Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 12

Mathématiques de niveau 1

CALCUL INTEGRAL

Corrigé du TE – A

Exercice 1

On a : $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x} = \dfrac{2x^2}{x} - \dfrac{3}{x} = 2x - \dfrac{3}{x} = 2x - 3\cdot\dfrac{1}{x}$

Une primitive de $f(x)$ est alors : $2\cdot\dfrac{x^2}{2} - 3\ln(|x|) = x^2 - 3\ln(|x|)$.

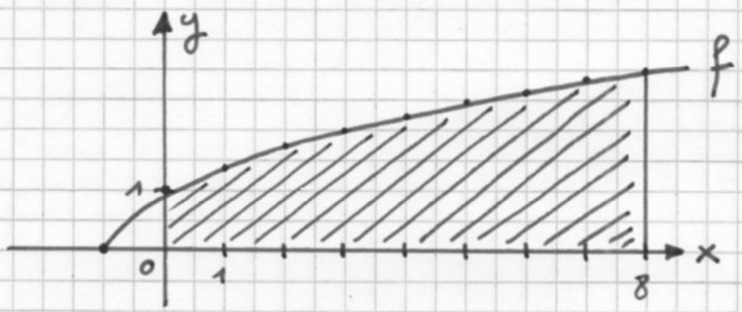
Ainsi $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = \Big[x^2 - 3\ln(|x|)\Big]_1^3 = 3^2 - 3\ln(3) - \big(1^2 - 3\underbrace{\ln(1)}_{=0}\big) =$

$= 9 - 3\ln(3) - 1 = \underline{\underline{8 - 3\ln(3)}}$.

Exercice 2

$f(x) = \sqrt{x+1}$.

a)



b) Une primitive de $\sqrt{x+1}$ est $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$ (voir table).

Ainsi $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^8 = \frac{2}{3}(8+1)\sqrt{8+1} - \frac{2}{3}(0+1)\sqrt{0+1} =$

$= \dfrac{2}{3}\cdot 9\cdot\sqrt{9} - \dfrac{2}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{1} = \dfrac{2}{3}\cdot 9\cdot 3 - \dfrac{2}{3} = 2\cdot 9 - \dfrac{2}{3} = 18 - \dfrac{2}{3} = \underline{\underline{\dfrac{52}{3}}}$.

Exercice 3

a) $f(x) = \dfrac{5}{3x-4}$: la dérivée de $\ln(|3x-4|)$ est $\dfrac{1}{3x-4}\cdot 3 = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{3x-4}$;

ainsi une primitive de $\dfrac{5}{3x-4}$ est $\underline{\underline{\dfrac{5}{3}\ln(|3x-4|) + c^{te}}}$.

b) $f(x) = \sin(2x+1)$: la dérivée de $\cos(2x+1)$ est $-\sin(2x+1)\cdot 2 = -2\sin(2x+1)$;

ainsi une primitive de $\sin(2x+1)$ est $\underline{\underline{-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1) + c^{te}}}$.

c) $f(x) = 6e^{-2x}$: la dérivée de e^{-2x} est $e^{-2x}\cdot(-2) = -2e^{-2x} = -\dfrac{1}{3}\cdot 6e^{-2x}$;

ainsi une primitive de $6e^{-2x}$ est $\underline{\underline{-3e^{-2x} + c^{te}}}$.

d) $f(x)=\frac{12}{x^2-4}$: on a $\frac{12}{x^2-4}=\frac{12}{(x+2)(x-2)}$;

décomposons $\frac{12}{x^2-4}$ en $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$:

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{Ax-2A+Bx+2B}{x^2-4}=$$

$$=\frac{(A+B)x+2B-2A}{x^2-4};$$

on doit avoir $A+B=0$ et $2B-2A=12$;

$A+B=0 \Rightarrow B=-A \Rightarrow -2A-2A=12 \Rightarrow -4A=12$

$\Rightarrow A=-3 \Rightarrow B=3$;

on a donc $f(x)=\frac{-3}{x+2}+\frac{3}{x-2}$;

une primitive de f est alors $\underline{\underline{-3\ln(|x+2|)+3\ln(|x-2|)+c^{te}}}$.

<u>Exercice 4</u>

a) $$\int_1^4\frac{dx}{x^3}=\int_1^4 x^{-3}dx=\left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^4=\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^4=\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^4=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^4=$$

$$=-\frac{1}{2.4^2}+\frac{1}{2.1^2}=-\frac{1}{32}+\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{15}{32}}}.$$

b) $$\int_1^b\frac{dx}{x^3}=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b=-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2} \text{ si } b\to+\infty;$$

ainsi $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.