{-b} - (-(0^2+2.0+2)e^{-0}) =$
$= -(b^2+2b+2)e^{-b}+2 = \underline{\underline{2-(b^2+2b+2)e^{-b}}}$.

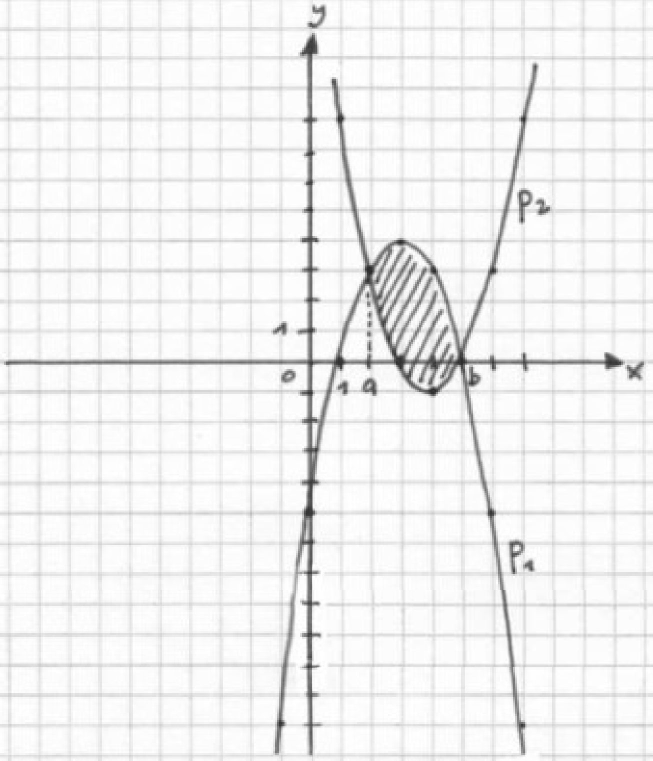
Si $b \to +\infty$, $(b^2+2b+2)e^{-b} \to 0$ (puisque l'exponentielle gagne), et, donc,
$\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = \underline{2}$.

d) Une primitive de $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ est $\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$.

On a donc $\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} - (-\frac{1}{1}) = -\frac{1}{b}+1 = \underline{\underline{1-\frac{1}{b}}}$.

Si $b \to +\infty$, $\frac{1}{b} \to 0$, et, donc $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \underline{\underline{1}}$.

Exercice 10



L'aire hachurée est donnée par $\int_a^b (p_1(x) - p_2(x))\,dx$, où a et b sont les x tels que $p_1(x) = p_2(x)$:

$p_1(x) = p_2(x) \Longrightarrow -x^2 + 6x - 5 = x^2 - 8x + 15 \Longrightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Longrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$:

on a $a = 1$, $b = -7$ et $c = 10$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4.1.10 = 49 - 40 = 9$; $\sqrt{\Delta} = 3$; ainsi

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{2.1} = \frac{10}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-3}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$;

on a donc $a = 2$ et $b = 5$;

$p_1(x) - p_2(x) = -x^2 + 6x - 5 - (x^2 - 8x + 15) = -x^2 + 6x - 5 - x^2 + 8x - 15 = -2x^2 + 14x - 20$;

une primitive de $p_1(x) - p_2(x)$ est : $-2\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2} - 20x = -\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 20x$;

ainsi : $\int_a^b (p_1(x) - p_2(x))\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 20x\right]_2^5 =$

$= -\frac{2}{3}5^3 + 7.5^2 - 20.5 - \left(-\frac{2}{3}.2^3 + 7.2^2 - 20.2\right) =$

