Exercice 15

On a : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - 1).(e^x - 8)$.

① Domaine de définition : On peut calculer f pour toute valeur de x. Donc $D = \mathbb{R}$.

② Parité : On a $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - 1).(e^{-x} - 8) \neq \pm f(x)$. Donc f n'est ni paire, ni impaire.

Périodicité : Comme f n'a pas de fonctions trigonométriques, f n'est pas périodique.

③ Asymptotes verticales : Comme f n'a pas d'exclu, il n'y a aucune asymptote verticale.

Asymptotes non verticales : Comme f contient des exponentielles, elle n'aura pas d'asymptote oblique.
On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(e^x - 1)(e^x - 8) = \frac{1}{2}.(+\infty).(+\infty) = +\infty$ et
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}(e^x - 1)(e^x - 8) = \frac{1}{2}(0-1)(0-8) = \frac{1}{2}.8 = 4$.
Ainsi, $y = 4$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

④ Intersections avec l'axe x : $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^x - 1)(e^x - 8) = 0 \Rightarrow$ soit $e^x - 1 = 0$, soit
$e^x - 8 = 0 \Rightarrow$ soit $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$, soit $e^x = 8 \Rightarrow x = \ln(8)$.
Les intersections avec l'axe x sont donc $(0;0)$ et $(0; \ln(8)) =$
$\cong (0; 2{,}08)$.

Intersection avec l'axe y : $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}(\underbrace{e^0 - 1}_{1-1=0})(e^0 - 8) = 0 \Rightarrow$ point $(0;0)$.

⑤ Tableau de signe :

x		0		$\ln(8)$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]\ln(8); +\infty[$ et $f(x) < 0$
pour $x \in]0; \ln(8)[$.

⑥ Dérivée : On a $f(x) = \frac{1}{2}u.v$ avec $u = e^x - 1$ et $v = e^x - 8$. On a $u' = e^x$ et $v' = e^x$.
Ainsi $f'(x) = \frac{1}{2}(u'v + uv') = \frac{1}{2}(e^x(e^x - 8) + (e^x - 1)e^x) =$
$= \frac{1}{2}e^x(e^x - 8 + e^x - 1) = \frac{1}{2}e^x(2e^x - 9)$.

