Chapitre 6

Equations différentielles ordinaires

6.1 Introduction et définitions

Cherchons toutes les fonctions $y = f(x)$ satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$f'(x) + f(x) = 0 \qquad (*)$$

En essayant, on trouve que $f(x) = e^{-x}$ satisfait l'équation $(*)$.
Y a-t-il d'autres solutions ?
Par linéarité, $f(x) = Ce^{-x}$ est aussi une solution pour tout $C \in \mathbb{R}$. On verra plus tard que toute solution de $(*)$ est de la forme Ce^{-x}.

L'équation $(*)$ est une **équation différentielle du 1er ordre** = équation reliant une fonction inconnue $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$.

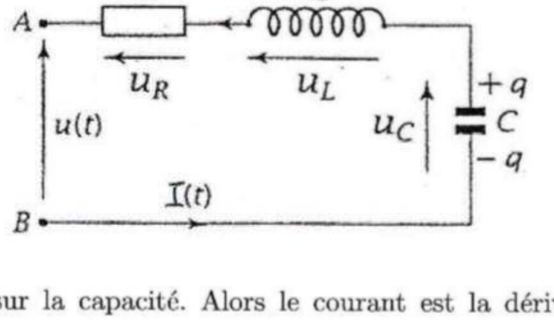
Définition 6.1. Plus généralement, une équation différentielle d'ordre n est une équation

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

faisant intervenir une **variable** x, une **fonction inconnue** $y = y(x)$ et ses dérivées $y'(x)$, $y''(x)$, $\ldots y^{(n)}(x)$ jusqu'à l'ordre n.

Exemples 6.2.

1. Circuit électrique RLC série :



Notons $q(t)$ la charge sur la capacité. Alors le courant est la dérivée de la charge : $I(t) = \dot{q}(t)$.

- résistance R : $U_R = RI(t) = R\dot{q}(t)$

- inductance L : $U_L = L \cdot \dfrac{dI(t)}{dt} = L\ddot{q}(t)$
- capacité C : $q = CU_C$
- $U = U(t)$: tension de la source.

Alors on doit avoir $U_R + U_C + U_L = U(t)$ ce qui donne

$$R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) + L\ddot{q}(t) = U(t).$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2.

2. En mécanique newtonnienne on a l'équation $F = ma$.
Soit t le temps, $y(t)$ la position, $\dot{y}(t)$ la vitesse et $\ddot{y}(t)$ l'accélération. Si on suppose que la force dépend du temps, de la position et de la vitesse $F = F(t, y, \dot{y})$, on doit résoudre l'équation différentielle du 2ème ordre :

$$m\ddot{y} = F(t, y, \dot{y})$$

Remarque 6.3 (Conditions initiales)**.** Pour résoudre une équation différentielle, on fait une intégration : la **solution générale** contient donc une (ou plusieurs) constante(s) C_1, C_2, $\ldots C_n$.
Souvent, à l'équation différentielle $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ s'ajoute une **condition initiale**

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = v_0, \;\; \ldots, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = b_0.$$

Cette condition initiale impose la valeur des constantes C_i : on parle de **solution particulière**.

6.2 Equation différentielle du premier ordre

Forme générale : $\Phi(x, y, y') = 0$.

Sous des hypothèses très larges, on peut écrire

$$\boxed{y' = \phi(x, y)}$$

C'est la **forme normale**.

6.2.1 Equation séparable

Si

$$y' = \phi(x, y) = f(x)g(y)$$

on dit que l'équation différentielle est **séparable**. On a alors

$$\frac{1}{g(y)} \cdot y' = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx}$$

Le problème se ramène à 2 intégrations.

Exemples 6.4.

1. $xy' - 2y = 0$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{2y}{x} = \frac{1}{x}\cdot 2y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = \frac{2}{x}\,dx$$
$$\Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = 2\int \frac{1}{x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| + c \quad \Longrightarrow \quad |y| = x^2\cdot e^c$$
$$\Longrightarrow \quad y = C\cdot x^2 \qquad C\in\mathbb{R} \qquad \text{(solution générale)}$$

Si de plus on veut $y(1) = 2$, alors $y(x) = 2x^2$.

2. $y' = (1+2x)\sqrt{1+y^2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (1+2x)\sqrt{1+y^2} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \int (1+2x)\,dx$$
$$\Longrightarrow \quad \operatorname{arcsinh}(y) = x + x^2 + C$$
$$\Longrightarrow \quad y(x) = \sinh(x + x^2 + C) \qquad \text{solution générale}$$

Si l'on veut par exemple $y(0) = 0$ alors $y(x) = \sinh(x + x^2)$.

Equation autonome

Un cas particulier d'équation séparable est celui des équations dites **autonomes** :

$$y' = g(y).$$

L'équation est indépendante de x . On a alors

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{g(y)}\,dy = dx\,.$$

Après intégration on obtient

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = x + C} \qquad (*)$$

Exemple : résoudre $y' = y^2 + y$. Alors $\frac{dy}{y^2+y} = dx$. Or

$$\int \frac{1}{y^2+y}\,dy = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\,dy = \ln|y| - \ln|1+y| = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$$

L'équation $(*)$ devient $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + c$ ce qui donne

$$\frac{y}{y+1} = \pm e^c e^x = Ce^x \qquad C\in\mathbb{R}$$

Cette équation implicite se résoud pour donner

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{C}e^{-x} - 1} = \frac{C}{e^{-x} - C}$$

6.2.2 Equation homogène en x et y

Définition 6.5. On dit que $\phi(x, y)$ est **homogène de degré** 0 en x et y si

$$\phi(tx, ty) = \phi(x, y) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Exemples 6.6.