$= -\frac{2}{3}.125 + 175 - 100 - \left(-\frac{2}{3}.8 + 28 - 40\right) =$

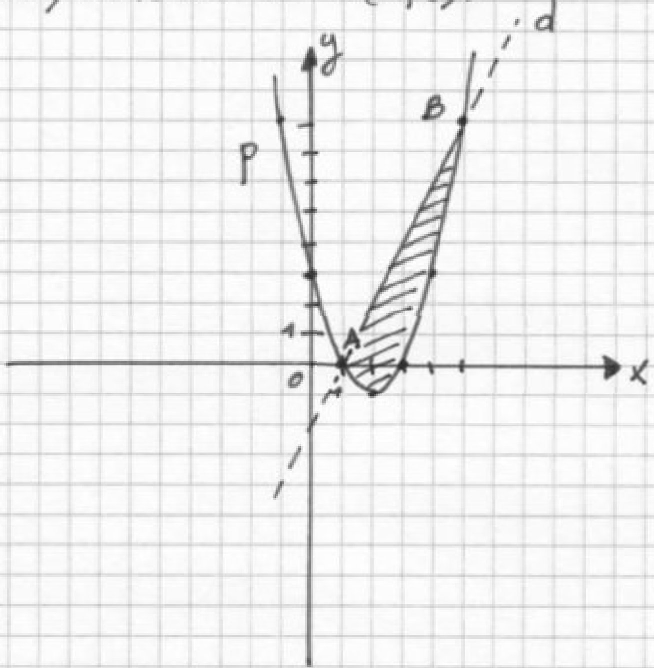
$= -\frac{250}{3} + 75 - \left(-\frac{16}{3} - 12\right) = -\frac{250}{3} + 75 + \frac{16}{3} + 12 = -\frac{234}{3} + 87 =$

$= -78 + 87 = \underline{9.}$

Exercice 11

$p: y = x^2 - 4x + 3.$

$A(1;a)$: $x = 1 \Rightarrow y = 1 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow A(1;0)$.
$B(5;b)$: $x = 5 \Rightarrow y = 25 - 20 + 3 = 8 \Rightarrow B(5;8)$.



L'aire que l'on cherche est donc $\int_1^5 (d(x) - p(x))\,dx$ où d est la droite passant par A et B.

On a: $d: y = mx + h$: m est la pente $\Rightarrow m = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow y = 2x + h$;
avec $A(1;0)$, on a $0 = 2 \cdot 1 + h \Rightarrow h = -2$;
$\Rightarrow d: y = 2x - 2$

De plus: $d(x) - p(x) = 2x - 2 - (x^2 - 4x + 3) = 2x - 2 - x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 6x - 5$.

Une primitive de $d(x)$ est: $-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x$.

Ainsi $\int_1^5 (d(x) - p(x))\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5 =$

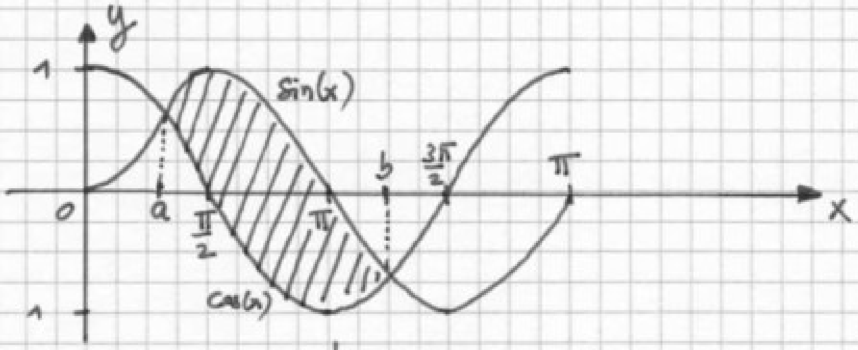
$= -\frac{5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 - \left(-\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right) =$

$= -\frac{125}{3} + 75 - 25 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) = -\frac{125}{3} + 50 - \left(-\frac{1}{3} - 2\right) =$

$= -\frac{125}{3} + 50 + \frac{1}{3} + 2 = -\frac{124}{3} + 52 = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}.$

Exercice 12

a)



b) L'aire cherchée est $\int_a^b (\sin(x) - \cos(x))\,dx$.

Commençons par chercher a et b, i.e. les x tels que $\sin(x) = \cos(x)$:

$\sin(x) = \cos(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Rightarrow \tan(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k.\pi$;

ainsi $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

Une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x)$.

