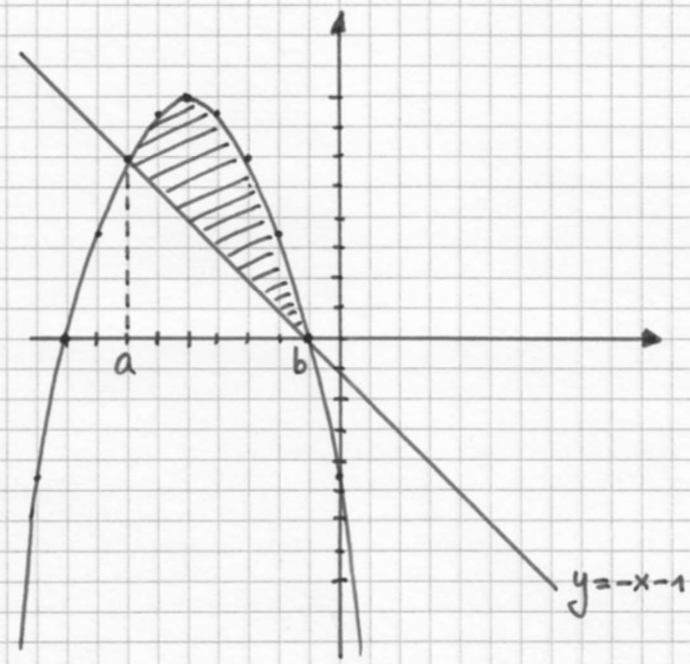


CALCUL INTEGRAL

Corrigé du TE - B

Exercice 1

a)



b) Commençons par chercher les valeurs de a et b : ce sont les x tels que

$-\frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{9}{2} = -x-1 \Rightarrow -x^2 - 10x - 9 = -2x - 2 \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$:

$a = 1$, $b = 8$ et $c = 7$; $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\cdot 1\cdot 7 = 64 - 28 = 36$; $\sqrt{\Delta} = 6$;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+6}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-6}{2\cdot 1} = \frac{-14}{2} = -7$;

$\Rightarrow a = -7$ et $b = -1$

L'aire hachurée vaut donc $\int_{-7}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{9}{2} - (-x-1)\right)dx =$

$$= \int_{-7}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{9}{2} + x + 1\right)dx = \int_{-7}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{7}{2}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - \frac{7}{2}x\right]_{-7}^{-1} = \left[-\frac{x^3}{6} - 2x^2 - \frac{7}{2}x\right]_{-7}^{-1} =$$

$$= -\frac{(-1)^3}{6} - 2\cdot(-1)^2 - \frac{7}{2}\cdot(-1) - \left(-\frac{(-7)^3}{6} - 2\cdot(-7)^2 - \frac{7}{2}\cdot(-7)\right) =$$

$$= \frac{1}{6} - 2 + \frac{7}{2} - \left(\frac{343}{6} - 98 + \frac{49}{2}\right) = \frac{1}{6} - 2 + \frac{7}{2} - \frac{343}{6} + 98 - \frac{49}{2} =$$

$$= -\frac{342}{6} + 96 - \frac{42}{2} = -57 + 96 - 21 = \underline{\underline{18}}.$$

Exercice 2

$f(x) = (x^2+3)e^{-x}$.

a) Commençons par chercher une primitive de $(x^2+3)e^{-x}$: elle sera de la forme $F(x) = (Ax^2+Bx+C)e^{-x}$; on devra avoir $F'(x) = (x^2+3)e^{-x}$;

on a $F'(x) = (2Ax+B)e^{-x} + (Ax^2+Bx+C)\cdot(-e^{-x}) =$

$= (2Ax+B-Ax^2-Bx-C)e^{-x} =$

$= (-Ax^2+(2A-B)x+B-C)e^{-x}$.

on doit donc avoir : $-A=1$, $2A-B=0$ et $B-C=3$;

$-A=1 \Rightarrow A=-1 \Rightarrow B=2A=-2 \Rightarrow C=B-3=-2-3=-5$;

ainsi une primitive de $(x^2+3)e^{-x}$ est $(-x^2-2x-5)e^{-x}$.

On a alors $\int_0^t f(x)\,dx = \left[(-x^2-2x-5)e^{-t}\right]_0^t =$

$= (-t^2-2t-5)e^{-t} - (-0^2-2\cdot0-5)\underbrace{e^{-0}}_{1} =$

$= -(t^2+2t+5)e^{-t} + 5 = \underline{5-(t^2+2t+5)e^{-t}}$.

b) Si $t \to +\infty$, $(t^2+2t+5)e^{-t} \to 0$ (l'exponentielle gagne).

Ainsi $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^t f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\left(5-(t^2+2t+5)e^{-t}\right) = \underline{\underline{5}}$.

Exercice 3

Dans a) et b), on va utiliser l'intégration par parties : $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$.

a) $f(x) = (5x-2)\cdot\sin(x)$: $v = 5x-2$, $u' = \sin(x) \Rightarrow v' = 5$, $u = -\cos(x)$.

ainsi $\int (5x-2)\sin(x)\,dx = -(5x-2)\cos(x) - \int 5\cdot(-\cos(x))\,dx =$

$= -(5x-2)\cos(x) + 5\int \cos(x)\,dx =$

$= -(5x-2)\cos(x) + 5\sin(x)$;

$\Rightarrow$ une primitive de $f(x)$ est donc $\underline{-(5x-2)\cos(x) + 5\sin(x) + c^{te}}$.

b) $f(x) = (6x+3)\ln(x)$: $v = \ln(x)$, $u' = 6x+3 \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$, $u = 6\cdot\frac{x^2}{2}+3x = 3x^2+3x$;

ainsi $\int (6x+3)\ln(x) = (3x^2+3x)\ln(x) - \int \frac{1}{x}(3x^2+3x)\,dx =$

$= (3x^2+3x)\ln(x) - \int (3x+3)\,dx =$

$= (3x^2+3x)\ln(x) - \left(3\frac{x^2}{2}+3x\right) =$

$= (3x^2+3x)\ln(x) - \frac{3}{2}x^2 - 3x$;

$\Rightarrow$ une primitive de $f(x)$ est donc $\underline{\underline{(3x^2+3x)\ln(x) - \frac{3}{2}x^2 - 3x + c^{\text{te}}}}$.

c) $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x-3}$: on a $f(x) = \dfrac{4x-6+11}{2x-3} = \dfrac{4x-6}{2x-3} + \dfrac{11}{2x-3} = 2 + \dfrac{11}{2x-3}$;

une primitive de $\dfrac{1}{2x-3}$ est $\dfrac{\ln(|2x-3|)}{2}$;

$\Rightarrow$ une primitive de $f(x)$ est donc $\underline{\underline{2x + \dfrac{11\ln(|2x-3|)}{2} + c^{\text{te}}}}$.