1. $\phi(x, y) = \dfrac{x^3 + xy^2}{y^3 + x^2y}$ est homogène de degré 0 ($\frac{\text{degré } 3}{\text{degré } 3}$) car

$$\phi(tx, ty) = \frac{t^3x^3 + txt^2y^2}{t^3y^3 + t^2x^2ty} = \frac{x^3 + xy^2}{y^3 + x^2y} = \phi(x, y).$$

2. $\phi(x, y) = xy$ n'est pas homogène de degré 0 car $\phi(tx, ty) = t^2xy \neq \phi(x, y)$
3. $\phi(x, y) = \dfrac{x + y}{xy}$ n'est pas homogène car $\phi(2x, 2y) = \dfrac{2x + 2y}{4xy} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x + y}{xy} \neq \phi(x, y)$.

Résolution : On effectue le changement de fonction $\boxed{y(x) = u(x) \cdot x}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y' = xu' + u}$$

et ceci nous ramène à une équation séparable en x et $u(x)$.

Exemple : $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ homogène de degré 0.

En posant $y = ux$ et donc $y' = u'x + u$, on obtient

$$\begin{aligned}
u'x + u = \frac{x^2u}{x^2 + u^2x^2} = \frac{u}{1 + u^2} \quad &\Longrightarrow \quad u' = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{u}{1 + u^2} - u\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \left[-\frac{u^3}{1 + u^2}\right] \\
\Longrightarrow \quad -\frac{1 + u^2}{u^3}\, du = \frac{1}{x}\, dx \quad &\Longrightarrow \quad \int -\frac{1 + u^2}{u^3}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx \\
\Longrightarrow \quad \frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + c.
\end{aligned}$$

Comme $u = \dfrac{y}{x}$, on trouve

$$\frac{x^2}{2y^2} = \ln|x| + \ln|y/x| + c = \ln|y| + c \quad \Longrightarrow \quad e^{x^2/2y^2} = |y| \cdot \underbrace{e^c}_{=C}.$$

On obtient finalement

$$Cy = e^{x^2/2y^2}$$

C'est une forme implicite impossible à résoudre sous la forme $y = f(x)$.

6.2.3 Equation linéaire

Une **équation différentielle du premier ordre linéaire** est (sous forme normale) :

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$$

ATTENTION : elle est linéaire en y et y' ; pas en x.

• Le terme $b(x)$ est appelé le **second membre**.
• Si $b(x) = 0$, l'équation est dite **homogène**. Sinon elle est **inhomogène** ou **avec second membre**.

Exemples 6.7.

– $y' + \dfrac{\cos x}{x}\, y = 2x^2$ est linéaire inhomogène avec $a(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ et $b(x) = 2x^2$
– $y' \cdot y + xy = 2x - 1$ n'est **pas linéaire**
– $e^x y' + 4x^3 y = 0$ est linéaire homogène : $y' + \underbrace{\dfrac{4x^3}{e^x}}_{=a(x)} y = 0$

Pour résoudre une équation linéaire, on procède en 2 étapes :
(I) d'abord on résoud l'équation homogène (en posant $b(x) = 0$) ;
(II) puis on résoud l'équation avec second membre.

(I) Equation homogène

Soit $y'(x) + a(x)y = 0$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = -a(x)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}dy = -a(x)dx \\ \Longrightarrow \quad & \int \frac{1}{y}\, dy = \ln|y| = \int -a(x)\, dx = -A(x) + c \end{aligned}$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$. Ceci donne finalement

Solution générale de l'équation homogène : $\boxed{y_h(x) = C \cdot e^{-A(x)}}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

On note $w(x) = e^{-A(x)}$.

Exemple 6.8. $y' + x^2 y = 0$.
On a $a(x) = x^2 \implies A(x) = x^3/3$ ce qui donne

$$y = Ce^{-x^3/3}$$

(II) Equation inhomogène (avec second membre)

Théorème 6.9 (Théorème 1). *La solution générale de l'équation inhomogène*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'<u>une</u> solution particulière de la solution inhomogène.

DÉM : Soit $w(x)$ une solution de l'équation homogène et $y_P(x)$ une solution particulière de la solution inhomogène. Alors

$$[w(x) + y_P(x)]' + a(x)\,[w(x) + y_P(x)] = \underbrace{w'(x) + a(x)w(x)}_{=0} + \underbrace{y_P'(x) + a(x)y_P(x)}_{=b(x)} = b(x)$$

ce qui montre que $w(x) + y_P(x)$ est une solution de l'équation inhomogène.

Réciproquement, soit $z_1(x)$ et $z_2(x)$ deux solutions de l'équation inhomogène. Alors

$$\begin{aligned}[z_1(x) - z_2(x)]' + a(x)\,[z_1(x) - z_2(x)] &= z_1'(x) + a(x)z_1(x) - [z_2'(x) + a(x)z_2(x)] \\ &= b(x) - b(x) = 0\end{aligned}$$

ce qui montre que $w(x) = z_1(x) - z_2(x)$ est solution de l'équation homogène et donc que $z_1(x) = w(x) + z_2(x)$. □

Résolution de l'équation avec second membre : Il reste à trouver une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$. Pour cela on utilise la

A : Méthode des essais

On essaie une solution de la forme

$$y_P(x) = K_1 f_1(x) + K_2 f_2(x) + \cdots + K_n f_n(x)$$

où les f_i sont choisies relativement à la forme du second membre $b(x)$.

Exemples 6.10.