Une primitive de $\cos(x)$ est $\sin(x)$.

Une primitive de $(\sin(x) - \cos(x))$ est donc $-\cos(x) - \sin(x)$.

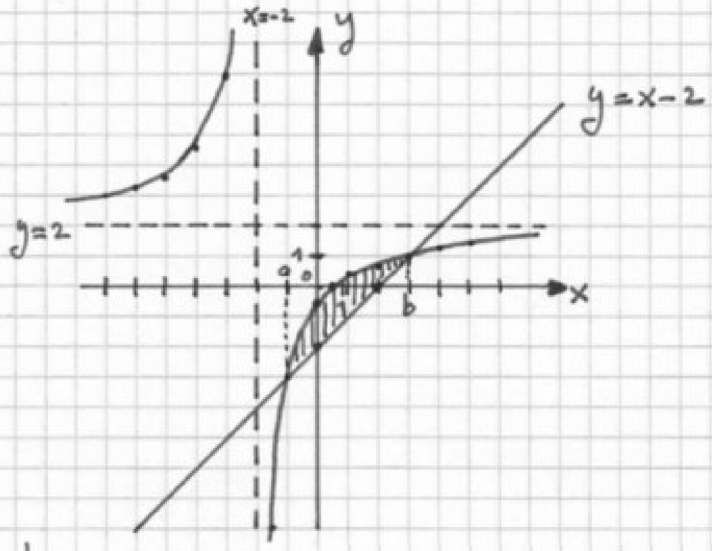
Ainsi : $\int_a^b (\sin(x) - \cos(x))\,dx = \Big[-\cos(x) - \sin(x)\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} =$

$= -\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}.}}$

Exercice 13

a)



b) L'aire cherchée est $\int_a^b \left(\frac{2x-1}{x+2} - (x-2) \right) dx$.

Commençons à chercher a et b : a sont les x tels que $\frac{2x-1}{x+2} = x-2$:

$\Rightarrow 2x-1 = (x-2)(x+2) \Rightarrow 2x-1 = x^2-4 \Rightarrow x^2-2x-3=0$:

on a $a=1$, $b=-2$ et $c=-3$; $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 4+12 = 16$; $\sqrt{16}=4$;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1$;

ainsi $a=-1$ et $b=3$.

Cherchons maintenant une primitive de $\frac{2x-1}{x+2} - (x-2)$:

on a $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{2x+4-5}{x+2} = \frac{2x+4}{x+2} - \frac{5}{x+2} = 2 - \frac{5}{x+2}$;

ainsi $\frac{2x-1}{x+2} - (x-2) = 2 - \frac{5}{x+2} - x + 2 = -x+4-\frac{5}{x+2}$;

ainsi une primitive de $\frac{2x-1}{x+2} - (x-2)$ est : $-\frac{x^2}{2} + 4x - 5\ln(x+2)$.

Ainsi $\int_a^b \left(\frac{2x-1}{x+2} - (x-2) \right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - 5\ln(x+2) \right]_{-1}^{3} =$

$= \left[-\frac{9}{2} + 12 - 5\ln(5) \right] - \left[-\frac{1}{2} - 4 - 5\underbrace{\ln(1)}_{0} \right] =$

$= \frac{15}{2} - 5\ln(5) + \frac{9}{2} = \frac{24}{2} - 5\ln(5) = \underline{\underline{12 - 5\ln(5)}}$.

