Chapitre 6

Estimation

Sommaire

1 Introduction

Un phénomène biologique sera entièrement déterminé si l'on connaît la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire donnée dans la population. On a alors deux cas de figure :

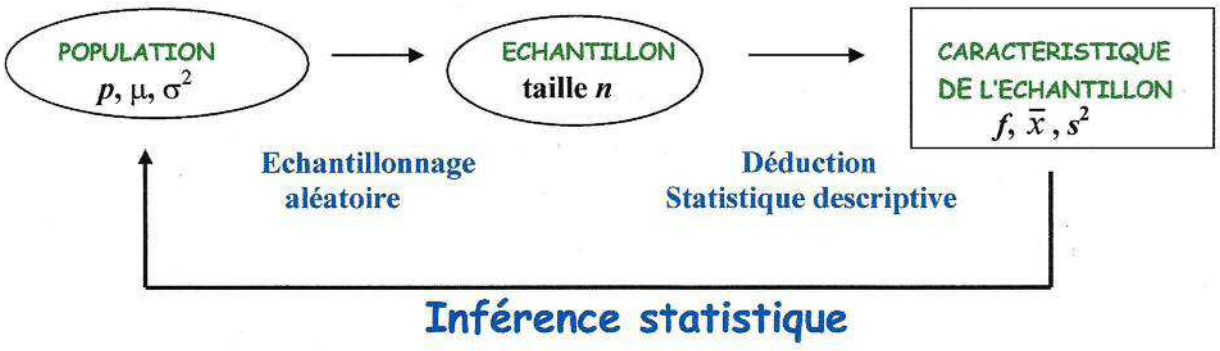
- soit la **loi de probabilité suivie par *X* est connue *a priori*** et on vérifie ***a posteriori*** que les observations faites à partir d'un échantillon sont en accord avec elle. C'est le cas par exemple de la répartition des génotypes attendus dans une population sous le modèle de Hardy-Weinberg. On effectue alors **un test d'ajustement entre la distribution théorique et la distribution observée** (chapitre 7).

- soit la **loi de probabilité suivie par *X* est inconnue** mais suggérée par la description de l'échantillon (nature de la variable, forme de la distribution des fréquences, valeurs des paramètres descriptifs) (chapitre 5). Dans ce cas, il est nécessaire d'**estimer** les paramètres de la loi de probabilité à partir des paramètres établis sur l'échantillon.

L'inférence statistique traite principalement de ces deux types de problèmes : l'**estimation de paramètres** (espérance, variance, probabilité de succès) et **les tests d'hypothèses**. L'inférence statistique ne conduit jamais à une conclusion stricte, elle attache toujours **une probabilité à cette conclusion**. Cela provient du fait que l'on tente de tirer des conclusions sur une population (grand nombre d'individus) sur la base des observations réalisées sur un échantillon, représentant une portion restreinte de la population.

L'**estimation** a pour objectif de déterminer les valeurs inconnues des paramètres de la population (p, μ, σ^2) ou (proportion, moyenne, variance) à partir des données de l'échantillon (f, $\bar{x}$, s^2). Il est alors nécessaire de déterminer la précision de ces estimations en établissant **un intervalle de confiance** autour des valeurs prédites.

Les **statistiques inférentielles** ou inductives peuvent se résumer par le schéma suivant :



2 D

Pour résoudre les problèmes d'estimation de paramètres inconnus, il faut tout d'abord étudier les **distributions d'échantillonnage**, c'est à dire la loi de probabilité suivie par l'estimateur.

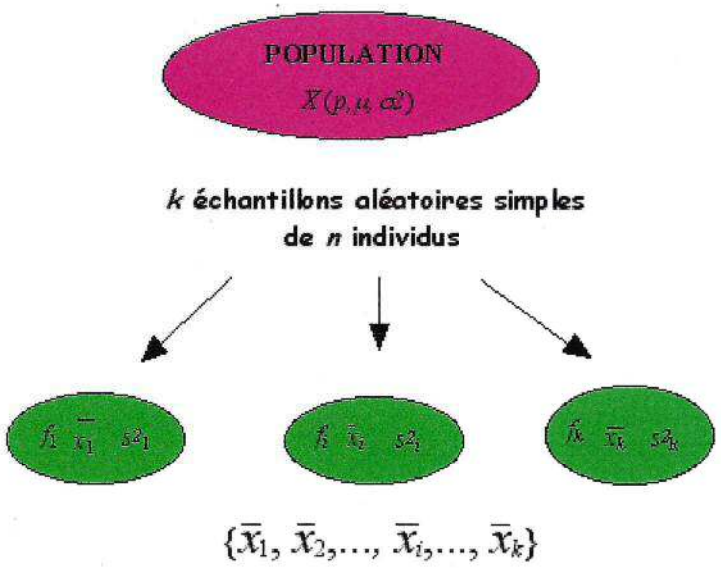
Remarque : En théorie de l'estimation, il s'agit de distinguer soigneusement trois concepts différents :