1.
$$y' + y = e^x + \sin x \qquad (1)$$

On essaie $y_P(x) = K_1 e^x + K_2 \sin x + K_3 \cos x$ que l'on introduit dans (1). On obtient

$$K_1 e^x + K_2 \cos x - K_3 \sin x + K_1 e^x + K_2 \sin x + K_3 \cos x = e^x + \sin x$$

ce qui donne $K_1 = \frac{1}{2}$ et le système

$$\begin{cases} K_2 + K_3 = 0 \\ K_2 - K_3 = 1 \end{cases}$$

dont la solution est $K_2 = \frac{1}{2}$ et $K_3 = -\frac{1}{2}$.
Une solution particulière est donc

$$y_P(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + \sin x - \cos x\right).$$

2. $y' + 2y = 2e^{-2x}$ (2)
   On essaie $y_P(x) = Ke^{-2x}$. Introduit dans (2), ceci donne

$$-2Ke^{-2x} + 2Ke^{-2x} = 2e^{-2x}$$

   qui est impossible. Le choix est mauvais.

3. $2xy' + y = x^2 - x$.
   On essaie $y_P(x) = K_1x^2 + K_2x$. Ceci donne

$$2x \cdot (2K_1x + K_2) + K_1x^2 + K_2x = x^2 - x$$

   et donc $5K_1 = 1$ et $3K_2 = -1$. Une solution particulière est donc

$$y_P(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x.$$

Si la méthode des essais ne marche pas, on applique la méthode générale :

B : Méthode de la variation des constantes

On cherche une solution particulière en posant

$$y_P(x) = c(x)w(x)$$

où $w(x) = e^{-A(x)}$ est la solution de l'équation homogène et $c(x)$ une fonction à trouver. En introduisant y_P et y'_P dans l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ on obtient

$$c'(x)w(x) + c(x)w'(x) + a(x)c(x)w(x) = b(x)$$

ce qui devient, en utilisant le fait que $w'(x) + a(x)w(x) = 0$,

$$c'(x)w(x) = b(x)$$

Finalement

$$c'(x) = \frac{b(x)}{w(x)}$$

ce qui montre que $c(x)$ est une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

En résumé, une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ est donnée par

$$\boxed{y_P(x) = c(x)e^{-A(x)}}$$

avec $\boxed{c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\, dx = \int b(x)e^{A(x)}\, dx.}$

Exemples 6.11.

1. Résoudre l'équation
$$y' + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=a(x)} y = \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{=b(x)}.$$

$$a(x) = \frac{x}{1+x^2} \implies A(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

(I) Equation homogène :
$$w(x) = e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc
$$y_h(x) = Cw(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(II) Equation avec second membre :
$$c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\,dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et alors une solution particulière de l'équation inhomogène est donnée par
$$y_P(x) = c(x)w(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

La solution générale est alors
$$y(x) = Cw(x) + y_P(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall C \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre
$$y' + y = \underbrace{e^x + \sin x}_{=b(x)}.$$

(I) Equation homogène : $y' + y = 0 \implies w(x) = e^{-x}$
(II) Equation inhomogène :
$$c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\,dx = \int e^x(e^x + \sin x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

et donc
$$y_P(x) = w(x)c(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

Finalement, la solution générale est
$$y(x) = Cw(x) + y_P(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x).$$

3. Résoudre
$$xy' - 2y = x^2 - x.$$

Forme normale :
$$y' - \frac{2}{x}y = x - 1$$

avec $a(x) = -\frac{2}{x}$ et $b(x) = x - 1$.

(I) Equation homogène : $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$.

$$A(x) = \int a(x)\,dx = -2\ln|x| \qquad \Longrightarrow \qquad w(x) = e^{-A(x)} = e^{2\ln|x|} = x^2$$

et la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Cw(x) = Cx^2.$$

(II) Solution particulière de l'équation inhomogène :

$$c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}(x-1)\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{1}{x}$$

Une solution particulière est donc

$$y_P(x) = w(x)c(x) = x^2(\ln|x| + \frac{1}{x}) = x + x^2\ln|x|.$$

La solution générale est alors

$$y(x) = y_h(x) + y_P(x) = Cx^2 + x + x^2\ln|x| \qquad C \in \mathbb{R}$$

6.2.4 Equation du type $y' = \phi\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$

On se ramène à une équation homogène de degré 0 en posant

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha & \text{nouvelle variable} \\ y = u + \beta & \text{nouvelle fonction} \implies y' = u' \end{cases}$$

où α et β satisfont le système : $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ d\alpha + e\beta + f = 0 \end{cases}$

Exemple 6.12.

$$y' = \frac{2x + y + 1}{4x + y}.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha + \beta + 1 = 0 \\ 4\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -2$$

On pose donc

$$\begin{cases} x = \xi + \frac{1}{2} \\ y = u - 2 \end{cases}$$

L'équation devient (avec $y' = u'$)

$$u' = \frac{2\xi + u}{4\xi + u} = \psi(\xi, u) \qquad (*)$$

C'est une équation homogène de degré 0 car $\psi(t\xi, tu) = \psi(\xi, u)$.
Résolution de $(*)$: on pose $u = \xi v \implies u' = v + \xi v'$. On obtient

$$v + \xi v' = \frac{2\xi + \xi v}{4\xi + \xi v} = \frac{2 + v}{4 + v}$$

C'est une équation séparable.

6.2.5 Equation de Bernoulli

$$\boxed{y' = f(x)y + g(x)y^n \qquad n \neq 1}$$

On divise l'équation par y^n pour obtenir

$$\frac{y'}{y^n} = f(x)\frac{y}{y^n} + g(x)$$

On pose

$$u(x) = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}.$$

Alors $u' = (1-n)\cdot y^{-n}\cdot y' = (1-n)\cdot \dfrac{y'}{y^n}$.
L'équation devient

$$\frac{1}{1-n}u' = f(x)u + g(x)$$

qui est une équation différentielle linéaire (en $u(x)$).