Exercice 14

$$f(x)=\frac{2x^2}{(x-3)^2}.$$

a) Domaine de définition: on doit avoir $(x-3)^2\neq 0 \Rightarrow x-3\neq 0 \Rightarrow x=3$

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{3\};$$

Parité: $f(-x)=\dfrac{2(-x)^2}{(-x-3)^2}=\dfrac{2x^2}{(x+3)^2}\neq \pm f(x) \Rightarrow f$ n'est ni paire ni impaire ;

Intersections avec l'axe x: on pose $y=0 \Rightarrow \dfrac{2x^2}{(x-3)^2}=0 \Rightarrow 2x^2=0 \Rightarrow x=0$

$$\Rightarrow (0;0);$$

Intersection avec l'axe y: on pose $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0;0)$;

Asymptote verticale: $x=3$ est un exclu $\Rightarrow x=3$ est une asymptote verticale ;

si $x \underset{<}{\rightarrow} 3$, $\dfrac{2x^2}{(x-3)^2}\rightarrow \dfrac{18}{0+}=+\infty$;

si $x \underset{>}{\rightarrow} 3$, $\dfrac{2x^2}{(x-3)^2}\rightarrow \dfrac{18}{0+}=+\infty$;

Asymptote non verticale: on a $\dfrac{2x^2}{(x-3)^2}=\dfrac{2x^2}{x^2-6x+9}$;

effectuons la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & x^2-6x+9 \\ \cline{2-2} -(2x^2-12x+18) & 2 \\ \cline{1-1} 12x-18 & \end{array}$$

ainsi $\dfrac{2x^2}{(x-3)^2}=2+\dfrac{12x-18}{x^2-6x+9}=2+\dfrac{12x-18}{(x-3)^2}$;

ainsi $y=2$ est une asymptote horizontale;

si $x\rightarrow+\infty$, $\dfrac{2x^2}{(x-3)^2}\rightarrow 2+$;

si $x\rightarrow-\infty$, $\dfrac{2x^2}{(x-3)^2}\rightarrow 2-$;

Tableau des signes:

x		0		3	
$f(x)$	$+$	0	$+$	▨	$+$

Dérivée: On a: $f(x)=\dfrac{u}{v}$ où $u=2x^2$ et $v=(x-3)^2$;

$f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'=4x$ et $v'=2(x-3)$;

donc $f'(x)=\dfrac{4x\cdot(x-3)^2-2x^2\cdot 2(x-3)}{((x-3)^2)^2}=\dfrac{(x-3)(4x(x-3)-4x^2)}{(x-3)^4}=$

$$=\frac{4x(x-3)-4x^2}{(x-3)^3}=\frac{4x^2-12x-4x^2}{(x-3)^3}=\frac{-12x}{(x-3)^3};$$

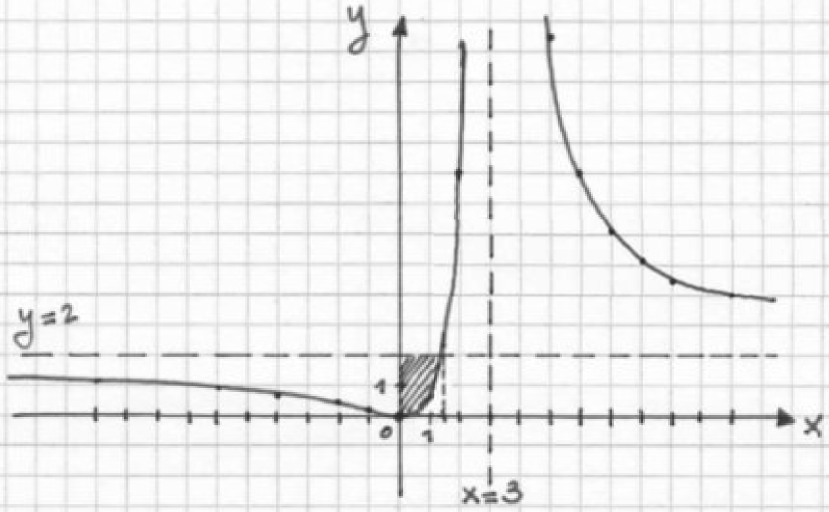
Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-12x}{(x-3)^3}=0 \Rightarrow -12x=0 \Rightarrow x=0$;

Tableau de croissance:

x		0		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	▨	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	▨	↘

En $x=0$, on a donc un minimum $\rightarrow$ le minimum est en $(0;0)$.

Graphe:



b) $F(x) = ax + \dfrac{b}{x-3} + c \cdot \ln(|x-3|)$.