- ◆ les paramètres de la **population** comme la moyenne μ dont la valeur est certaine mais inconnue symbolisés par des **lettres grecques.**
- ◆ les résultats de **l'échantillonnage** comme la moyenne $\overline{x}$ dont la valeur est certaine mais connue symbolisés par des **minuscules.**
- ◆ les **variables aléatoires des paramètres**, comme la moyenne aléatoire $\overline{X}$ dont la valeur est incertaine puisque aléatoire mais dont la loi de probabilité est souvent connue et symbolisées par des **majuscules.**

2.1 Définition

2.1.1 Approche empirique

Il est possible d'extraire d'une population de paramètres p, μ ou σ^2 pour une variable aléatoire X, k échantillons aléatoires simples de même effectif, n. Sur chaque échantillon de taille n, on calcule les paramètres descriptifs (f, $\overline{x}$, s^2).

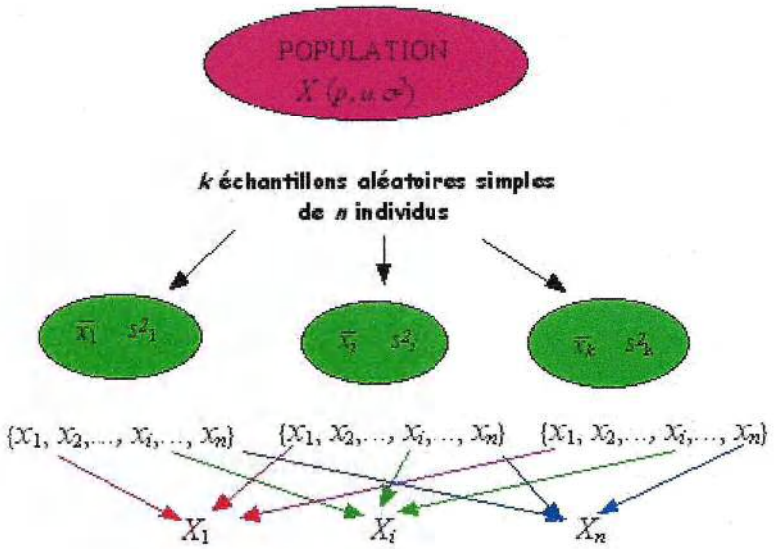


On obtient ainsi pour chaque paramètre estimé, une série statistique composée de k éléments à savoir les k estimations du paramètre étudié. Par exemple, on aura k valeurs de moyennes observées (graphe ci-dessus).

La distribution associée à ces k estimations constitue la **distribution d'échantillonnage du paramètre**. On peut alors associer une variable aléatoire à chacun des paramètres. La loi de probabilité suivie par cette variable aléatoire admet comme distribution, la distribution d'échantillonnage du paramètre auquel on pourra associer une espérance et une variance.

2.1.2 *Approche théorique*

En pratique, les données étudiées sont relatives à **un seul échantillon**. C'est pourquoi, il faut rechercher les propriétés des échantillons susceptibles d'être prélevés de la population ou plus précisément les lois de probabilité de variables aléatoires associées à un échantillon aléatoire.



Ainsi les n observations $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, faites sur un échantillon peuvent être considérées comme n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$. En effet, la valeur prise par le premier élément extrait de la population X_1, dépend de l'échantillon obtenu lors du tirage aléatoire. Cette valeur sera différente si l'on considère un autre échantillon. Il en est de même pour les n valeurs extraites de la population.

A partir de ces n variables aléatoires, on peut définir alors une nouvelle variable qui sera fonction de ces dernières telle que :

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$$

par exemple : $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots X_n$

Ainsi la loi de probabilité de la variable aléatoire Y dépendra à la fois de la loi de probabilité de la variable aléatoire X et de la nature de la fonction f.

2.2 Loi de probabilité de la moyenne

2.2.1 Définition

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 et n copies indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ telle que X_i associe le $i^{ème}$ élément de chacun des n échantillons avec $E(X_i) = \mu$ et $V(X_i) = \sigma^2$.

