STATISTIQUES ET PROBABILITES

Corrigé des exercices

Exercice 1

Après 10 lancers:
P apparaît 5 fois sur les 10 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{5}{10} = \underline{\underline{0{,}5 = 50\%}}$.
F apparaît 5 fois sur les 10 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{5}{10} = \underline{\underline{0{,}5 = 50\%}}$.

Après 20 lancers:
P apparaît 10 fois sur les 20 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{10}{20} = \underline{\underline{0{,}5 = 50\%}}$.
F apparaît 10 fois sur les 20 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{10}{20} = \underline{\underline{0{,}5 = 50\%}}$.

Après 30 lancers:
P apparaît 13 fois sur les 30 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{13}{30} \cong \underline{\underline{0{,}4333 = 43{,}33\%}}$
F apparaît 17 fois sur les 30 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{17}{30} \cong \underline{\underline{0{,}5667 = 56{,}67\%}}$

Après 40 lancers:
P apparaît 20 fois sur les 40 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{20}{40} = \underline{\underline{0{,}5 = 50\%}}$
F apparaît 20 fois sur les 40 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{20}{40} = \underline{\underline{0{,}5 = 50\%}}$

Après 50 lancers:
P apparaît 26 fois sur les 50 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{26}{50} = \underline{\underline{0{,}52 = 52\%}}$
F apparaît 24 fois sur les 50 $\Rightarrow$ fréquence $= \frac{24}{50} = \underline{\underline{0{,}48 = 48\%}}$

Exercice 2

a)

	1	2	3	4	5	6	Somme des fréquences
600	13,7%*	21,7%	17,7%	15,3%	17,7%	14,0%	100,1%
6000	15,9%**	17,6%	17,1%	17,1%	16,4%	16,0%	100,1%
60'000	16,5%	16,6%	16,5%	17,0%	17,0%	16,4%	100%
120'000	16,5%	16,7%	16,5%	16,9%	16,8%	16,6%	100%

* on a $\frac{82}{600} = 0,13\overline{6} = 13,\overline{6}\ \% \cong 13,7$ pour 3 chiffres significatifs.

** on a $\frac{953}{6000} = 0,1588\overline{3} = 15,88\overline{3} \cong 15,9$ pour 3 chiffres significatifs.

b) A = "obtenir un nombre pair" = "2 ou 4 ou 6".

Fréquence de A $= \frac{1053 + 1028 + 957}{6000} = \underline{\underline{50,6\ \%}}$.

B = "obtenir un nombre plus grand que 3" = "4 ou 5 ou 6".

Fréquence de B $= \frac{1028 + 982 + 957}{6000} = \underline{\underline{49,5\%}}$.

A et B = "4 ou 6".

Fréquence de (A et B) $= \frac{1028 + 957}{6000} = \underline{\underline{33,1\%}}$.

A ou B = "2 ou 4 ou 5 ou 6".

Fréquence de (A ou B) $= \frac{1053 + 1028 + 982 + 957}{6000} = \underline{\underline{67,0\%}}$.

Fréquence de (A ou B) $= \frac{1053 + 1028 + 982 + 957}{6000} = \frac{1053}{6000} + \frac{1028 + 982 + 957}{6000} =$

$= \frac{1053}{6000}$ + fréquence de B $= \frac{1053 + 1028 + 957}{6000} - \frac{1028 + 957}{6000}$ + fréquence de B =

= fréquence de A − fréquence de (A et B) + fréquence de B.

Donc: <u>fréquence de (A ou B) = fréquence de A + fréquence de B − fréquence de (A et B).</u>

Exercice 3

La probabilité cherchée est $\dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$.