6.3 Equation différentielle du 2ème ordre

Forme générale :

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0$$

Forme normale :

$$\boxed{y'' = \phi(x, y, y')}$$

6.3.1 Equation sans terme y

Si l'équation ne contient pas de y

$$y'' = \phi(x, y'), \qquad \text{on pose} \qquad u = y'$$

ce qui donne $u' = \phi(x, u)$. C'est une équation du premier ordre en $u(x)$.
Ayant trouvé $u(x)$ on intègre pour obtenir $y(x)$.

6.3.2 Equation autonome (sans terme x)

Si l'équation ne contient pas de x :

$$y'' = \phi(y, y'), \qquad \text{on pose} \qquad z(y) = y'$$

ce qui donne

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}z(y) = \frac{d}{dy}z(y)\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot z = z(y)z'(y).$$

ATTENTION : ici $z'(y)$ signifie $\dfrac{dz}{dy}$ et pas $\dfrac{dz}{dx}$

Il suffit alors de résoudre l'équation du 1er ordre en y :

$$z(y) \cdot z'(y) = \phi(y,\ z(y)).$$

Puis, quand $z(y)$ est trouvé, on résoud encore l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = z(y)$.

Exemple : résoudre

$$yy'' = y'^2 + y'y^2.$$

Il n'y a pas de x.
On pose $y' = z(y) \quad \Longrightarrow \quad y'' = z \cdot z'$

$$\Longrightarrow y \cdot z \cdot z' = z^2 + zy^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z'(y) - \frac{1}{y} z(y) = y$$

C'est une équation du premier ordre linéaire inhomogène, avec $a(y) = -\dfrac{1}{y}$ et $b(y) = y$.
On en déduit $A(y) = -\ln|y|$ et $w(y) = e^{-A(y)} = y$.
La solution générale est, après calculs,

$$z(y) = Cy + y^2.$$

On revient à x : $\quad z = \dfrac{dy}{dx} = Cy + y^2$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dy}{Cy + y^2} = dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{C}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{C + y}\right) dy = dx.$$

Intégration :

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{C} \ln\left|\frac{y}{C + y}\right| = x + K \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y}{y + C} = e^{Cx + CK} = De^{Cx}$$

Ceci donne $y = D(y + C)e^{Cx}$ et finalement

$$y(x) = \frac{CDe^{Cx}}{1 - De^{Cx}} = \frac{CD}{e^{-Cx} - D} \qquad D, C \in \mathbb{R}.$$

6.3.3 Equation linéaire

Forme générale : $A_1(x)y'' + A_2(x)y' + A_3(x)y = B(x)$
Forme normale :

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x)}$$

Comme pour le 1er ordre,

solution générale de l'équation inhomogène = solution générale de l'équation homogène + <u>une</u> solution particulière de l'équation inhomogène.

(cf. Théorème 1)

(I) Equation homogène

On considère l'équation

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6.1}$$

Définition 6.13. Deux fonctions $y_1, y_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dont dites linéairement indépendantes si

$$[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \quad \forall x \in I] \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Théorème 6.14. *L'équation (6.1) possède deux solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$, $y_2(x)$ et toute solution $y(x)$ de (6.1) est de la forme*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre (6.1). Cependant, si on a trouvé une solution $y_1(x)$, on peut chercher la seconde en posant

$$\boxed{y_2 = u y_1}$$

où u satisfait une équation différentielle du 1er ordre.

Exemple 6.15. $\dfrac{x^2}{x+2}y'' - xy' + y = 0.$

On remarque que $y_1(x) = x$ est une solution.
Posons $y_2 = ux$. Alors $y_2' = u'x + u$ et $y_2'' = u''x + 2u'$. Dans l'équation, ceci donne

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x+2}(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^3}{x+2}u'' + (\frac{2x^2}{x+2} - x^2)u' = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{x^3}{x+2}u'' - \frac{x^3}{x+2}u' = 0 \quad \Longrightarrow \quad u'' - u' = 0 \quad \overset{v=u'}{\Longrightarrow} \quad v' - v = 0 \\
&\Longrightarrow \quad v = e^x \quad \Longrightarrow \quad u = e^x
\end{aligned}$$

et donc

$$y_2 = ux = xe^x.$$

La solution générale est donc, par le théorème 6.14,

$$y(x) = C_1 x + C_2 x e^x.$$

Un cas particulier est résoluble complètement : ce sont les

Equations à coefficients constants

Forme normale :

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0 \qquad p, q \in \mathbb{R} \qquad (**)}$$

On cherche une solution de la forme $y(x) = e^{\lambda x}$. En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$$

ce qui donne $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.
Le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$$

est appelé le **polynôme caractéristique de l'équation** $(**)$.

1er cas : $P(\lambda)$ a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2. Alors

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

est la solution générale.

2ème cas : $P(\lambda)$ a une racine réelle double $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.
Alors $y_1(x) = e^{\lambda x}$ est une solution et en posant $y_2 = uy_1$ on obtient $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. La solution générale est alors

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot xe^{\lambda x}.$$

3ème cas : $P(\lambda)$ a deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \mu + \omega_0 i \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \mu - \omega_0 i.$$

Alors

$$e^{(\mu \pm \omega_0 i)x} = e^{\mu x} \cdot e^{\pm \omega_0 i x} = e^{\mu x} \cdot \left[\cos(\omega_0 x) \pm i \sin(\omega_0 x)\right].$$

On en tire 2 solutions réelles linéairement indépendantes :

$$y(x) = e^{\mu x} \cdot \left[C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x)\right]$$

est la solution générale.
ω_0 = **pulsation propre** de l'équation (du système).
Si $\mu < 0$, c'est le **facteur d'amortissement**.