On construit alors **la variable aléatoire** $\overline{X}$, telle que

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ..X_i + ... + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

avec pour **espérance** :

$$E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu$$

Propriétés de l'espérance

d'où $\boxed{E(\overline{X}) = \mu}$ $E(\overline{X})$ est notée également $\mu_{\overline{X}}$

et pour **variance** si $V(X_i) = \sigma^2$:

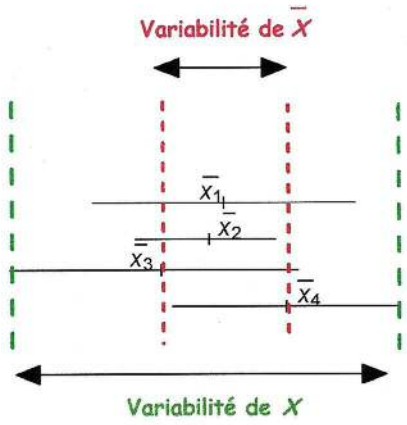
$$V(\overline{X}) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2$$

Propriétés de la variance

d'où $\boxed{V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}}$ $V(\overline{X})$ est notée également $\sigma^2_{\overline{X}}$

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire $\overline{X}$, moyenne de n v.a. X de loi de probabilité $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, est une **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Remarque : il est aisé de voir sur le graphe ci-dessous que la variance associée à une moyenne ($\frac{\sigma^2}{n}$) est plus faible que la variance de la variable elle-même (σ^2).



Soit l'étendue des valeurs observées d'une variable aléatoire X pour 4 échantillons de même taille d'une même population.

Les valeurs des moyennes arithmétiques sont indiquées ainsi que les limites relatives à l'étendue des valeurs de la **variable** observée et celle des **moyennes** observées.

Exemple :

Des études statistiques montrent que le taux de glucose dans le sang est une variable normale X d'espérance $\mu = 1$ g/l et d'écart-type $\sigma = 0{,}1$ g/l.
En prenant un échantillon de 9 individus dans la population, l'espérance et l'écart-type théorique attendu de la variable aléatoire $\bar{X}$ sont alors :

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 1 \text{ g/l} \quad \text{et} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{9}} = 0{,}03 \text{ g/l}$$

2.2.2 Co

En fonction de la nature de la variable aléatoire continue X, de la taille de l'échantillon n et de la connaissance que nous avons sur le paramètre σ^2, la variable centrée réduite construite avec $\bar{X}$ converge vers différentes lois de probabilité

Lorsque la variance σ^2 **est connue** et n **grand** ($n \geq 30$), on se trouve dans les conditions du **théorème central limite** et la loi suivie par :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \text{loi normale réduite}$$

Ceci reste vrai lorsque $n \leq 30$ seulement si la loi suivie par X **suit une loi normale**.

Lorsque la variance σ^2 **est inconnue** et X **suit une loi normale**, la loi suivie par la variable centrée réduite est alors : $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}} \rightarrow T_{n-1}$ **loi de student** à n-1 degrés de liberté

Lorsque $n \geq 30$, la loi de student **tend** vers une loi normale réduite (voir **convergence**).

Lorsque la variance σ^2 **est inconnue** et X **ne suit pas une loi normale**, la loi suivie par $\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$ n'est pas connue.

2.3 Loi de probabilité d'une fréquence

Soit une population dans laquelle une proportion p des individus présente une certaine propriété.
Si k est le nombre d'individu présentant la propriété dans un échantillon de taille n, alors la variable aléatoire K résultant de différents échantillonnages suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $E(K) = np$ et $V(K) = npq$.

On construit la variable aléatoire $F = \frac{K}{n}$ avec

pour **espérance** : $E(F) = E(\frac{K}{n}) = \frac{1}{n}E(K) = \frac{1}{n}np = p$ **Opération sur les variables**

et pour **variance** : $V(F) = V(\frac{K}{n}) = \frac{1}{n^2}V(K) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n}$

La **loi de probabilité** d'une fréquence $\frac{K}{n}$, suit une **loi normale** $\mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$
vrai si $np > 5$ et $nq > 5$.

3 Estimateur

3.1 Définition

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$, n réalisations indépendantes de la variable aléatoire X (discrète ou continue) et θ un paramètre associé à la loi de probabilité suivi par X, un **estimateur** du paramètre θ est une variable aléatoire Θ fonction des X_i :

$$\Theta = f(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$$

Si on considère n observations $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, l'estimateur Θ fournira **une estimation** de θ notée également $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

L'estimation d'un paramètre inconnu, noté θ est fonction des observations résultant d'un échantillonnage aléatoire simple de la population. L'estimateur est donc une nouvelle variable aléatoire construite à partir des données expérimentales et dont la valeur se rapproche du paramètre que l'on cherche à connaître.