On a : nb de cas favorables = nb de plaques qui commencent par 1 ;

plaques à 1 chiffre : 1 plaque qui commence par 1 ;

plaques à 2 chiffres : 10 plaques qui commencent par 1 (10, 11, 12, 13, ..., 19) ;

plaques à 3 chiffres : 100 plaques qui commencent par 1 (100, 101, 102, ..., 199) ;

plaques à 4 chiffres : 1000 plaques qui commencent par 1 ;

plaques à 5 chiffres : 10'000 plaques qui commencent par 1 ;

ainsi nb de cas favorables = 1 + 10 + 100 + 1000 + 10'000 = 11'111.

De plus : nb de cas possibles = nb de plaques total = 40'000.

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{11'111}{40'000} = \underline{\underline{0{,}277775 \cong 27{,}78\,\%}}$.

Exercice 4

Les probabilités s'expriment par $\dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$.

Ici, on lance 2 dés. Le nombre de cas possibles est $6 \cdot 6 = 36$.

a) nb de cas favorables = 2 ("3-5" ou "5-3")

$\Rightarrow$ probabilité $= \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18} \cong 5{,}56\,\%$.

b) nb de cas favorables = 1 ("3-3")

$\Rightarrow$ probabilité $= \dfrac{1}{36} \cong 2{,}78\,\%$.

c) nb de cas favorables = 6 ("1-1", "2-2", "3-3", ..., "6-6")

$\Rightarrow$ probabilité $= \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \cong 16{,}7\,\%$.

d) nb de cas favorables = 5 ("2-6", "3-5", "4-4", "5-3", "6-2")

$\Rightarrow$ probabilité $= \dfrac{5}{36} \cong 13{,}9\,\%$

Exercice 5

Les probabilités s'expriment par $\frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$.

On a noté : T = trèfle, P = pique, Co = coeur et Ca = carreau.

Les cas possibles pour les 2 cartes reçues par A sont :

TP	PCo
PT	CoP
TCo	PCa
CoT	CaP
TCa	CoCa
CaT	CaCo

$\longrightarrow$ total : 12.

a) Les cas favorables sont : TP, PT, PCo, CoP, PCa, CaP $\longrightarrow$ total : 6

$\Longrightarrow$ probabilité $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \underline{\underline{50\%}}$.

b) Les cas favorables sont : TP, PT $\longrightarrow$ total : 2

$\Longrightarrow$ probabilité $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \cong \underline{\underline{16,7\%}}$.

c) On doit calculer une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Ici : A = posséder les 2 as noirs et B = posséder l'as de pique

On a : $A\cap B$ = posséder les 2 as noirs et posséder l'as de pique = posséder les 2 as noirs.

Les cas favorables pour $A\cap B$ sont : TP, PT $\longrightarrow$ total : 2.

Ainsi $P(A\cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Les cas favorables pour B sont : TP, PT, CoP, PCo, CaP, PCa $\longrightarrow$ total : 6.

Ainsi $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

La probabilité cherchée est ainsi : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cong 33,3\%}}$.

d) On doit calculer une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Ici : A = posséder l'as de pique et B = posséder au moins l'un des 2 as noirs.

On a : $A\cap B$ = posséder l'as de pique et posséder au moins l'un des 2 as noirs = posséder l'as de pique.

Les cas favorables pour $A\cap B$ sont : TP, PT, CoP, PCo, CaP, PCa $\longrightarrow$ total : 6.

Ainsi $P(A\cap B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Les cas favorables pour B sont : TP, PT, TCo, CoT, TCa, CaT, PCo, CoP, PCa, CaP $\longrightarrow$ total : 10.

Ainsi $P(B) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

La probabilité cherchée est ainsi : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/2}{5/6} = \frac{1}{2} : \frac{5}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5} = \underline{\underline{\frac{3}{5} = 60\%}}$.