(II) Equations linéaires inhomogènes

On sait, par le théorème 6.14, que la solution générale $y(x)$ de l'équation

$$y'' + p(x)y' + q(x) = b(x) \tag{6.2}$$

est de la forme

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_P(x)$$

où $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ est la solution générale de l'équation homogène et $y_P(x)$ une solution particulière de l'équation (6.2).
Il reste à trouver une solution particulière à l'équation (6.2).

A : Méthode des essais

On essaie une fonction de la forme

$$y_P(x) = \sum_k \alpha_k \cdot f_k(x)$$

où les f_k sont judicieusement choisies.

Exemple :

$$y'' + y = x^2 + \sin\frac{x}{2}\,.$$

Pour x^2 on pose : $f_1(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ ce qui donne

$$2\alpha_1 + (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3) = x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f_1(x) = x^2 - 2$$

Pour $\sin\frac{x}{2}$, on essaie $f_2(x) = \alpha \sin\frac{x}{2}$ ce qui donne

$$-\frac{\alpha}{4}\sin\frac{x}{2} + \alpha\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad f_2(x) = \frac{4}{3}\sin\frac{x}{2}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_P(x) = x^2 - 2 + \frac{4}{3}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

B : Méthode de Lagrange (ou variation des constantes)

Soit

$$w(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

la solution générale de l'équation homogène où y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

On cherche une solution de la forme

$$y_P(x) = \varphi_1(x) y_1(x) + \varphi_2(x) y_2(x)$$

où $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont des fonctions à déterminer.
On impose en plus

$$y_1\varphi_1' + y_2\varphi_2' = 0 \qquad (I)$$

ce qui donne

$$y_P' = \varphi_1 y_1' + \varphi_2 y_2' + \underbrace{\varphi_1' y_1 + \varphi_2' y_2}_{=0} = \varphi_1 y_1' + \varphi_2 y_2'$$

et

$$y_P'' = \varphi_1' y_1' + \varphi_2' y_2' + \varphi_1 y_1'' + \varphi_2 y_2''$$

En substituant y_P, y_P' et y_P'' dans l'équation (6.2), on obtient

$$\begin{aligned} &\varphi_1' y_1' + \varphi_2' y_2' + \varphi_1 y_1'' + \varphi_2 y_2'' + p\cdot(\varphi_1 y_1' + \varphi_2 y_2') + q\cdot(\varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2) = b(x) \\ \Longleftrightarrow \quad &\varphi_1' y_1' + \varphi_2' y_2' + \varphi_1\cdot[y_1'' + p y_1' + q y_1] + \varphi_2\cdot[y_2'' + p y_2' + q y_2] = b(x) \qquad (***) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \end{cases}$$

car y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène. Donc $(***)$ devient

$$\varphi_1' y_1' + \varphi_2' y_2' = b(x) \qquad (II)$$

Il faut donc résoudre le système linéaire (I) + (II) :

$$\begin{cases} y_1\varphi_1' + y_2\varphi_2' = 0 \\ y_1'\varphi_1' + y_2'\varphi_2' = b(x) \end{cases}$$

qui s'écrit matriciellement

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=M} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Le déterminant $W = \det(M)$ s'appelle le **wronskien** de y_1 et y_2. Il est non nul car y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. Alors

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix}} &= M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{W} \begin{pmatrix} -b(x)y_2 \\ b(x)y_1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

En intégrant ensuite φ_1' et φ_2', on obtient φ_1 et φ_2.

Exemples 6.16.

1. $y'' + y = \sin x$.
   On a $b(x) = \sin x$
   (I) Equation homogène (à coefficients constants) : $y'' + y = 0 \quad \Longrightarrow$

   $$y_1(x) = \sin x \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = \cos x.$$

   (II) Equation inhomogène :

   $$M = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$$

   et donc $W = \det(M) = -1$. Alors

   $$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} -by_2 \\ by_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} by_2 \\ -by_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \cos x \\ -\sin^2(x) \end{pmatrix}$$

   Intégration :

   $$\Longrightarrow \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

Une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P(x) &= y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 \\ &= \sin x \cdot \frac{1}{2}\sin^2 x + \cos x \cdot (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)) \\ &= \cdots = -\frac{1}{2}x\cos x \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation $y'' + y = \sin x$ est alors

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + y_P = C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{1}{2}x\cos x\,.$$

2. Résoudre $\qquad xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 2xe^x$

Forme normale : $y'' - \dfrac{2x+1}{x}y' + \dfrac{x+1}{x}y = 2e^x \qquad \Longrightarrow \qquad b(x) = 2e^x$

(I) Equation homogène : en essayant on trouve $y_1(x) = e^x$.
On pose alors $y_2 = uy_1 = ue^x$. Ceci donne

$$y_2' = u'e^x + ue^x \quad \text{ et } \quad y_2'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x.$$

Introduits dans l'équation à résoudre, on obtient

$$\begin{aligned} &xe^x(u'' + 2u' + u) - (2x+1)e^x(u' + u) + (x+1)ue^x = 0 \\ &\Longrightarrow \quad u''x - u' = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = x^2 \quad \Longrightarrow \quad y_2(x) = x^2e^x. \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = x^2e^x \end{cases}$

