Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 12

Mathématiques de niveau 1

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

Corrigé du TE

Exercice 1

a)

$$2^{3x-1} = 6 \qquad \Big|\ \log_2(\dots)$$

$$3x-1 = \log_2(6) \qquad \Big|\ \log_2(6) = \frac{\log(6)}{\log(2)}$$

$$3x-1 = \frac{\log(6)}{\log(2)} \qquad \Big|\ \log(6) = \log(2\cdot 3) = \log(2) + \log(3)$$

$$3x-1 = \frac{\log(2)+\log(3)}{\log(2)}$$

$$3x-1 = 1 + \frac{\log(3)}{\log(2)} \qquad \Big|\ +1$$

$$3x = 2 + \frac{\log(3)}{\log(2)} \qquad \Big|\ :3$$

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{3} + \frac{\log(3)}{3\log(2)} \cong 1,195}}$$

b) $\log(x^2-24) = 3 \Rightarrow x^2-24 = 10^3 \Rightarrow x^2-24 = 1000 \Rightarrow x^2 = 1024$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{1024} = \underline{\underline{\pm 32.}}$

Exercice 2

$f(x) = (2x+4)e^{-x}$.

Domaine de définition: On peut calculer f pour n'importe quelle valeur de x. Donc $D = \mathbb{R}$.

Parité: On a $f(-x) = (-2x+4)e^{x} \neq \pm f(x)$. Donc f n'est ni paire, ni impaire.

Périodicité: Seules les fonctions contenant des fonctions trigonométriques peuvent être périodiques.
Donc f n'est pas périodique.

Intersections avec l'axe x: $f(x) = 0 \Rightarrow (2x+4)e^{-x} = 0 \Rightarrow 2x+4 = 0$ car $e^{y} > 0$ pour tout y
$\Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$.
Donc f coupe l'axe x en $x = -2$.

Intersection avec l'axe y: $x = 0 \Rightarrow f(x) = (2 \cdot 0 + 4)e^{-0} = 4 \cdot 1 = 4$.
Donc f coupe l'axe y en $y = 4$.

Tableau de signes:

x		-2	
$f(x)$	$-$	0	$+$

Asymptotes verticales: Comme $D = \mathbb{R}$, f n'a pas d'asymptote verticale.

Asymptotes non verticales: Les fonctions contenant la fonction exponentielle n'ont pas d'asymptote oblique.
Donc f n'a pas d'asymptote oblique.

On a: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x+4)e^{-x} = \text{"} +\infty \cdot 0_+ \text{"}$; or, dans le cas d'une telle indéterminée, la fonction exponentielle gagne sur tout polynôme; ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0_+$.

De plus, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x+4)e^{-x} = \text{"} -\infty \cdot +\infty \text{"} = -\infty$.

Donc $y = 0$ est une asymptote horizontale à droite (à $+\infty$) et on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0_+$

Dérivée: $f(x) = (2x+4)e^{-x} = u \cdot v$ avec $u = 2x+4$ et $v = e^{-x}$.
$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ avec $u' = 2$ et $v' = -e^{-x}$.
Ainsi $f'(x) = 2e^{-x} + (2x+4)(-e^{-x}) = (2-2x-4)e^{-x} = (-2x-2)e^{-x} =$
$= -(2x+2)e^{-x}$.

Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow -(2x+2)e^{-x}=0 \Rightarrow 2x+2=0$, car $-e^{-y}<0$ pour toute valeur de $y \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$.

Pour $x=-1$, on a $f(x)=(-2+4)e^{1}=2e$.