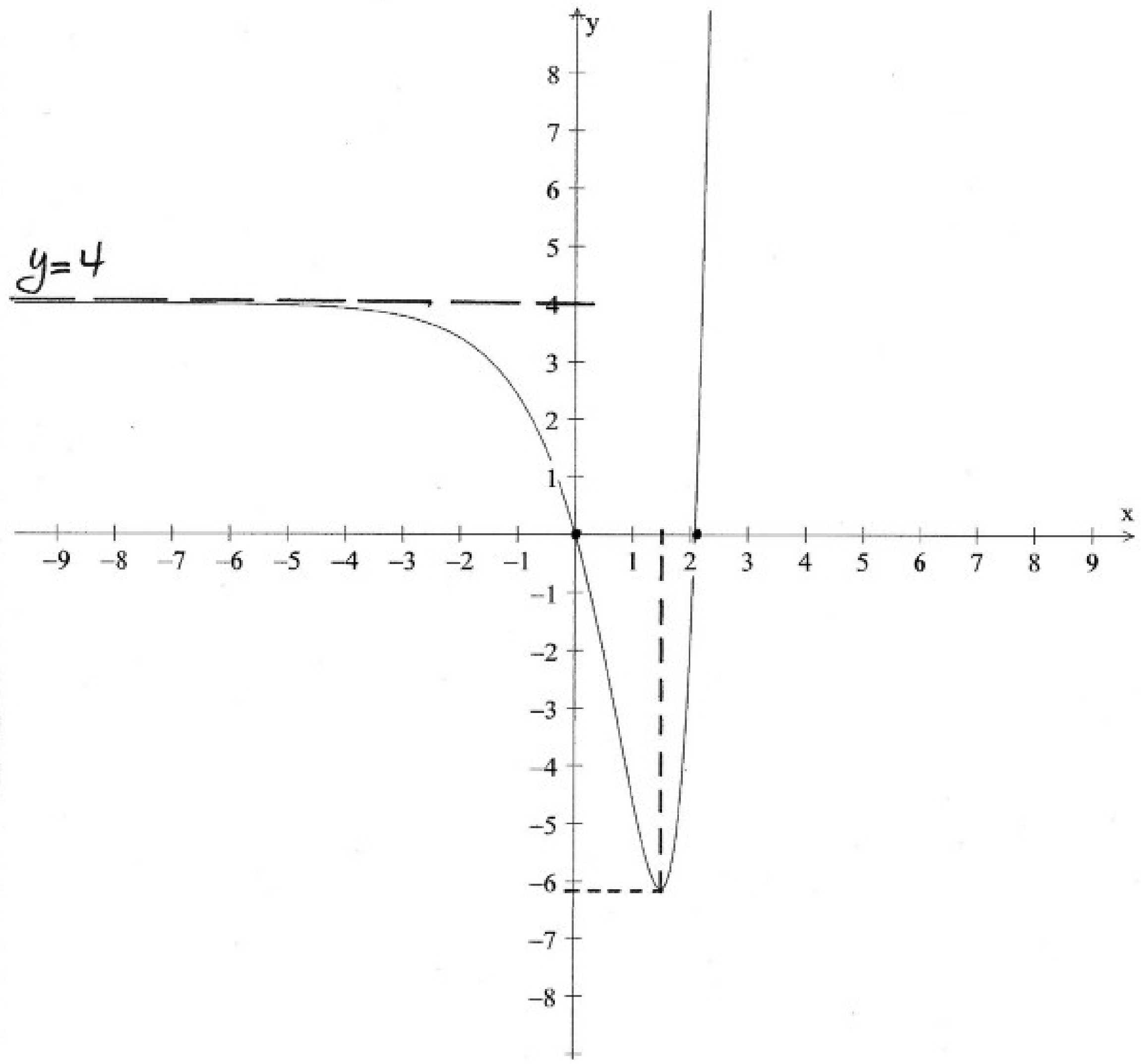
⑦ Points à tangente horizontale : On a $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^x(2e^x - 9) = 0 \Rightarrow 2e^x - 9 = 0$
puisque $e^x > 0$ pour toute valeur de $x \Rightarrow e^x = \frac{9}{2}$
$\Rightarrow x = \ln(\frac{9}{2}) \cong 1{,}5$
Avec $x = \ln(\frac{9}{2})$, on a $f(x) = \frac{1}{2}(e^{\ln(\frac{9}{2})} - 1)(e^{\ln(\frac{9}{2})} - 8) =$
$= \frac{1}{2}(\frac{9}{2} - 1)(\frac{9}{2} - 8) = -\frac{49}{8} = -6{,}125$.
Ainsi, l'unique point à tangente horizontale est $(\ln(\frac{9}{2}); -6{,}125)$

⑧ Tableau de Croissance:

x		$\ln\left(\frac{9}{2}\right)$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Ainsi f est décroissante sur $\left]-\infty; \ln\left(\frac{9}{2}\right)\right[$, atteint son minimum en $\left(\ln\left(\frac{9}{2}\right); -6,125\right)$ et est croissante sur $\left]\ln\left(\frac{9}{2}\right); +\infty\right[$.

⑨ Graphe: En utilisant les informations ci-dessus et en calculant quelques autres points, on peut construire le graphe de f:



Exercice 17

a) On doit avoir $x>0$.

$y=u\cdot v$ avec $u=x^2-4$ et $v=\ln(x)$. On a $u'=2x$ et $v'=\frac{1}{x}$.

Ainsi $y'=u'v+uv'=2x.\ln(x)+(x^2-4)\cdot\frac{1}{x}=2x\ln(x)+\frac{x^2-4}{x}$.

b) On doit avoir $x^2+1>0$, ce qui est vrai pour toute valeur de x.

On a $y'=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+1}$.

c) On doit avoir $-x>0$, c'est-à-dire $x<0$.

On a $y'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$.

d) On doit avoir $x>0$.

$y'=2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)}{x}$.

e) On doit avoir $x>0$.

$y'=3.2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x}=\frac{6\ln(x)-2}{x}$.

f) On doit avoir $x>0$.

$y'=1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$.

Exercice 18

On a : $f(x) = x \cdot \ln(x)$.

① Domaine de définition : Comme $\ln$ est défini sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\underline{\underline{D = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[}}$.

② Parité et périodicité : Comme $D = \mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

③ Asymptotes verticales : Le seul endroit où il pourrait y avoir une asymptote verticale est en $x=0$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \cdot \ln(x) = 0 \cdot (-\infty) = 0$, car $\ln(x)$ perd vis-à-vis de x.