(II) Solution particulière de l'équation inhomogène :

$$M = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & x^2e^x \\ e^x & e^x(x^2+2x) \end{pmatrix}$$

et donc $W = \det(M) = e^{2x}(x^2 + 2x - x^2) = 2xe^{2x}$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2xe^{2x}}\begin{pmatrix} -by_2 \\ by_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2xe^{2x}}\begin{pmatrix} -2e^xx^2e^x \\ 2e^xe^x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne, après intégration : $\varphi_1 = -\frac{x^2}{2}$ et $\varphi_2 = \ln|x|$.
Une solution particulière est donc

$$y_P(x) = \varphi_1y_1 + \varphi_2y_2 = \underbrace{-\frac{1}{2}x^2e^x}_{=-\frac{1}{2}y_2} + \ln|x|x^2e^x$$

La solution générale de l'équation étudiée est alors

$$y(x) = C_1y_1 + C_1y_2 + y_P = C_1e^x + C_2x^2e^x + x^2\ln|x|e^x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

6.3.4 Equation de Ricati

$$\boxed{y' = g(x)y^2 + f(x)y + h(x)}$$

C'est une équation du 1er ordre (non linéaire). Après un changement de variable judicieux, on se ramène à une équation linéaire homogène du 2ème ordre.

On pose $y = -\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{u'}{u}$. On obtient

$$y' = \frac{g'(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{u'}{u} - \frac{1}{g(x)} \cdot \left(\frac{u''u - u'^2}{u^2}\right)$$

L'équation devient alors

$$\begin{aligned} &\frac{g'(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{u'}{u} - \frac{1}{g(x)} \cdot \left(\frac{u''u - u'^2}{u^2}\right) = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{u'^2}{u^2} - \frac{f(x)}{g(x)}\frac{u'}{u} + h(x) \qquad | \cdot g(x) \cdot u \\ &u'' - \left(\frac{g'(x)}{g(x)} + f(x)\right) \cdot u' + g(x)h(x) \cdot u = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation linéaire homogène du 2ème ordre.

6.3.5 Equation différentielle d'Euler

$\boxed{x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0}$ équation diff. linéaire homogène du 2ème ordre

On essaie une solution de la forme $y = x^r$ (pour $x > 0$) .

Dans l'équation, ceci donne :

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + \alpha x \cdot rx^{r-1} + \beta x^r = 0.$$

On obtient alors $r(r-1)x^r + \alpha rx^r + \beta x^r = 0$ ou encore

$$\boxed{r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0.}$$

3 cas possibles :

1er cas : Deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Alors les 2 solutions linéairement indépendantes sont

$$y_1 = x^{r_1} \qquad y_2 = x^{r_2}$$

2ème cas : Une solution réelle double $r = r_1 = r_2$. Alors les 2 solutions linéairement indépendantes sont

$$y_1 = x^r \qquad y_2 = x^r \ln x$$

3ème cas : Deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1 = a + bi \quad \text{et} \quad r_2 = a - bi.$$

Alors $x^{a\pm bi} = x^a x^{\pm bi} = x^a e^{\pm bi \ln x} = x^a (\cos(b\ln x) \pm i\sin(b\ln x))$.
On en tire 2 solutions réelles linéairement indépendantes :

$$y_1 = x^a \sin(b\ln x) \qquad y_2 = x^a \cos(b\ln x)$$

Exemple 6.17.
1. $x^2y'' + xy' + y = 0 \quad (\alpha = 1 = \beta)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad r^2+1=0 \quad \Longrightarrow \quad r=\pm i \quad \Longrightarrow \quad y_1(x)=\sin(\ln x) \quad \text{et} \quad y_2=\cos(\ln x) \\ &\Longrightarrow \quad y(x) = C_1 \sin\ln x + C_2\cos\ln x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

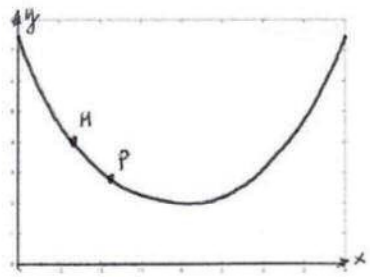
2. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (\alpha = -2,\ \beta = 2)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad r^2-3r+2=0 \quad \Longrightarrow \quad r_1=1,\ r_2=2 \quad \Longrightarrow y_1(x)=x \quad y_2(x)=x^2 \\ &\Longrightarrow \quad y(x) = C_1x + C_2x^2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6.4 Applications

6.4.1 Position d'équilibre d'un câble

Câble fixé en ses extrémités et soumis à son propre poids.



Forces agissant sur le bout MP :
- tension $\vec{T_0}$ en M et $\vec{T}$ en P.
- Poids : $\vec{G} = \vec{\mu}\cdot g\cdot s$ où

$\|\vec{\mu}\| = \mu =$ masse spécifique du câble,
$g =$ constante universelle de gravitation et
$s =$ longueur de l'arc PM.