On cherche a, b et c tels que $F'(x) = f(x)$.

On a: $F'(x) = a - \dfrac{b}{(x-3)^2} + \dfrac{c}{x-3} = \dfrac{a(x-3)^2 - b + c(x-3)}{(x-3)^2} =$

$= \dfrac{a(x^2-6x+9) - b + cx - 3c}{(x-3)^2} = \dfrac{ax^2 - 6ax + 9a - b + cx - 3c}{(x-3)^2} =$

$= \dfrac{ax^2 + (c-6a)x + 9a - b - 3c}{(x-3)^2}$.

Pour que $F'(x) = f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-3)^2}$, on doit avoir: $a = 2$, $c - 6a = 0$ et $9a - b - 3c = 0$.

Avec $a = 2$, $c - 6a = 0 \Rightarrow c = 6a = 6 \cdot 2 = 12$.
Avec $a = 2$ et $c = 12$, $9a - b - 3c = 0 \Rightarrow b = 9a - 3c = 9 \cdot 2 - 3 \cdot 12 = 18 - 36 = -18$.

On a donc $\underline{\underline{a=2,\ b=-18 \text{ et } c=12}}$.

Une primitive de $f(x)$ est donc $F(x) = 2x - \dfrac{18}{x-3} + 12\ln(|x-3|)$.

c) L'aire est hachurée en a). Elle vaut $\displaystyle\int_0^{3/2} (2 - f(x))\,dx$.

On a: $\displaystyle\int_0^{3/2} (2 - f(x))\,dx = \int_0^{3/2} 2\,dx - \int_0^{3/2} f(x)\,dx = \Big[2x\Big]_0^{3/2} - \left(F\left(\tfrac{3}{2}\right) - F(0)\right)$, où

F est une primitive de f (voir b)).

Ainsi l'aire hachurée vaut:

$$2\cdot\frac{3}{2}-2\cdot 0-\left(\left(2\cdot\frac{3}{2}-\frac{18}{\frac{3}{2}-3}+12\ln\left(\left|\frac{3}{2}-3\right|\right)\right)-\left(2\cdot 0-\frac{18}{0-3}+12\ln(|0-3|)\right)\right)=$$

$$=3-\left(3+12+12\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\left(6+12\ln(3)\right)\right)=$$

$$=3-\left(15+12\ln\left(\frac{3}{2}\right)-6-12\ln(3)\right)=3-\left(9+12\ln\left(\frac{3}{2}\right)-12\ln(3)\right)=$$

$$=3-9-12\ln\left(\frac{3}{2}\right)+12\ln(3)=-6-12\ln\left(\frac{3}{2}\right)+12\ln(3)=$$

$$=-6-12\left(\ln(3)-\ln(2)\right)+12\ln(3)=-6-12\ln(3)+12\ln(2)+12\ln(3)=$$

$$=\underline{\underline{12\ln(2)-6.}}$$

Exercice 15

La formule d'intégration par parties est $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$.
On choisit donc v tel que v' soit plus simple :

a) $y = x\cos(x)$: $v = x$, $u' = \cos(x) \Rightarrow v' = 1$, $u = \sin(x)$;
ainsi $\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx =$
$= x\sin(x) - (-\cos(x)) = x\sin(x) + \cos(x)$;
$\Rightarrow$ une primitive de $x\cos(x)$ est $\underline{\underline{x\sin(x) + \cos(x) + c^{te}}}$.

b) $y = x\ln(x)$: $v = \ln(x)$, $u' = x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$, $u = \frac{x^2}{2}$;
ainsi $\int x\ln(x)\,dx = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$
$= \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$;
$\Rightarrow$ une primitive de $x\ln(x)$ est $\underline{\underline{\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c^{te}}}$.

c) $y = \ln(x) = \ln(x)\cdot 1$: $v = \ln(x)$, $u' = 1 \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$, $u = x$;
ainsi $\int \ln(x)\cdot 1\,dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx =$
$= x\ln(x) - x$;
$\Rightarrow$ une primitive de $\ln(x)$ est $\underline{\underline{x\ln(x) - x + c^{te}}}$.