Ainsi, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticale : Si une telle asymptote existe, c'est lorsque $x \to +\infty$.

Si elle existe, elle est de la forme $y = mx+h$, où $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, si m existe, $h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$,

on en déduit qu'il n'y a pas d'asymptote non verticale.

④ Intersections avec l'axe x : $f(x) = 0 \Rightarrow x \cdot \ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0$ puisque $x > 0$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ point $(1;0)$.

Intersection avec l'axe y : aucun puisque $x > 0$.

⑤ Tableau de signes :

x	////// 0		1	
$f(x)$	//////	$-$	0	$+$

⑥ Dérivée : $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\ln(x) + 1}}$.

⑦ Points à tangente horizontale : $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Avec $x = e^{-1}$, on a $f(x) = e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = e^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$.

L'unique point à tangente horizontale est donc

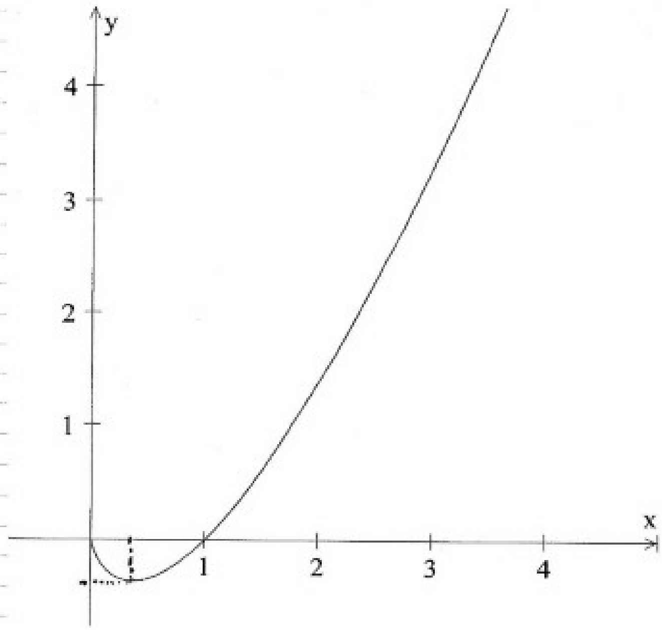
$\underline{\underline{\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right) \cong (0{,}37; -0{,}37)}}$.

⑧ Tableau de croissance :

x	////// 0		$1/e$	
$f'(x)$	//////	$-$	0	$+$
$f(x)$	//////	$\searrow$	min	$\nearrow$

Ainsi, f est décroissante sur $\left]0;\frac{1}{e}\right[$, atteint son minimum en $\left(\frac{1}{e};-\frac{1}{e}\right)$ et est croissante sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

9 Graphe :



Exercice 19

a) Tout d'abord, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

Zéros: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{4\ln^2(x)-5}{x}=0 \Rightarrow 4\ln^2(x)-5=0 \Rightarrow \ln^2(x)=\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow \ln(x) = \pm\sqrt{\dfrac{5}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$;

$\ln(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = e^{\sqrt{5}/2} \cong 3{,}06$;

$\ln(x) = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = e^{-\sqrt{5}/2} \cong 0{,}33$;

alors, les zéros de f sont $x \cong 0{,}33$ et $x \cong 3{,}06$.

Dérivée: On a $f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 4\ln^2(x)-5$ et $v=x$.

Comme $u' = 4\cdot 2\ln(x)\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{8\ln(x)}{x}$ et $v'=1$, on obtient

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{\frac{8\ln(x)}{x}\cdot x - (4\ln^2(x)-5)\cdot 1}{x^2} = \frac{8\ln(x)-4\ln^2(x)+5}{x^2}.$$

Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{8\ln(x)-4\ln^2(x)+5}{x^2}=0 \Rightarrow -4\ln^2(x)+8\ln(x)+5=0$.

On pose $u=\ln(x)$ et on obtient l'équation $-4u^2+8u+5=0$ dont les solutions sont $u = \dfrac{-8\pm\sqrt{64+80}}{-8} = \dfrac{-8\pm 12}{-8} = \begin{cases} \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-20}{-8} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Avec $u=-\dfrac{1}{2}$ et $u=\ln(x)$, on obtient $\ln(x) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \cong 0{,}61$.