Equilibre des forces :
1) composante verticale : $T\sin\alpha = \mu g s$
2) composante horizontale : $T\cos\alpha = T_0$.
On en tire

$$\tan\alpha = \frac{\mu g s}{T_0}\ .$$

Donc

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\alpha = \underbrace{\frac{\mu g}{T_0}}_{=K}\ s = K\cdot\int_0^x \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx.$$

On doit résoudre l'équation

$$y' = K \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (*)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = h = OM \end{cases}$$

En dérivant $(*)$, on trouve

$$y'' = K\sqrt{1+y'^2} \overset{u=y'}{\Longrightarrow} u' = K\sqrt{1+u^2} \Longrightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = Kdx$$

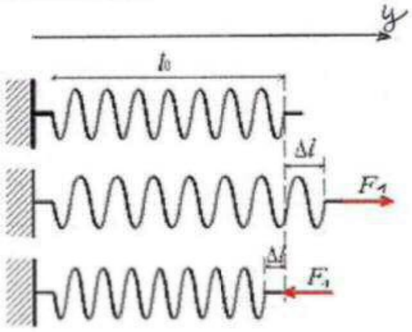
$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \quad \text{arcsinh}\, u = Kx + C \quad \Longrightarrow \quad u = \sinh(Kx+C) = y'$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \sinh(Kx) \quad \text{car } y'(0) = 0.$$

D'où finalement $y = \frac{1}{K}\cosh(Kx) + D$.
En utilisant la condition initiale $y(0) = h$, on obtient

$$y(x) = \frac{1}{K}\cosh(Kx) + h - \frac{1}{K}.$$

6.4.2 Phénomènes oscillatoires



Forces en présence :

- Force du ressort proportionnelle à l'élongation : $F_1 = -Ky(t)$
- Force de frottement proportionnelle à la vitesse : $F_2 = -\alpha y'(t)$.
- Force extérieure : $F_3 = \hat{F}(t)$.

Equation de Newton : $F_1 + F_2 + F_3 = ma$.
Ceci donne

$$my'' = -Ky - \alpha y' + \hat{F}(t) \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{y'' + ay' + ky = F(t)} \qquad (*)$$

avec $k = \dfrac{K}{m} > 0,\ a = \dfrac{\alpha}{m} > 0$ et $F(t) = \dfrac{\hat{F}(t)}{m}$.

Equation homogène (=sans force extérieure)

$y'' + ay' + ky = 0$: Equation de second ordre linéaire à termes constants :

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + k = 0$

<u>1er cas</u> :

$\Delta = a^2 - 4k > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ deux solutions réelles négatives :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4k}}{2} < 0$$

Alors

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Pas d'oscillation, amortissement exponentiel.

<u>2ème cas</u> :

$\Delta = a^2 - 4k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ une solution réelle double négative :

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$$

Alors

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\frac{a}{2}\,t}$$

Pas d'oscillation, amortissement critique.

<u>3ème cas</u> :

$\Delta = a^2 - 4k < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ deux solutions complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \omega_0 i$$

avec $\omega_0 = \frac{\sqrt{4k-a^2}}{2}$ = pulsation propre
Facteur d'amortissement $= \dfrac{a}{2} = \dfrac{\alpha}{2m}$.

Alors

$$y_h(t) = [C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)] \cdot e^{-\frac{a}{2}t}$$

Oscillations et amortissement exponentiel.

Cas particulier : si $a = 0$ (pas de frottements) alors

$$y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

Oscillations sans amortissement de pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{4k}}{2} = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Equation inhomogène : solution particulière

Il reste à chercher une solution particulière à l'équation $(*)$

$$y'' + ay' + ky = F(t).$$

On le fera uniquement dans le 3ème cas (oscillations) :

Méthode de Lagrange : On cherche une solution particulière de la forme

$$y_P(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left[\varphi_1(t)\cos(\omega_0 t) + \varphi_2(t)\sin(\omega_0 t)\right].$$

On obtient $M = e^{-\frac{a}{2}t}\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$ et le wronskien est alors

$$W = \det(M) = e^{-at} \cdot \omega_0.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -b(t)y_2 \\ b(t)y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{at}\begin{pmatrix} -F(t)\sin(\omega_0 t)e^{-\frac{a}{2}t} \\ F(t)\cos(\omega_0 t)e^{-\frac{a}{2}t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{\frac{a}{2}t}F(t)\begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
y_P(t) &= e^{-\frac{a}{2}t}\left[\cos(\omega_0 t)\varphi_1(t) + \sin(\omega_0 t)\varphi_2(t)\right] \\
&= -e^{-\frac{a}{2}t}\frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0}\int_0^t F(x)e^{\frac{a}{2}x}\sin(\omega_0 x)\,dx + e^{-\frac{a}{2}t}\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\int_0^t F(x)e^{\frac{a}{2}x}\cos(\omega_0 x)\,dx \\
&= \frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\omega_0}\int_0^t F(x)e^{\frac{a}{2}x}\big[\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 x)\big]\,dx \\
&= \frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\omega_0}\int_0^t F(x)e^{\frac{a}{2}x}\sin\big[\omega_0(t-x)\big]\,dx \qquad (**)
\end{aligned}$$

En général, $(**)$ est très difficile à calculer.

Oscillations forcées : On fait agir une force périodique sur la masse m :

$$F(t) = A\sin(\Omega t + \theta)$$

Alors $(**)$ reste compliquée à intégrer. On cherche une solution particulière directement pour l'équation différentielle

$$y'' + ay' + ky = A\sin(\Omega t + \theta)$$

en essayant une fonction de la forme :

$$y_P(t) = D_1\cos(\Omega t + \theta) + D_2\sin(\Omega t + \theta)$$

ce qui donne, après calculs :

$$y_P(t) = \frac{A}{\sqrt{(k-\Omega^2)^2 + a^2\Omega^2}}\sin(\Omega t + \theta + \beta) \qquad \text{avec} \quad \beta = \arctan\frac{\Omega a}{k - \Omega^2}$$

Dans ce cas particulier (3ème cas) , la solution générale est donc

$$y(t) = \underbrace{y_P(t)}_{\substack{\text{oscillations non amorties,}\\ \text{régime stationnaire}}} + \underbrace{\Big[C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t\Big]\cdot e^{-\frac{a}{2}t}}_{\substack{\text{oscillations avec amortissement,}\\ \text{régime transitoire}}}$$

Si $a \to 0$ (peu de frottement), alors l'amplitude des oscillation de $y_P(t)$ devient grande lorsque $\Omega^2 \approx k$.