Exercice 6

a) Aucun 3 et aucun 5 : 1^{er} jet : prob $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2^e jet : prob $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3^e jet : prob $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est donc $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \cong 30{,}6\%$.

b) Deux 6 et un 1 : 661 ou 616 ou 166

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est : $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72} \cong 1{,}39°$

c) Trois nombres impairs : les cas favorables sont :

111, 113, 131, 311, 115, 151, 511,
133, 313, 331, 155, 515, 551, 135, 153,
315, 513, 351, 531, 333, 335, 353, 533,
355, 535, 553 et 555 $\rightarrow$ total : 27

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est : $27 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$.

d) Deux nombres impairs et un nombre pair : les cas favorables sont :

11•, 1•1, •11 (le • représente un des 3 nombres pairs),
13•, 1•3, •13, 31•, 3•1, •31,
15•, 1•5, •15, 51•, 5•1, •51,
35•, 3•5, •35, 53•, 5•3, •53,
33•, 3•3, •33, 55•, 5•5 et •55

$\rightarrow$ total : $27 \cdot 3 = 81$

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est : $81 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$.

e) Pas plus d'une fois le trois : cherchons le nb de cas où on obtient plus d'une fois le 3 :

33•, 3•3, •33 (le • représente un des 5 chiffres autres que 3),
333 $\rightarrow$ total : $5+5+5+1 = 16$;

$\Rightarrow$ la probabilité d'obtenir plus d'une fois le 3 est :

$16 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est : $1 - \frac{2}{27} = \frac{25}{27} \cong 92{,}6\%$

f) Obtenir au moins une fois le 3 : cherchons le nb de cas où on n'obtient aucun 3 :

• • • où le • représente un des 5 chiffres autres que 3

$\rightarrow$ total : $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$\Rightarrow$ la probabilité d'obtenir zéro 3 est $\frac{125}{216}$.

$\Rightarrow$ la probabilité d'obtenir au moins un 3 est $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \cong 42{,}13\%$.

Exercice 7

a) $prob(\text{au moins un } 6) = 1 - prob(\text{zéro } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ ($\frac{5}{6}$ est la probabilité d'obtenir autre chose que 6 sur un lancer ; sur 10 lancers, cette probabilité vaut $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$. Donc $prob(\text{au moins un } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \cong \underline{\underline{83{,}85\,\%}}$.

b) $prob(\text{au moins un } 6) > 99\,\% = 0{,}99$

$\Longrightarrow 1 - prob(\text{zéro } 6) > 0{,}99$

$\Longrightarrow prob(\text{zéro } 6) < 0{,}01$

$\Longrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}01$, où le n est le nb de fois qu'on lance le dé.

Commençons par résoudre $\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}01$:

$$\begin{array}{rcl|l} \left(\frac{5}{6}\right)^n &=& 0{,}01 & \log(\ldots) \\ \log\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) &=& \log(0{,}01) & \text{propriété des log} \\ n \cdot \log\left(\frac{5}{6}\right) &=& \log(0{,}01) & : \log\left(\frac{5}{6}\right) \\ n &=& \frac{\log(0{,}01)}{\log(5/6)} \cong 25{,}26 & \end{array}$$

Ainsi, pour que la probabilité cherchée soit supérieure à 99 %, il faut lancer le dé $\underline{\underline{26 \text{ fois}}}$ $\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{26} \cong 99{,}13\,\%, \text{ alors que } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{25} \cong 98{,}95\,\%\right)$.

c) $prob(\text{au moins une "face"}) > 999\,‰ = 0{,}999$

$\Longrightarrow 1 - prob(\text{zéro "face"}) > 0{,}999$

$\Longrightarrow prob(\text{zéro "face"}) < 0{,}001$

$\Longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}001$, où le n est le nb de fois qu'on lance la pièce (le nb $\frac{1}{2}$ correspond à obtenir pile à chaque fois = 1 chance sur 2).