L'**estimation** de θ est une variable aléatoire Θ dont la distribution de probabilité s'appelle la **distribution d'échantillonnage** du paramètre θ.

L'estimateur Θ admet donc une espérance $E(\Theta)$ et une variance $V(\Theta)$.

3.2 Propriétés

3.2.1 Co

L'estimateur Θ doit tendre vers la valeur réelle du paramètre θ lorsque le nombre d'individus étudié augmente. On dit que **l'estimateur est convergent.**

$$\text{Si } \forall \varepsilon > 0 \; P(|\Theta - \theta|) > \varepsilon) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Ceci équivaut à dire qu'en limite $\Theta \to \theta$ lorsque $n \to \infty$.

3.2.2 Biais d'un estimateur

Le biais d'un estimateur noté $B(\Theta)$ est la différence moyenne entre sa valeur et celle du paramètre qu'il estime. Le biais doit être égal à 0 pour avoir un bon estimateur.

$B(\Theta) = E(\Theta-\theta) = E(\Theta)-E(\theta) = E(\Theta)-\theta = 0$ (voir **propriétés de l'espérance**)

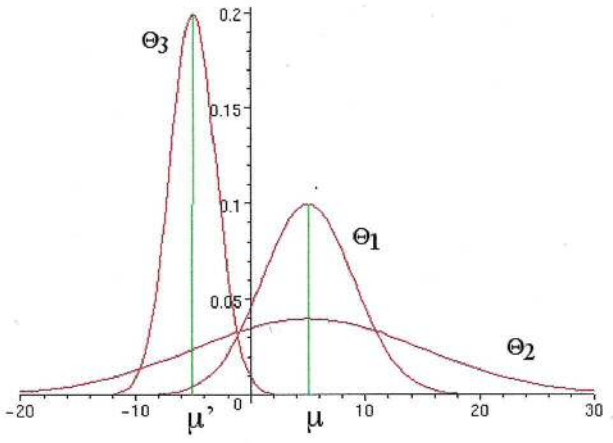
d'où $E(\Theta) = \theta$

Ainsi l'estimateur sera **sans biais** si son espérance est égale à la valeur du paramètre de la population.

$$E(\Theta) = \theta$$

Exemple :

Soit les densités de probabilité de 3 estimateurs d'une espérance μ,



Θ_1 et Θ_2 sont des **estimateurs sans biais** de μ car
$E(\Theta_1) = E(\Theta_2) = \mu$

Θ_3 est un **estimateur biaisé** de μ car
$E(\Theta_3) - \mu = \mu' - \mu \neq 0$

Dans l'exemple ci-dessus, Θ_1 et Θ_2 sont des **estimateurs sans biais** de μ car
$B(\Theta_1) = E(\Theta_1 - \mu) = E(\Theta_1) - \mu = 0$ car $E(\Theta_1) = \mu$, de même pour $B(\Theta_2)$

alors que Θ_3 est un **estimateur biaisé** de μ car
$B(\Theta_3) = E(\Theta_3 - \mu) = E(\Theta_3) - \mu = \mu' - \mu \neq 0$ car $E(\Theta_3) = \mu'$

Remarque : Un estimateur est asymptotiquement sans biais si $E(\Theta) \rightarrow \theta$ lorsque $n \rightarrow \infty$

3.2.3 Variance d'un estimateur

Si deux estimateurs sont convergents et sans biais, le plus efficace est celui qui a **la variance la plus faible** car ses valeurs sont en moyenne plus proches de la quantité estimée.

$$V(\Theta) = E(\Theta - E(\Theta))^2 \text{ minimale}$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, on voit que $V(\Theta_1) < V(\Theta_2)$. On peut donc conclure que Θ_1 est un meilleur estimateur de μ que Θ_2.

Remarque : Quand les estimateurs sont biaisés, en revanche, leur comparaison n'est pas simple. Ainsi un estimateur peu biaisé mais de variance très faible, pourrait même être préféré à un estimateur sans biais mais de grande variance.

Théorème :
Si un estimateur est asymptotiquement sans biais et si sa variance tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, il est convergent.

$$P(|\Theta - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\Theta)}{\varepsilon^2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0$$

(**Inégalité de Bienaymé-Tchébycheff**)

Cette inégalité exprime que si $|\Theta - \theta|$ tend vers 0 quand n augmente, $V(\Theta)$ doit aussi tendre vers 0.

4 Estimation ponctuelle et par intervalle

L'**estimation** d'un paramètre quelconque θ est **ponctuelle** si l'on associe **une seule valeur** à l'estimateur $\hat{\theta}$ à partir des données observables sur un échantillon aléatoire. L'**estimation par intervalle** associe à un échantillon aléatoire, **un intervalle** $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ qui recouvre θ avec une certaine probabilité.