A la limite, on a le phénomène de

Résonance
Lorsque $a = 0$ (pas de frottements), on obtient la solution générale

$$y(t) = \frac{A}{|k - \Omega^2|}\sin(\Omega t + \theta) + C_1\cos(\sqrt{k}\,t) + C_2\sin(\sqrt{k}\,t)$$

Si $\Omega = \omega_0 = \sqrt{k}$, la solution n'a pas de sens. Il faut reprendre l'équation différentielle qui devient

$$y'' + ky = A\sin(\sqrt{k}\,t + \theta) = A\Big[\cos\theta\cdot\sin(\sqrt{k}\,t) + \sin\theta\cdot\cos(\sqrt{k}\,t)\Big]$$

On essaie la solution particulière $\quad y_P(t) = t\cdot\Big[D_1\cos(\sqrt{k}\,t + \theta) + D_2\sin(\sqrt{k}\,t + \theta)\Big]$

Calculs $\Longrightarrow$

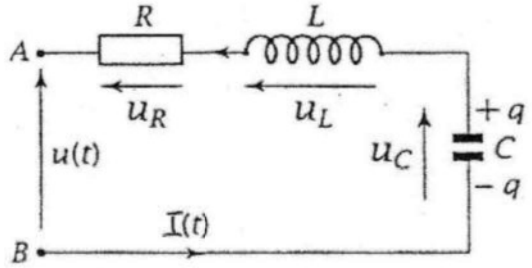
$$y_P(t) = -\frac{A}{2\sqrt{k}}\cdot t\cdot\cos(\sqrt{k}\,t + \theta).$$

Les amplitudes augmentent jusqu'à la rupture du matériau.

6.4.3 Circuit RLC série

Reprenons l'équation différentielle d'un circuit RLC :

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = U(t)\ .$$



C : capacité du condensateur
L : inductance
R : résistance

Forme normale :

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{U(t)}{L} \qquad (*)$$

On va résoudre le problème avec
- $U(t) = U_0$ pour $t \geqslant 0$ (on applique une <u>tension constante</u> à partir du temps $t = 0$).

On impose de plus les conditions initiales suivantes :
- $q(0) = 0$ (le condensateur est déchargé lors de l'enclenchement) et
- $\dot{q}(0) = 0$ (le courant est nul au temps $t = 0$).

(II) Solution particulière de l'équation avec second membre
Comme $U(t) = U_0 =$ cste, on vérifie que

$$q_P(t) = CU_0$$

est une solution particulière de $(*)$.

(I) Equation homogène :

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0$$

C'est la même équation que celle pour le ressort avec des constantes $\frac{R}{L}$ et $\frac{1}{LC}$ positives. Les 3 cas sont donc les mêmes :

Polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

d'où $\Delta = \dfrac{R^2}{L^2} - \dfrac{4}{LC} = \dfrac{R^2C - 4L}{L^2C}$.

<u>*1er cas*</u> : Si $R^2C > 4L$ alors $\Delta > 0$ et il y a deux solutions réelles négatives λ_1 et λ_2. Donc

$$q_h(t) = K_1e^{\lambda_1 t} + K_2e^{\lambda_2 t}$$

La solution générale est alors

$$q(t) = q_h(t) + q_P(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + CU_0$$

Les conditions initiales $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$ donne le système

$$\begin{cases} K_1 + K_2 + CU_0 = 0 \\ \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0 \end{cases}$$

qui se résoud en

$$\begin{cases} K_1 = CU_0 \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ K_2 = -CU_0 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} . \end{cases}$$

La solution est alors

$$q(t) = CU_0 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 t} + 1 \right)$$

et

$$i(t) = \dot{q}(t) = CU_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right)$$

<u>*3ème cas*</u> : Si $R^2 L < 4L$, il y a deux racines complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \omega_0 i$$

avec $a = \dfrac{R}{2L} \geqslant 0$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{4L - R^2 C}{L^2 C}}$. Alors

$$q_h(t) = e^{-at} \big[K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t) \big]$$

et la solution générale est

$$q(t) = q_h(t) + q_P(t) = e^{-at} \big[K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t) \big] + CU_0$$

$q(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad K_1 = -CU_0$

$\dot{q}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 K_2 - a K_1 = 0$ d'où $K_2 = -\dfrac{CU_0 a}{\omega_0}$. Donc

$$q(t) = CU_0 \left[-e^{-at} \left(\frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t) \right) + 1 \right]$$

et

$$i(t) = \dot{q}(t) = CU_0 \cdot e^{-at} \cdot \left(\frac{a^2}{\omega_0} + \omega_0 \right) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Cas particulier : Si $a = 0$ (pas de résistance), alors

$$q(t) = CU_0\big[1 - \cos(\omega_0 t)\big] \qquad i(t) = CU_0\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Remarque. En supposant R^2C négligeable par rapport à $4L$, on a

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4L - R^2C}{L^2C}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et la fréquence d'oscillation est alors

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Application numérique :
Pour avoir une fréquence d'oscillations de $10kHz$, on peut choisir $C = 100nF$ et $L = 2.553mH$.
Pour avoir $R^2C << 4L$ il faut alors $R << \sqrt{\frac{4L}{C}}$ donc $R << 320\omega_0$.

Remarque : dans une fonction $\sin(\omega t) = \sin(2\pi f t)$, ω est la pulsation et f la fréquence avec la relation

$$\omega = 2\pi f.$$