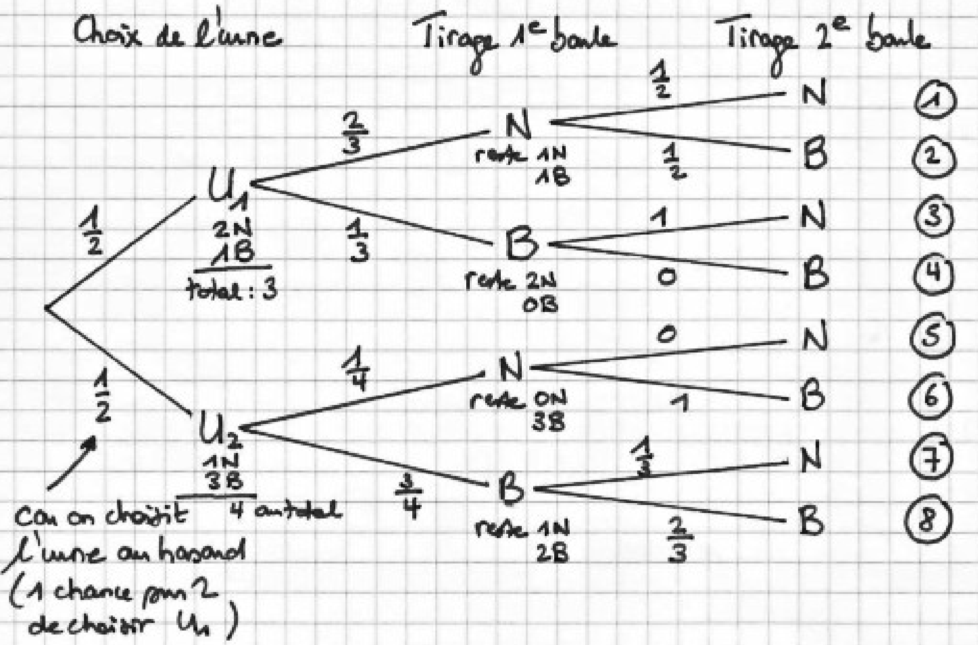
Résolvons $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}001$:

$$\begin{array}{rcl|l} \left(\frac{1}{2}\right)^n &=& 0{,}001 & \log(\ldots) \\ \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) &=& \log(0{,}001) & \text{propriété des log} \\ n \log\left(\frac{1}{2}\right) &=& \log(0{,}001) & : \log\left(\frac{1}{2}\right) \\ n &=& \frac{\log(0{,}001)}{\log(1/2)} \cong 9{,}97 & \end{array}$$

Ainsi, pour que la probabilité cherchée soit supérieure à 999 ‰, il faut lancer la pièce $\underline{\underline{10 \text{ fois}}}$ $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cong 999{,}02\,‰ \text{ et } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cong 998{,}05\,‰\right)$.

Exercice 8

N = boule noire, B = boule blanche



a) Cela correspond aux chemins 1, 3, 5, 7 :

prob 1 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

prob 3 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$;

prob 5 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$;

prob 7 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$.

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{11}{24} \cong 45{,}83\%}}$.

b) Cela correspond aux chemins 1, 4, 5 et 8 :

prob 1 $= \frac{1}{6}$ (voir a)) ;

prob 4 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$;

prob 5 $= 0$ (voir a)) ;

prob 8 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est $\frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{12} \cong 41{,}67\%}}$.

c) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ici A = tirer une boule noire au 2e tirage et B = 1ère boule était blanche.

On a $A \cap B$ = 1ère boule blanche et 2e boule noire (chemins 3 et 7).

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}.$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24}.$$

Ainsi $P(A|B) = \frac{7/24}{13/24} = \frac{7}{24} : \frac{13}{24} = \frac{7}{24} \cdot \frac{24}{13} = \underline{\underline{\frac{7}{13} \cong 53{,}85\%}}$.

d) C'est aussi une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Ici : A = avoir extrait les boules de U_1 et B = 2e boule est noire.

On a $A\cap B$ = boules tirées de U_1 et 2e boule noire (chemins 1 et 3).