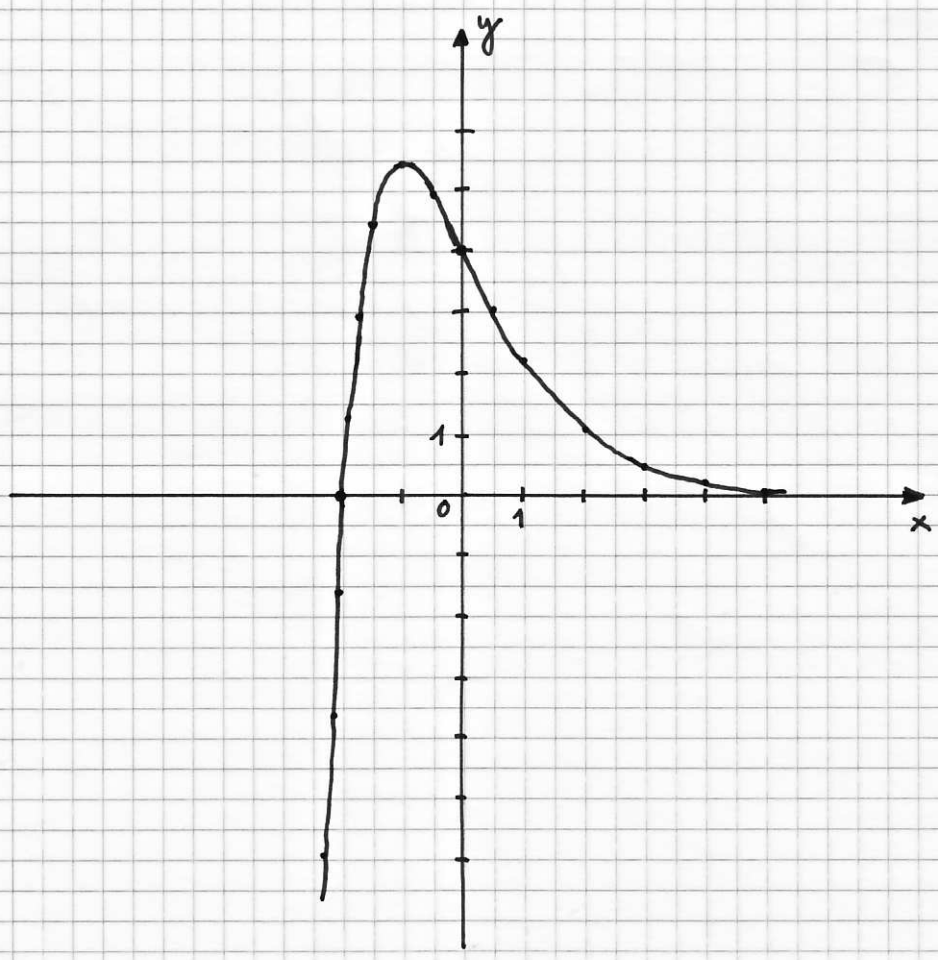
Donc, l'unique point à tangente horizontale de f est $(-1;2e)$.

Tableau de croissance:

x		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Ainsi f est croissante sur $]-\infty;-1[$, atteint son maximum en $x=-1$ (avec $f(-1)=2e$) et est décroissante sur $]-1;+\infty[$.

Graphe:



Exercice 3

$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$

a) Les points à tangente horizontale sont les $(x;y)$ tels que $f'(x)=0$ et $y=f(x)$.

On a $f'(x) = 2x - 8\cdot\frac{1}{x} = 2x - \frac{8}{x}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x - \frac{8}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Avec $x=2$, on a $f(x) = 2^2 - 8\ln(2) = 4 - 8\ln(2)$.

Avec $x=-2$, on ne peut pas calculer $f(x)$, puisque son domaine de définition est $D = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ ($\ln(x)$ n'existe que pour $x>0$).

Ainsi $\underline{\underline{\text{le point à tangente horizontale est } (2;\ 4-8\ln(2))}}$.

b) L'équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x=1$ est de la forme $y=mx+h$, où $m=f'(1)$. De plus le point $(1;f(1))$ appartient à la tangente.

D'après a), on a $f'(x) = 2x - \frac{8}{x}$.

Ainsi $m = f'(1) = 2-8 = -6$.

L'équation de la tangente s'écrit donc $y=-6x+h$.

On a : $f(1) = 1^2 - 8\cdot\ln(1) = 1 - 8\cdot 0 = 1$.

En substituant $x=1$ et $y=f(1)=1$ dans l'équation de la tangente, on obtient

$1 = -6\cdot 1 + h \Rightarrow 1 = -6 + h \Rightarrow h = 7$.

$\underline{\underline{\text{L'équation de la tangente est donc } y=-6x+7 \text{ ou } 6x+y-7=0.}}$