Avec $u = \dfrac{5}{2}$ et $u=\ln(x)$, on obtient $\ln(x) = \dfrac{5}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{5}{2}} \cong 12{,}18$.

Avec $x = e^{-\frac{1}{2}}$, on a $f(x) = \dfrac{4\ln^2(e^{-1/2})-5}{e^{-1/2}} = \dfrac{4\cdot(-\frac{1}{2})^2-5}{e^{-1/2}} = \dfrac{1-5}{e^{-1/2}} =$

$= \dfrac{-4}{e^{-1/2}} = -4e^{1/2} \cong -6{,}6$.

Avec $x = e^{5/2}$, on a $f(x) = \dfrac{4\ln^2(e^{5/2})-5}{e^{5/2}} = \dfrac{4\cdot(\frac{5}{2})^2-5}{e^{5/2}} = \dfrac{25-5}{e^{5/2}} =$

$= \dfrac{20}{e^{5/2}} \cong 1{,}64$.

Les points à tangente horizontale sont donc $(0{,}61; -6{,}6)$ et $(12{,}18; 1{,}64)$.

b) Pour le point T, on a $x=1$. Comme $f(1) = \dfrac{4\ln^2(1)-5}{1} = \dfrac{4\cdot 0-5}{1} = -5$, les coordonnées de T sont $(1;-5)$.

L'équation de la tangente au graphe de f en $T(1;-5)$ est de la forme $y=mx+h$ où $m=f'(1)$.

D'après a), on a $f'(x) = \dfrac{8\ln(x)-4\ln^2(x)+5}{x^2}$. Comme $\ln(1)=0$, on obtient

$m = f'(x) = \dfrac{8 \cdot 0 - 4 \cdot 0^2 + 5}{1^2} = 5.$

L'équation de la tangente s'écrit donc $y = 5x + h$.

Avec le point $T(1; -5)$, par substitution, on a $-5 = 5 \cdot 1 + h \Rightarrow h = -10$.

Ainsi, l'équation de la tangente au graphe de f en T est $\underline{\underline{y = 5x - 10}}$.

Exercice 20

On a : $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$.

① Domaine de définition : Comme on divise par x, il faut que $x \neq 0$.
De plus, comme on a $\ln(x)$ dans la fonction, on doit avoir $x > 0$.
Ainsi $D =]0;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}_+^*$).

② Parité : Comme on doit avoir $x > 0$, on ne peut pas calculer $f(-x)$.
Ainsi f n'est ni paire, ni impaire.
Périodicité : Comme f n'a pas de fonctions trigonométriques, f n'est pas périodique.

③ Asymptotes verticales : Comme $D =]0;+\infty[$, il est possible que f ait une asymptote verticale au bord de son intervalle, i.e. en $x = 0$.
Calculons $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$ (on ne peut pas calculer $\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x)$ puisqu'on doit avoir $x > 0$).
Si $x = 0{,}000001$, on a $f(x) = -12815510{,}56$.
On conclut donc que $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$.
Ainsi $x = 0$ est une asymptote verticale et $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$.

Asymptote non verticale : Comme $D =]0;+\infty[$, il suffit de considérer le cas $x \longrightarrow +\infty$.
Comme f n'est pas une fonction rationnelle (polynôme sur polynôme), on va chercher $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, si m existe, $h = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.
Si m et h existe, alors $y = mx + h$ sera asymptote.
Si $x = 1'000'000$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{0{,}000014816}{1'000'000} = 1{,}48 \cdot 10^{-11}$.
Ainsi $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et donc m existe et vaut 0.

Si $x = 1'000'000$, on a $f(x) - mx = f(x) = 0{,}000014816$.
Ainsi $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = 0$ et donc $h = 0$.
On en conclut que $y = 0$ est asymptote horizontale à $+\infty$.