4.1. Estimation ponctuelle

Si la distribution de la variable aléatoire X est connue, on utilise la **méthode du maximum de vraisemblance** pour estimer les paramètres de la loi de probabilité. En revanche si la distribution n'est pas connue, on utilise **la méthode des moindres carrés**.

4.1.1. Espérance

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ dont la valeur des paramètres n'est pas connue et pour laquelle on souhaite estimer **l'espérance** μ.
Soient X_1 , X_2 ,..., X_i , ..., X_n , n réalisations indépendantes de la variable aléatoire X, un estimateur du paramètre μ est une suite de variable aléatoire Θ fonctions des X_i :

$$\Theta = f(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$$

La méthode des **moindres carrés** consiste à rechercher les coefficients de la combinaison linéaire $\Theta = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_iX_i + \ldots + a_nX_n$
telle que $E(\Theta) = \mu$ et $V(\Theta)$ soit minimale

La **moyenne arithmétique** constitue le meilleur estimateur de μ, espérance de la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Voici pourquoi :

Estimateur *sans biais* : $E(\bar{X}) = \mu$

Estimateur *convergent* : si l'on pose l'**inégalité de Biénaymé-Tchébycheff** :

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2} \quad \text{avec } \varepsilon > 0$$

lorsque $n \to \infty$ $\quad \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$ et ceci $\forall \varepsilon > 0$

ainsi en limite, $P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) = 0$, ce qui indique que $\bar{X} \to \mu$ en probabilité.

4.1.2. *Variance*

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ pour laquelle on souhaite estimer **la variance σ^2.**

Soient X_1 , X_2 ,..., X_i , ..., X_n , n réalisations indépendantes de la variable aléatoire X, un estimateur du paramètre σ^2 est une suite de variable aléatoire Θ fonctions des X_i :

$$\Theta = f(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$$

- **Cas où l'espérance μ est connue**

La méthode des moindres carrés consiste à rechercher les coefficients de la combinaison linéaire

$$\Theta = a_1(X_1 - \mu)^2 + a_2(X_2 - \mu)^2 + \ldots + a_i(X_i - \mu)^2 + \ldots + a_n(X_n - \mu)^2$$

telle que $E(\Theta) = \sigma^2$ et $V(\Theta)$ soit minimale

La **variance observée** constitue le meilleur estimateur de σ^2, variance de la loi de probabilité de la variable aléatoire X lorsque l'espérance μ **est connue** :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

Remarque : Cette estimation de la variance de la population est rarement utilisée dans la mesure où si la variance σ^2 n'est pas connue, l'espérance μ ne l'est pas non plus.

- **Cas où l'espérance μ est inconnue**

Dans ce cas, nous allons estimer μ avec $\hat{\mu} = \overline{X}$ et dans ce cas $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \neq \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

Nous allons étudier la relation entre ces deux termes à partir de la variance observée :

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu)]^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - \mu)^2 + (\overline{X} - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\overline{X} - \mu)]$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = n(\overline{X} - \mu)$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + (\overline{X} - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu)^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\overline{X} - \mu)^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{en effet} \quad \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - \mu)^2 = (\overline{X} - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ainsi $$s^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Le meilleur estimateur de σ^2, variance de la loi de probabilité de la variable aléatoire X lorsque l'espérance μ **est inconnue** est :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Remarque : Lorsque n augmente, la variance observée s^2 tend vers la variance de la population σ^2. $$\lim_{n\to+\infty} s^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

4.1.3. *Fréquence*

Soit le schéma de Bernoulli dans lequel le caractère A correspond au succès. On note p la fréquence des individus de la **population** possédant le caractère A. La valeur de ce paramètre étant inconnu, on cherche à estimer la fréquence p à partir des données observables sur un échantillon.
A chaque échantillon non exhaustif de taille n, on associe l'entier k, nombre d'individus possédant le caractère A.

Soit K une variable aléatoire discrète suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et pour laquelle on souhaite estimer **la fréquence p**.

La **fréquence observée** du nombre de succès observé dans un échantillon de taille n constitue le meilleur estimateur de p :

$$\hat{p} = \frac{K}{n}$$

Voici pourquoi :

Estimateur sans biais : $E(\frac{k}{n}) = p$ (voir loi de fréquence)

Estimateur convergent : si l'on pose l'**inégalité de Biénaymé-Tchébycheff**

$$P(\left| \frac{K}{n} - p \right| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\frac{K}{n})}{\varepsilon^2} \quad \text{avec } \varepsilon > 0$$

alors lorsque $n \to \infty$ $\quad \frac{V(\frac{K}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0$ et ceci $\forall \varepsilon > 0$

ainsi en limite $P(\left| \frac{K}{n} - p \right| \geq \varepsilon) = 0$ ce qui indique que $\frac{k}{n} \to p$ en probabilité.