d) $y = \frac{\ln(x)}{x} = \ln(x)\cdot\frac{1}{x}$: $v = \ln(x)$, $u' = \frac{1}{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$, $u = \ln(x)$;
ainsi $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln(x)\cdot\ln(x) - \int \frac{1}{x}\ln(x)\,dx$, d'où
$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = (\ln(x))^2 - \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$, d'où
$2\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = (\ln(x))^2$, d'où $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{(\ln(x))^2}{2}$;
$\Rightarrow$ une primitive de $\frac{\ln(x)}{x}$ est $\underline{\underline{\frac{(\ln(x))^2}{2} + c^{te}}}$.

e) $y = xe^{-x}$: $v = x$, $u' = e^{-x} \Rightarrow v' = 1$, $u = -e^{-x}$;
ainsi $\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$
$= -xe^{-x} - e^{-x}$;
$\Rightarrow$ une primitive de xe^{-x} est $\underline{\underline{-xe^{-x} - e^{-x} + c^{te}}}$.

f) $y = x^2e^{-x}$: $v = x^2$, $u' = e^{-x} \Rightarrow v' = 2x$, $u = -e^{-x}$;
ainsi $\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - \int -e^{-x}\cdot 2x\,dx =$
$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$;

en utilisant le résultat obtenu en e), on trouve :

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x};$$

$\Rightarrow$ une primitive de x^2e^{-x} est $\underline{\underline{-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c^{te}}}$.

g) $y = \sin(x)\cdot e^x$: $v = \sin(x)$, $u' = e^x \Rightarrow v' = \cos(x)$, $u = e^x$;

ainsi $\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx$;

on va calculer $\int \cos(x)e^x dx$ aussi par parties :

$V = \cos(x)$, $U' = e^x \Rightarrow V' = -\sin(x)$, $U = e^x$;

ainsi $\int \cos(x)e^x dx = \cos(x)e^x - \int -\sin(x)e^x dx =$

$= \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx$;

donc $\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx\right) =$

$= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx$;

on en déduit que : $2\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x$, i.e.

$$\int \sin(x)e^x dx = \frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)e^x;$$

$\Rightarrow$ une primitive de $\sin(x)e^x$ est $\underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)e^x + c^{te}}}$.

h) $y = \cos(x)e^x$: d'après g), on a $\int \cos(x)e^x dx = \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx$ et

$\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx$;

ainsi $\int \cos(x)e^x dx = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx$;

on en déduit que $2\int \cos(x)e^x dx = \left(\cos(x) + \sin(x)\right)e^x$ et

$$\int \cos(x)e^x dx = \frac{1}{2}\left(\sin(x) + \cos(x)\right)e^x;$$

$\Rightarrow$ une primitive de $\cos(x)e^x$ est $\underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\sin(x) + \cos(x)\right)e^x + c^{te}}}$.

i) $y = \cos(x)\cdot\sin(x)$: $v = \cos(x)$, $u' = \sin(x) \Rightarrow v' = -\sin(x)$, $u = -\cos(x)$;

ainsi $\int \cos(x)\cdot\sin(x) dx = -\cos^2(x) - \int (-\sin(x))\cdot(-\cos(x)) dx =$

$= -\cos^2(x) - \int \cos(x)\cdot\sin(x) dx$;

on en déduit que $2\int \cos(x)\cdot\sin(x) dx = -\cos^2(x)$ et

$$\int \cos(x)\sin(x) dx = -\frac{\cos^2(x)}{2}.$$

$\Rightarrow$ une primitive de $\cos(x)\sin(x)$ est $\underline{\underline{-\frac{\cos^2(x)}{2} + c^{te}}}$.