④ <u>Intersections avec l'axe x:</u> On pose $y=0$ et on résoud donc $f(x)=0$, i.e.

$$\frac{1+\ln(x)}{x}=0 \quad \Big| \cdot x$$
$$1+\ln(x)=0 \quad \Big| -1$$
$$\ln(x)=-1 \quad \Big| e^{\cdots}$$
$$x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Ainsi <u>f a un seul zéro en $x=\frac{1}{e}$</u> ($\cong 0{,}368$)

<u>Intersection avec l'axe y:</u> Comme $D=]0;+\infty[$, on a $x>0$. On devrait pouvoir poser $x=0$ et calculer $f(0)$, mais c'est exclu.
Par conséquent, <u>f ne coupe pas l'axe y.</u>

⑤ <u>Tableau de signes:</u> Le zéro de f est $x=\frac{1}{e}$. On a $D=]0;+\infty[$.
Le tableau de signes a donc la forme suivante:

x	0		$\frac{1}{e}$	
$f(x)$	//////	$-$	0	$+$

pour $x=0{,}1$, $f(x)=\frac{1+\ln(0{,}1)}{0{,}1}=-13{,}03<0$,

pour $x=1$, $f(x)=\frac{1+\ln(1)}{1}=1>0$.

Ainsi <u>$f<0$ sur $]0;\frac{1}{e}[$ et $f>0$ sur $]\frac{1}{e};+\infty[$.</u>

⑥ <u>Dérivée:</u> On a $f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x}=\frac{u}{v}$ avec $u=1+\ln(x)$ et $v=x$.

On a: $u'=\frac{1}{x}$ et $v'=1$.

Donc: $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln(x))\cdot 1}{x^2}=\frac{1-1-\ln(x)}{x^2}=$

$$=\frac{-\ln(x)}{x^2}.$$

⑦ <u>Points à tangente horizontale:</u> On doit résoudre $f'(x)=0$, i.e.

$$\frac{-\ln(x)}{x^2}=0 \quad \Big| \cdot x^2$$
$$-\ln(x)=0 \quad \Big| \cdot(-1)$$
$$\ln(x)=0 \quad \Big| e^{\cdots}$$
$$x=e^0=1$$

Ainsi <u>f' a un zéro en $x=1$.</u>

⑧ <u>Tableau de croissance:</u> f' a un zéro en $x=1$. $\mathcal{D} =]0;+\infty[$.

Le tableau de croissance se présente comme suit:

x	0		1	
$f'(x)$	//////	$+$	0	$-$
$f(x)$	//////	$\nearrow$	maximum	$\searrow$

pour $x = 0{,}5$, $f'(x) = \dfrac{-\ln(0{,}5)}{0{,}5^2} = 2{,}77 > 0$,

pour $x = 2$, $f'(x) = \dfrac{-\ln(2)}{2^2} = -0{,}17 < 0$.

On a $f(1) = \dfrac{1+\ln(1)}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Ainsi f est croissante sur $]0;1[$, décroissante sur $]1;+\infty[$ et a un maximum en $(1;1)$.

---

⑨ <u>Graphe:</u> En résumé, on a :

① $\mathcal{D} =]0;+\infty[$.

② f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

③ $x=0$ est asymptote verticale et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

$y=0$ est asymptote horizontale à $+\infty$.

④ $x = \dfrac{1}{e}$ est le zéro de f.