Remarque : Nous avions déjà avancé cette propriété lors de l'établissement de **la loi des grands nombres**.

Exemple :
On a prélevé au hasard, dans une population de lapin, 100 individus. Sur ces 100 lapins, 20 sont atteints par la myxomatose. Le pourcentage de lapins atteints par la myxomatose dans la population est donc :

$$\hat{p} = \frac{K}{n} = \frac{20}{100} = 0{,}2 \text{ soit } 20\% \text{ de lapins atteins dans la population}$$

Ce résultat n'aura de signification que s'il est associé à un **intervalle de confiance**.

4.2 Estimation par intervalle

4.2.1 Définition

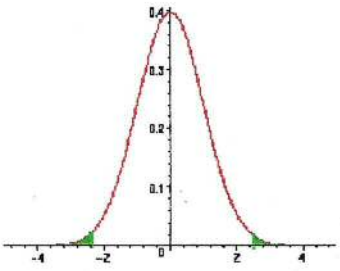
L'**estimation par intervalle** associe à un échantillon aléatoire, **un intervalle** $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ qui recouvre θ avec une certaine probabilité.

Cet intervalle est appelé l'**intervalle de confiance** du paramètre θ car la probabilité que θ dont la valeur est inconnue se trouve compris entre $\hat{\theta}_1$ *et* $\hat{\theta}_2$ est égale à 1-α, **le coefficient de confiance** $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$

Son complément α correspond au **coefficient de risque**.

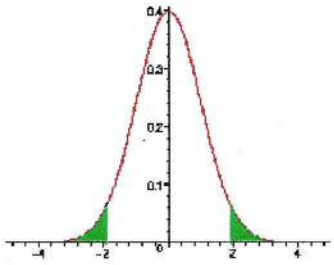
$$P(\theta \neq [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]) = \alpha$$

Un intervalle de confiance indique **la précision d'une estimation** car pour un risque α donné, l'intervalle est d'autant plus grand que la précision est faible comme l'indiquent les graphes ci-dessous. Pour chaque graphe, **l'aire hachurée en vert** correspond au coefficient de risque α. Ainsi de part et d'autre de la distribution, la valeur de l'aire hachurée vaut $\frac{\alpha}{2}$.



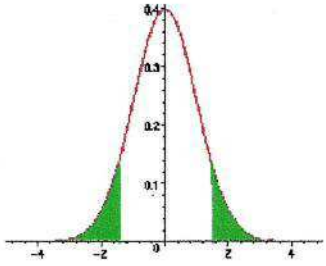
$\alpha = 0{,}01$

99 chances sur 100 que la valeur du paramètre recherché se trouve dans l'intervalle de confiance mais **la précision** autour de la valeur prédite est **faible**



$\alpha = 0{,}05$

95 chances sur 100 que la valeur du paramètre recherché se trouve dans l'intervalle de confiance et la **précision** autour de la valeur prédite est **correcte**.



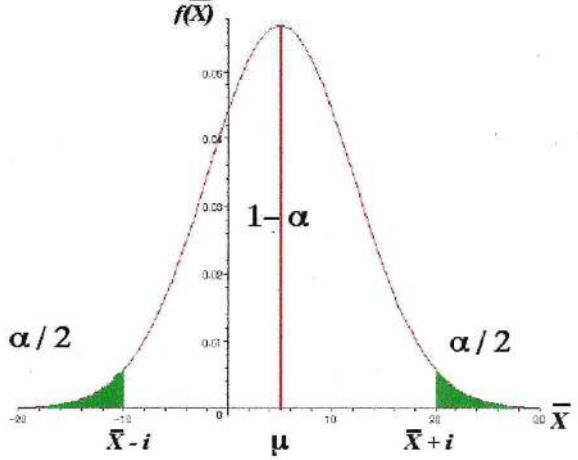
$\alpha = 0{,}10$

90 chances sur 100 que la valeur du paramètre recherché se trouve dans l'intervalle de confiance mais la **précision** autour de la valeur prédite est **élevée.**

4.2.2 Intervalle de confiance d'une moyenne

En fonction de la nature de la variable aléatoire continue X, de la taille de l'échantillon n et de la connaissance que nous avons sur le paramètre σ^2, l'établissement de l'intervalle de confiance autour de μ sera différent.