Exercice 16

$\sin^2(x) = \sin(x)\cdot\sin(x)$: $v = \sin(x)$, $u' = \sin(x) \Rightarrow v' = \cos(x)$, $u = -\cos(x)$;

ainsi $\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) - \int \cos(x).(-\cos(x))\,dx =$

$= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx$;

en utilisant la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ et on obtient :

$\int \sin^2(x) = -\cos(x)\sin(x) + \int (1 - \sin^2(x))\,dx =$

$= -\cos(x)\sin(x) + \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx =$

$= -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$;

on en déduit : $2\int \sin^2(x) = -\cos(x)\sin(x) + x$;

$$\int \sin^2(x) = \frac{-\cos(x)\sin(x) + x}{2}$$

$\Rightarrow$ une primitive de $\sin^2(x)$ est $\underline{\underline{\dfrac{-\cos(x)\sin(x) + x}{2} + c^{te}}}$.

$\cos^2(x)$: avec $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, on a $\int \cos^2(x)\,dx = \int (1 - \sin^2(x))\,dx =$

$= \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx = x - \int \sin^2(x)\,dx$;

en utilisant le résultat ci-dessus, on trouve :

$$\int \cos^2(x)\,dx = x - \left(\frac{-\cos(x)\sin(x) + x}{2}\right) =$$

$$= x + \frac{\cos(x)\sin(x)}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\cos(x)\sin(x)}{2} = \frac{\cos(x)\sin(x) + x}{2}.$$

$\Rightarrow$ une primitive de $\cos^2(x)$ est $\underline{\underline{\dfrac{\cos(x)\sin(x) + x}{2} + c^{te}}}$.

Exercice 17

a) La dérivée de e^{-x^2} est $-2xe^{-x^2}$.
Une primitive de xe^{-x^2} est donc $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$.
Donc, une primitive de $3xe^{-x^2}$ est $\underline{\underline{-\frac{3}{2}e^{-x^2} + c^{te}}}$.

b) La dérivée de e^{-2x^3} est $-6x^2e^{-2x^3}$.
Une primitive de $x^2e^{-2x^3}$ est donc $\underline{\underline{-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + c^{te}}}$.

c) La dérivée de $\cos(3x-5)$ est $-3\sin(3x-5)$.
Une primitive de $\sin(3x-5)$ est $\underline{\underline{-\frac{1}{3}\cos(3x-5) + c^{te}}}$.

d) La dérivée de $\sin(x^2-1)$ est $2x\cos(x^2-1)$.
Une primitive de $5x\cos(x^2-1)$ est donc $\underline{\underline{\frac{5}{2}\sin(x^2-1) + c^{te}}}$.

e) La dérivée de $\ln(x^2+5)$ est $\frac{1}{x^2+5} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+5}$.
Une primitive de $\frac{-7x}{x^2+5}$ est donc $\underline{\underline{-\frac{7}{2}\ln(x^2+5) + c^{te}}}$.

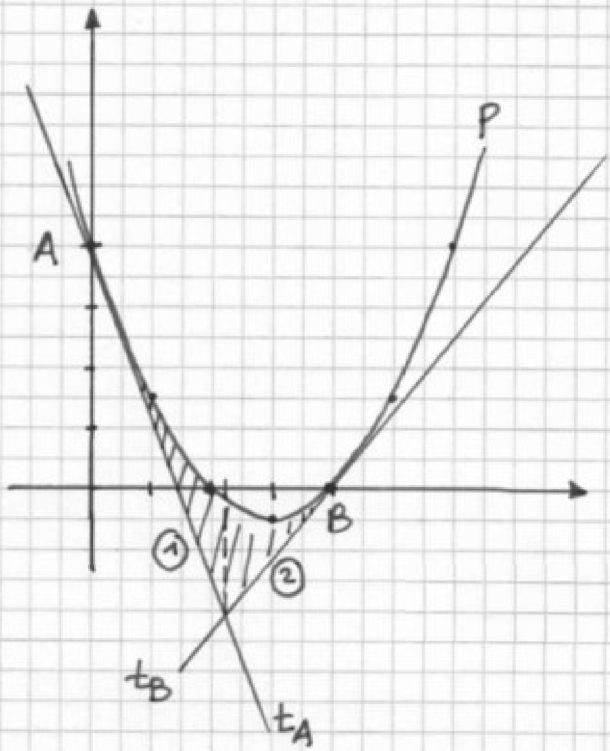
f) La dérivée de $\ln(|x^2-4x+9|)$ est $\frac{1}{x^2-4x+9}(2x-4) = \frac{2x-4}{x^2-4x+9} = \frac{2}{3}\frac{3x-6}{x^2-4x+9}$.
Une primitive de $\frac{3x-6}{x^2-4x+9}$ est donc $\underline{\underline{\frac{3}{2}\ln(|x^2-4x+9|) + c^{te}}}$.