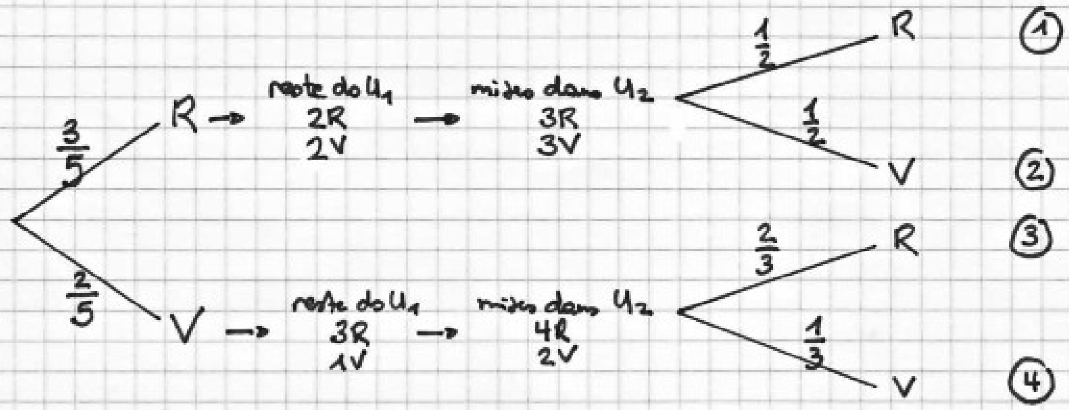
$P(A\cap B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

$P(B) = \frac{11}{24}$ (voir a)).

Ainsi $P(A|B) = \frac{1/3}{11/24} = \frac{1}{3} : \frac{11}{24} = \frac{1}{3}\cdot\frac{24}{11} = \underline{\underline{\frac{8}{11} \cong 72{,}73\%}}$.

Exercice 9

1er tirage



a) Cela correspond aux chemins 1 et 3.

$\Rightarrow$ la probabilité est : $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\underline{\underline{\frac{17}{30}\cong 56{,}67\,\%}}$.

b) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Ici : A = 2e boule est rouge et B = 1e boule était rouge.

$A\cap B$ = les 2 boules sont rouges (chemin 1).

$P(A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$.

$P(B)=\frac{3}{5}$.

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est $P(A|B)=\frac{3/10}{3/5}=\frac{3}{10}:\frac{3}{5}=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{2}=50\%}}$.

c) C'est aussi une probabilité conditionnelle : $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Ici : A = 1e boule était rouge et B = 2e boule est rouge.

$A\cap B$ = les 2 boules sont rouges.

$P(A\cap B)=\frac{3}{10}$ (voir b)).

$P(B)=\frac{17}{30}$ (voir a)).

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est $P(A|B)=\frac{3/10}{17/30}=\frac{3}{10}:\frac{17}{30}=\frac{3}{10}\cdot\frac{30}{17}=\underline{\underline{\frac{9}{17}\cong 52{,}94\%}}$.

Exercice 10

Commençons par chercher les probabilités d'obtenir les faces du dé pipé.

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow \text{prob} = x \\ 2 \longrightarrow \text{prob} = x \\ 3 \longrightarrow \text{prob} = x \\ 4 \longrightarrow \text{prob} = x \\ 5 \longrightarrow \text{prob} = x \\ 6 \longrightarrow \text{prob} = 2x \quad + \\ \hline \quad\;\; \text{total} = 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad 7x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{7}$$

a) On a lancé 6 fois le dé et on a donc obtenu $\overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 6$, où $\overline{6}$ désigne un résultat autre que 6 (1, 2, 3, 4 ou 5).

La probabilité d'obtenir $\overline{6} = \frac{5}{7}$ ($5 \cdot x$ ci-dessus).