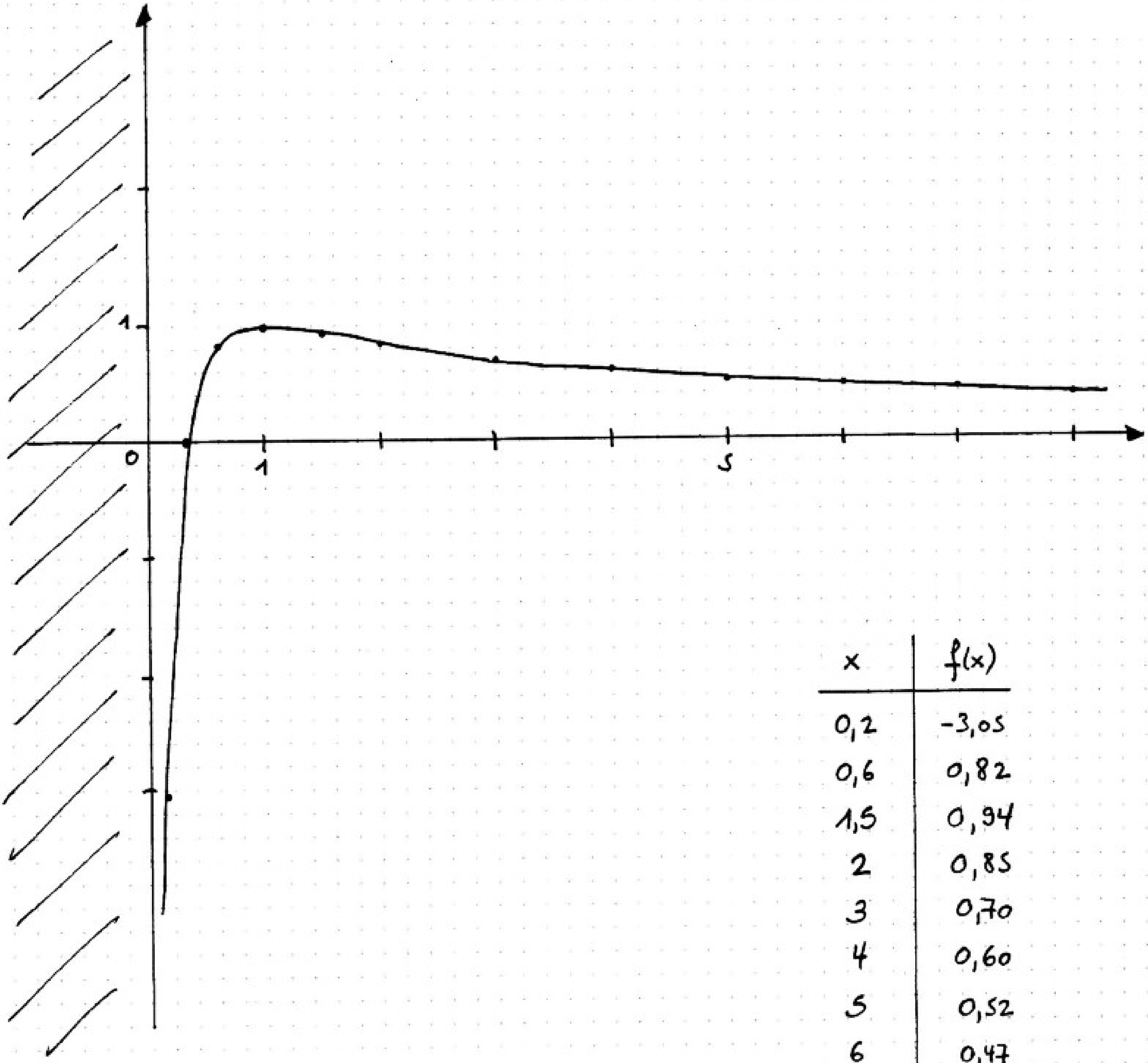
f ne coupe pas l'axe y.

⑤ $f<0$ sur $]0;\frac{1}{e}[$ et $f>0$ sur $]\frac{1}{e};+\infty[$.

⑦ $x=1$ est le zéro de f'.

⑧ f est croissante sur $]0;1[$, décroissante sur $]1;+\infty[$ et a un maximum en $(1;1)$.

Le graphe de f se présente donc comme suit:



x	f(x)
0,2	-3,05
0,6	0,82
1,5	0,94
2	0,85
3	0,70
4	0,60
5	0,52
6	0,47
7	0,42
8	0,38

Exercice 22

a) On a $f(x) = 2\ln(x)\cdot(\ln(x)-2)$.

① Domaine de définition: Comme $\ln(x)$ n'existe que pour $x>0$, on a $D = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

② Parité, périodicité: Comme $D = \mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

③ Asymptote verticale: On a $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2\ln(x)\cdot(\ln(x)-2) = 2\cdot(-\infty)\cdot(-\infty-2) =$
$= +\infty$.

Ainsi $x=0$ est une asymptote verticale lorsque $x \underset{>}{\to} 0$.

Asymptotes non verticales: Seul le cas $x\to+\infty$ est à considérer.

Si une asymptote non verticale existe, elle est de la forme $y = mx+h$, où $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, si m existe, $h = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx)$.

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)\cdot(\ln(x)-2)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$ car les ln perdent vis-à-vis de x. Ainsi, on a $m=0$.

On a $h = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par conséquent, il n'y a pas d'asymptote non verticale.

④ Intersections avec l'axe x: $f(x)=0 \Rightarrow 2\ln(x)\cdot(\ln(x)-2)=0$

$\Rightarrow$ soit $\ln(x)=0 \Rightarrow x=1$,

soit $\ln(x)-2=0 \Rightarrow \ln(x)=2 \Rightarrow x=e^2 \cong 7{,}39$.

$\Rightarrow (1;0)$ et $(7{,}39;0)$.