g) La dérivée de $\ln(1+3e^{-x})$ est $\frac{1}{1+3e^{-x}} \cdot (-3e^{-x}) = \frac{-3e^{-x}}{1+3e^{-x}} = \frac{3}{2}\,\frac{-2e^{-x}}{1+3e^{-x}}$.
Une primitive de $\frac{-2e^{-x}}{1+3e^{-x}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\ln(1+3e^{-x}) + c^{te}}}$.

h) La dérivée de $\ln(|\cos(x)|)$ est $\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Une primitive de $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est donc $\underline{\underline{-\ln(|\cos(x)|) + c^{te}}}$.

i) La dérivée de $(3x-2)^3$ est $3(3x-2)^2 \cdot 3 = 9(3x-2)^2$.
Une primitive de $(3x-2)^2$ est donc $\underline{\underline{\frac{1}{9}(3x-2)^3 + c^{te}}}$.

Exercice 18



On a: $A(0;a)$: $x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow A(0;4)$;

$B(b;0)$: $y=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2-3x+4=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0$:

on a $A=1$, $B=-6$ et $C=8$; $\Delta = B^2-4AC = (-6)^2-4.1.8 = 36-32 = 4$;

$\sqrt{\Delta}=2$; ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2}{2.1} = \frac{8}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2}{2.1} =$

$= \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow B(4;0)$.

Cherchons les équations de t_A et t_B:

t_A est de la forme $y=mx+h$, où $m=p'(0)$;

on a: $p'(x)=x-3 \Rightarrow m=p'(0)=-3 \Rightarrow y=-3x+h$;

avec $A(0;4)$, on a: $4=-3.0+h \Rightarrow h=4$;

$\Rightarrow$ l'équation de t_A est : $y=-3x+4$;

t_B est de la forme $y=mx+h$, où $m=p'(4)$;

on a : $p'(x)=x-3 \Rightarrow m=p'(4)=4-3=1 \Rightarrow y=x+h$;

avec $B(4;0)$, on a : $0=4+h \Rightarrow h=-4$;

$\Rightarrow$ l'équation de t_B est: $y=x-4$.

Cherchons l'intersection de t_A et t_B : c'est le x tel que $-3x+4=x-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8=4x \Rightarrow x=2$.

L'aire hachurée est: aire 1 + aire 2:

aire 1 $= \int_0^2 (p(x)-t_A(x))\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2-3x+4-(-3x+4)\right)dx =$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 + 3x - 4\right) dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{0^2}{3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$$

aire 2 $= \int_2^4 (p(x) - t_B(x))\,dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 - (x-4)\right) dx =$

$$= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 - x + 4\right) dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - 4.\frac{x^2}{2} + 8x\right]_2^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4^3}{3} - 4.\frac{4^2}{2} + 8.4 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3} - 4.\frac{2^2}{2} + 8.2\right) =$$

$$= \frac{64}{6} - \frac{64}{2} + 32 - \left(\frac{8}{6} - \frac{16}{2} + 16\right) = \frac{32}{3} - 32 + 32 - \left(\frac{4}{3} - 8 + 16\right) =$$

$$= \frac{32}{3} - \left(\frac{4}{3} + 8\right) = \frac{32}{3} - \frac{4}{3} - 8 = \frac{28}{3} - 8;$$

ainsi l'aire hachurée vaut $\frac{4}{3} + \frac{28}{3} - 8 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{32}{3} - \frac{24}{3} = \underline{\frac{8}{3}}.$