Ainsi la probabilité d'obtenir $\overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 6$ est

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} =$$

$$= \left(\frac{5}{7}\right)^5 \cdot \frac{2}{7} \cong \underline{\underline{5{,}31\,\%.}}$$

b) Ici, il y a plus de possibilité, on peut avoir :

$$\begin{array}{lll} \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 6, 6 & \longrightarrow \text{prob} = \left(\frac{5}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 & \cong 0{,}0212 \\ 6, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 6, 6 & \longrightarrow \text{prob} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 & \cong 0{,}0085 \\ \overline{6}, 6, \overline{6}, \overline{6}, 6, 6 & \longrightarrow \text{prob} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 & \cong 0{,}0085 \\ \overline{6}, \overline{6}, 6, \overline{6}, 6, 6 & \longrightarrow \text{prob} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 & \cong 0{,}0085 \\ 6, \overline{6}, 6, \overline{6}, 6, 6 & \longrightarrow \text{prob} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^4 & \cong 0{,}0034 \\ \hline & \text{total} & \cong 0{,}05015 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ la probabilité cherchée est $\sim \underline{\underline{5{,}015\,\%.}}$

c) prob (au moins un 6) $> 0{,}9$

$\Longrightarrow 1 - \text{prob}(\text{zéro } 6) > 0{,}9$

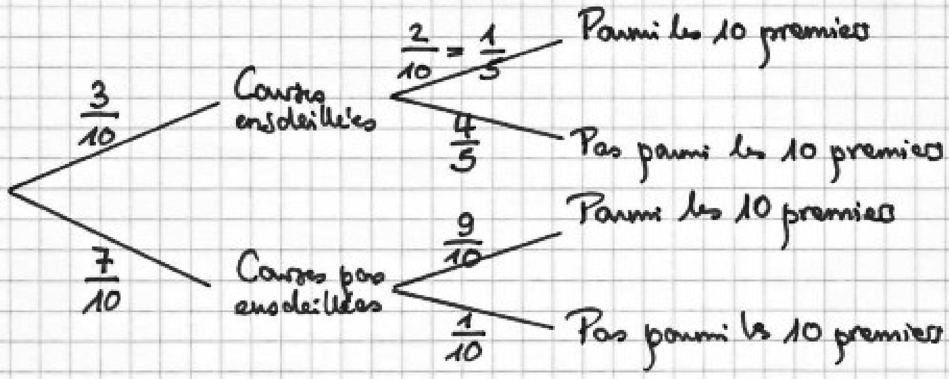
$\Longrightarrow \text{prob}(\text{zéro } 6) < 0{,}1 \Longrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^n < 0{,}1.$

On a $\left(\frac{5}{7}\right)^n \; 0{,}1 \Longrightarrow \log\left(\left(\frac{5}{7}\right)^n\right) = \log(0{,}1) \Longrightarrow n \log\left(\frac{5}{7}\right) = \log(0{,}1)$

$\Longrightarrow n = \frac{\log(0{,}1)}{\log(5/7)} \cong 6{,}84$

$\Longrightarrow$ <u>il faut lancer 7 fois le dé.</u>

Exercice 11



C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

On a: A = course pas ensoleillée et B = Parmi les 10 premiers ;

$A \cap B$ = course pas ensoleillée et parmi les 10 premiers ;

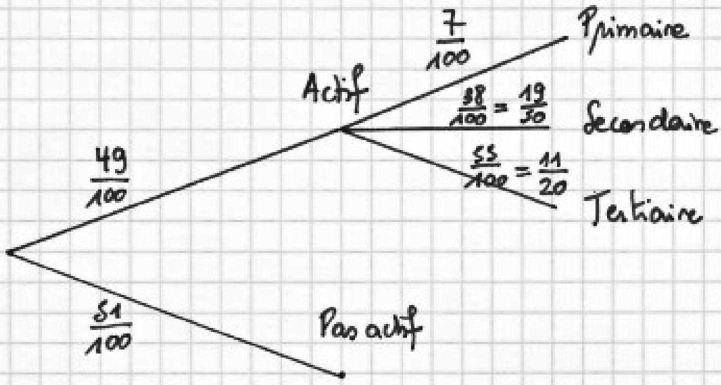
$P(A\cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{63}{100}$;

$P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{50} + \frac{63}{100} = \frac{69}{100}$.