Intersection avec l'axe y: Aucune puisque $D = \mathbb{R}_+^*$.

⑤ Tableau de signes:

x	//// 0		1		7,39	
$f(x)$	////	$+$	0	$-$	0	$+$

⑥ Dérivée: On a $f(x) = u\cdot v$ avec $u = 2\ln(x)$ et $v = \ln(x)-2$.

Comme $u' = \frac{2}{x}$ et $v = \frac{1}{x}$, on a

$$f'(x) = u'v+uv' = \frac{2}{x}(\ln(x)-2) + 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{4}{x} + \frac{2\ln(x)}{x} =$$
$$= \frac{4\ln(x)}{x} - \frac{4}{x} = \frac{4\ln(x)-4}{x}.$$

⑦ Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4\ln(x)-4}{x} = 0 \Rightarrow 4\ln(x)-4=0$

$\Rightarrow 4\ln(x) = 4 \Rightarrow \ln(x)=1 \Rightarrow x = e^1 = e \cong 2{,}72$.

Avec $x = e$, on a $f(x) = 2\underbrace{\ln(e)}_{1} \cdot (\underbrace{\ln(e)}_{1} - 2) = 2 \cdot 1 \cdot (1-2) = -2$.

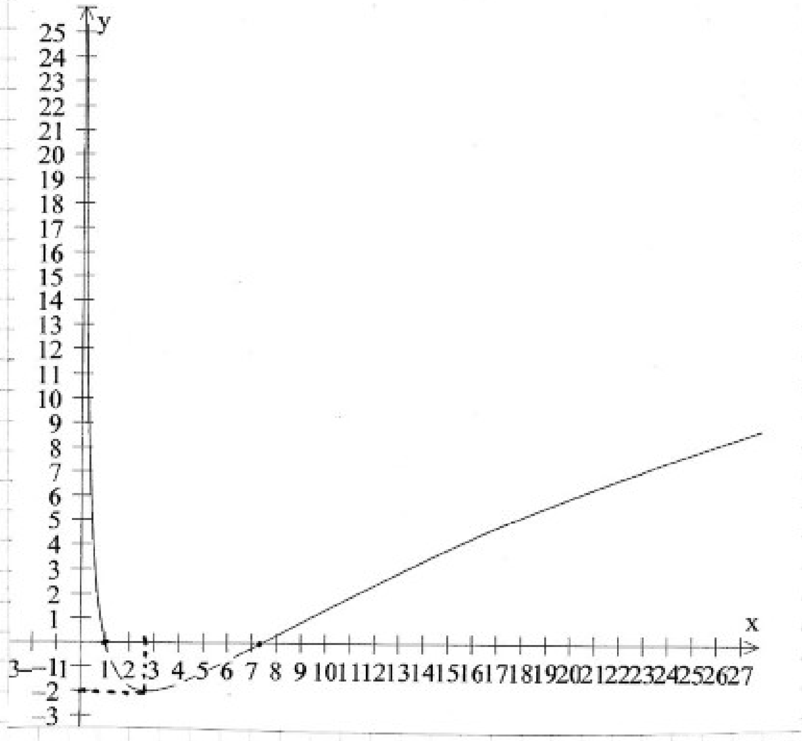
Ainsi, l'unique point à tangente horizontale est $\underline{\underline{(2{,}72\,;\,-2)}}$.

8) Tableau de croissance:

x	0		2,72	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Ainsi f est décroissante sur $]0;e[$, atteint son minimum en $(e;-2)$ et est croissante sur $]e;+\infty[$.

9) Graphe:



b) Pour le point T, avec $x = 1$, on a $f(x) = 2\underbrace{\ln(1)}_{0} \cdot (\underbrace{\ln(1)}_{0} - 2) = 0$. Ainsi, on a $T(1;0)$.

L'équation de la tangente en T est de la forme $y = mx + h$, où $m = f'(1)$.

D'après a), on a $f'(x) = \dfrac{4\ln(x) - 4}{x}$. Ainsi $m = \dfrac{4\ln(1) - 4}{1} = -4$.

L'équation de la tangente en T s'écrit donc $y = -4x + h$.

Avec $T(1;0)$, par substitution, on obtient $0 = -4 \cdot 1 + h \Rightarrow h = 4$.

L'équation de la tangente au graphe de f en T est donc $y = -4x + 4$.