- **Quelque soit la valeur de *n*, si $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et σ^2 est connue,** Etablir l'intervalle de confiance autour de la moyenne μ revient à établir la valeur de i pour



une valeur du coefficient de confiance 1 - α donnée par l'expérimentateur.

Voici pourquoi :

Si $P(\bar{X} - i < \mu < \bar{X} + i) = 1 - \alpha$ alors $P(\mu - i < \bar{X} < \mu + i) = 1 - \alpha$

Connaissant la **loi suivie par la v. a.** $\bar{X}$ et d'après **le théorème central limite,** nous pouvons établir que $P(\frac{-i}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{+i}{\sigma/\sqrt{n}}) = 1-\alpha$ sachant que $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (**conditions**)

par conséquent $\left|\frac{i}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$ correspond à la valeur de la **variable normale réduite** pour la probabilité α donnée notée ε_α ou **écart réduit**

ainsi $\left|\frac{i}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \varepsilon_\alpha$ implique $i = \varepsilon_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

L'**intervalle de confiance de la moyenne** μ pour un coefficient de risque α est donc

$$\bar{X} - \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

quelque soit la valeur de n si $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et la variance σ^2 est connue

Exemple :

Pour des masses comprises entre 50g et 200g, une balance donne une pesée avec une variance de 0,0015. Les résultats des trois pesées d'un même corps sont : 64,32 ; 64,27 ; 64 ,39.
On veut connaître le poids moyen de ce corps dans la population avec un coefficient de confiance de 99%.

avec $\bar{X} = 64{,}33$g et $\varepsilon_\alpha = 2{,}576$ alors $\varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}576 \times \frac{0{,}039}{1{,}732} = \mathbf{0{,}058}$

et donc $\mu = \bar{X} \pm \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mathbf{64{,}33g \pm 0{,}058}$

d'où le poids moyen de ce corps est compris dans l'intervalle [64,27 ; 64,39] avec une probabilité de 0,99.

Remarque : La valeur de ε_α est donnée par la **table de l'écart-réduit** pour une valeur α donnée.

Coefficient de risque	Ecart-réduit
$\alpha = 0{,}01$	$\varepsilon_\alpha = 2{,}576$
$\alpha = 0{,}05$	$\varepsilon_\alpha = 1{,}960$
$\alpha = 0{,}10$	$\varepsilon_\alpha = 1{,}645$

- **Quelque soit la valeur de *n*, si $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu , \sigma)$ et σ^2 est inconnue,**

Le raisonnement reste le même mais la variance de la population σ^2 doit être estimée par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \quad \text{(voir estimation ponctuelle)}$$

Si $P(\overline{X} - i < \mu < \overline{X} + i) = 1 - \alpha$ alors $P(\mu - i < \overline{X} < \mu + i) = 1 - \alpha$

Connaissant la loi suivie par la v. a. $\overline{X}$ et celle suivie par la variable centrée réduite, on peut établir que $P(\frac{-i}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} < \frac{+i}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$ sachant que $\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \rightarrow T(n\text{-}1 \text{ d.d.l.})$ (conditions)

par conséquent $\left| \frac{i}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right|$ correspond à la valeur de la **variable de student** pour une valeur de probabilité α donnée notée t_α pour n -1 degrés de liberté.

Ainsi $\left| \frac{i}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right| = t_\alpha$ implique $i = t_\alpha \times \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$

L'**intervalle de confiance de l'espérance** μ pour un coefficient de risque α est donc

$$\overline{X} - t_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

quelque soit la valeur de n si $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu , \sigma)$ et σ^2 est **inconnue**

Remarque : Lorsque $n > 30$, la loi de student converge vers une loi normale réduite. Ainsi la valeur de t_α $(n\text{-}1)$ est égale à ε_α . Ci-dessous, un exemple pour un risque $\alpha = 0{,}05$.

Taille de l'échantillon	Ecart-réduit	Variable de student
$n = 10$	$\varepsilon_\alpha = 1{,}960$	$t_\alpha = 2{,}228$
$n = 20$	$\varepsilon_\alpha = 1{,}960$	$t_\alpha = 2{,}086$
$n = 30$	$\varepsilon_\alpha = 1{,}960$	$t_\alpha = 2{,}042$
$n = 40$	$\varepsilon_\alpha = 1{,}960$	$t_\alpha = 1{,}960$

Exemples :

(1) Dans un échantillon de **20 étudiants** de même classe d'âge et de même sexe, la taille moyenne observée est de 1,73m et l'écart-type de 10 cm. La taille moyenne de l'ensemble des étudiants de l'université est donc :

avec $\bar{x} = 1{,}73\text{m}$; $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{20}{19} \times 0{,}01 = 0{,}011$ et $t_\alpha = 2{,}086$

d'où $t_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 2{,}086 \times \sqrt{\frac{0{,}011}{20}} = 0{,}049$ ainsi $\mu = \bar{X} \pm t_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \mathbf{1{,}73\text{m} \pm 0{,}049}$

La **taille moyenne** des étudiants dans la population est comprise dans l'intervalle **[1,68 ; 1,78]** avec une probabilité de 0,95.