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est $P(A|B) = \dfrac{63/100}{69/100} = \frac{63}{100} : \frac{69}{100} = \frac{63}{100} \cdot \frac{100}{69} = \frac{63}{69} =$

$= \underline{\underline{\frac{21}{23} \cong 91{,}3\ \%}}$.

Exercice 12



1. a) $\text{prob} = \frac{49}{100} \cdot \frac{11}{20} = \underline{\underline{26,95\%}}$.

   b) $\text{prob (pas ds le primaire)} = 1 - \text{prob (ds le primaire)} = 1 - \frac{49}{100} \cdot \frac{7}{100} = \underline{\underline{96,57\%}}$.

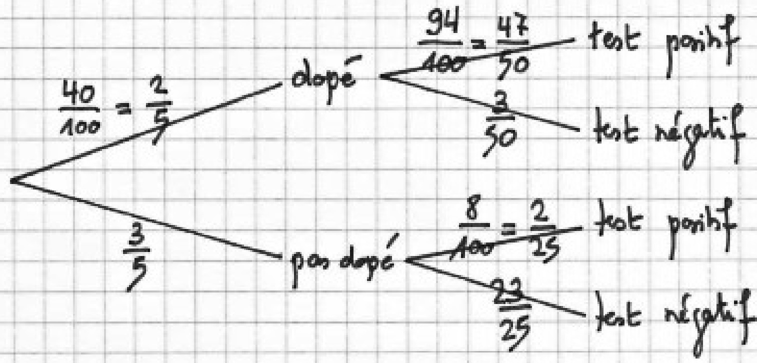
2. a) $\text{prob} = \frac{49}{100} \cdot \frac{49}{100} = \underline{\underline{24,01\%}}$.

   b) $\text{prob} = \frac{49}{100} \cdot \frac{51}{100} \text{ (la 1}^{e}\text{ travaille)} + \frac{51}{100} \cdot \frac{49}{100} \text{ (la 2}^{e}\text{ travaille)} = \underline{\underline{49,98\%}}$.

3. a) $\text{prob} = \left(\frac{49}{100} \cdot \frac{11}{20}\right)^3 \cong \underline{\underline{1,96\%}}$.

   b) $\text{prob} = \left(\frac{49}{100} \cdot \frac{11}{20}\right)^3 \text{ (tertiaire)} + \left(\frac{49}{100} \cdot \frac{19}{50}\right)^3 \text{ (secondaire)} + \left(\frac{49}{100} \cdot \frac{7}{100}\right)^3 \text{ (primaire)} \cong \underline{\underline{2,61\%}}$.

Exercice 13



A) A1) $\text{prob} = \frac{3}{5}\cdot\frac{23}{25} = \frac{69}{125} = \underline{\underline{55{,}2\,\%}}.$

A2) $\text{prob} = \frac{2}{5}\cdot\frac{47}{50} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{25} = \frac{53}{125} = \underline{\underline{42{,}4\,\%}}.$

A3) C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

On a: A = sportif pas dopé et B = test positif;

$A\cap B$ = sportif pas dopé et test positif;

$P(A\cap B) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{25} = \frac{6}{125}$;

$P(B) = \frac{53}{125}$ (voir A2)).

$\Rightarrow$ la probabilité cherchée est $P(A|B) = \frac{6/125}{53/125} = \frac{6}{125} : \frac{53}{125} = \frac{6}{125}\cdot\frac{125}{53} = \frac{6}{53} \cong \underline{\underline{11{,}32\,\%}}.$

A4) prob = prob (dopé et test négatif) + prob (pas dopé et test positif) =

$= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{50} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{25} = \frac{6}{250} + \frac{6}{125} = \frac{9}{125} = \underline{\underline{7{,}2\,\%}}.$

B) B1) probabilité test positif sur un sportif $= \frac{53}{125}$ (voir A2)).

probabilité test négatif sur un sportif $= 1 - \frac{53}{125} = \frac{72}{125}$.