(2) Dans un échantillon de **100 étudiants**, la taille moyenne de la population est :

$\bar{x} = 1{,}73\text{m}$; $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{100}{99} \times 0{,}01 = 0{,}01$ et $\varepsilon_\alpha = 1{,}960$

d'où $\varepsilon_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 1{,}960 \times \sqrt{\frac{0{,}010}{100}} = 0{,}02$ ainsi $\mu = \bar{X} \pm \varepsilon_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \mathbf{1{,}73\text{m} \pm 0{,}02}$

La **taille moyenne** des étudiants dans la population est comprise dans l'intervalle **[1,71 ; 1,75]** avec une probabilité de 0,95.

Ainsi lorsque **la taille** de l'échantillon **augmente** pour un même coefficient de confiance $(1-\alpha)$, l'estimation autour de μ est **plus précise**.

- **Si $n > 30$ et X suit une loi inconnue,**

La démarche est la même que pour le cas précédent puisque par définition la variance de la population est inconnue et doit être estimée avec la variance observée :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \quad \text{(voir estimation ponctuelle)}$$

Comme pour le cas 1, la loi suivie par la variable centrée réduite $\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (conditions).

L'**intervalle de confiance de l'espérance** μ pour un coefficient de risque α est donc

$$\bar{X} - \varepsilon_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \varepsilon_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

vraie seulement si ***n* est grand.**

- **Si $n < 30$ et X suit une loi inconnue,**

La loi de probabilité suivie par $\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$ n'est pas connue et l'on a recours aux statistiques non paramétriques.

4.2.3 Intervalle de confiance d'une proportion

Etablir l'intervalle de confiance autour de la fréquence p de la population à partir de son estimateur $\frac{K}{n}$ revient à établir la valeur de i pour une valeur du coefficient de confiance $(1 - \alpha)$ donnée par l'expérimentateur telle que :

$$P(\frac{K}{n} - i < p < \frac{K}{n} + i) = 1 - \alpha \quad \text{ou} \quad P(p - i < \frac{K}{n} < p + i) = 1 - \alpha$$

Connaissant la **loi suivie par la v. a.** $\frac{K}{n}$ et d'après **le théorème central limite**, on peut établir que $P(\frac{-i}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{\frac{K}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{+i}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}) = 1 - \alpha$ sachant que $\frac{\frac{K}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

par conséquence $\left|\frac{i}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right|$ correspond à la valeur de la **variable normale réduite** pour probabilité α donnée notée ε_α ou **écart réduit**.

ainsi $\left|\frac{i}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right| = \varepsilon_\alpha$ implique $i = \varepsilon_\alpha \times \sqrt{\frac{pq}{n}}$

Par définition, $V(\frac{K}{n}) = \frac{pq}{n}$ n'est pas connue et on l'estime par $\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}$ avec $\hat{p} = \frac{K}{n}$ et $\hat{q} = \frac{n-K}{n}$

L'**intervalle de confiance de la fréquence** p pour un coefficient de risque α est donc

$$\frac{K}{n} - \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \frac{K}{n} + \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

vraie seulement si ***n* est grand et *np*, *nq* > 5**

Remarque : Si la taille de l'échantillon est faible, on a recours aux lois exactes.

Exemple :

Un laboratoire d'agronomie a effectué une étude sur le maintien du pouvoir germinatif des graines de *Papivorus subquaticus* après une conservation de 3 ans.
Sur un lot de 80 graines, 47 ont germé. Ainsi la probabilité de germination des graines de *Papivorus subquaticus* après trois ans de conservation avec un coefficient de confiance de 95% est donc :

avec $\hat{p} = \frac{K}{n} = \frac{47}{80} = 0{,}588$, $\hat{q} = \frac{n-K}{n} = \frac{33}{80} = 0{,}412$ et $\varepsilon_\alpha = 1{,}96$

alors $\varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}588 \times 0{,}412}{80}} = 0{,}108$ d'où $p = 0{,}588 \pm 0{,}108$

ainsi **la probabilité de germination est** comprise dans l'intervalle **[0,480 et 0,696]** avec une probabilité de **0,95.**