On peut avoir: positif-positif-négatif, positif-négatif-positif, négatif-positif-positif.

La probabilité cherchée est ainsi $3\cdot\frac{53}{125}\cdot\frac{53}{125}\cdot\frac{72}{125} \cong \underline{\underline{31{,}07\,\%}}.$

B2) prob (au moins un test positif) = 1 − prob (zéro test positif) =

$= 1 - \left(\frac{72}{125}\right)^3 \cong \underline{\underline{80{,}89\,\%}}.$

Exercice 14

a) $\text{prob} = \underset{\text{le } 1}{\frac{1}{6}} \cdot \underset{\text{le } 2}{\frac{1}{6}} \cdot \underset{\text{le } 3}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{216} \cong \underline{\underline{0{,}463\%}}.$

b) on peut avoir 123, 132, 213, 231, 312, 321 (= 6 possibilités)

$\Rightarrow \text{prob} = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \cong \underline{\underline{2{,}78\%}}.$

c) on peut avoir 1122, 1212, 2112, 1221, 2121, 2211 (= 6 possibilités)

$\Rightarrow \text{prob} = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \cong \underline{\underline{0{,}463\%}}.$

d) on peut avoir 11.., 1.1., .11., 1..1, .1.1, ..11, où le . signifie une des autres faces que 1 (2,3,4,5 ou 6)

$\Rightarrow \text{prob} = 6 \cdot \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}_{\text{le } 1} \cdot \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}}_{\text{autre chose que } 1} = \frac{25}{216} = \underline{\underline{11{,}57\%}}.$

Exercice 15

On utilise la loi binomiale : $P(X=k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$, où n est le nb total d'expériences et p est la probabilité que X se réalise lors d'une expérience. $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est aussi noté $\binom{n}{k}$.

a) Ici $n = 10$, p = probabilité d'obtenir un "6" $= \frac{1}{6}$, X = nb de "6" obtenus.

$$P(X=0) = C_0^{10}\left(\tfrac{1}{6}\right)^0\left(1-\tfrac{1}{6}\right)^{10-0} = 1\cdot 1\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^{10} \cong \underline{\underline{16,15\%}}.$$

$$P(X=1) = C_1^{10}\left(\tfrac{1}{6}\right)^1\left(1-\tfrac{1}{6}\right)^{10-1} = 10\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^9 \cong \underline{\underline{32,30\%}}.$$

$$P(X=2) = C_2^{10}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(1-\tfrac{1}{6}\right)^{10-2} = 45\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^8 \cong \underline{\underline{29,07\%}}.$$

$$P(X=3) = C_3^{10}\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\left(1-\tfrac{1}{6}\right)^{10-3} = 120\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^7 \cong \underline{\underline{15,50\%}}.$$

$$P(X=4) = C_4^{10}\left(\tfrac{1}{6}\right)^4\left(1-\tfrac{1}{6}\right)^{10-4} = 210\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^6 \cong \underline{\underline{5,43\%}}.$$

$$P(X=k) = C_k^{10}\left(\tfrac{1}{6}\right)^k\left(1-\tfrac{1}{6}\right)^{10-k} = C_k^{10}\,\frac{1}{6^k}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} = C_k^{10}\,\frac{1}{6^k}\,\frac{5^{10-k}}{6^{10-k}} =$$

$$= \underline{\underline{C_k^{10}\,\frac{5^{10-k}}{6^{10}}}}.$$

b) La probabilité est $C_k^n\, p^k\, (1-p)^{n-k}$

C_k^n : le nb de fois que l'on peut combiner k événements parmi n

p^k : probabilité d'obtenir k fois l'événement de probabilité p

$(1-p)^{n-k}$: probabilité d'obtenir (n−k) fois l'événement de probabilité (1−p).

c) Ici $n = 10$, p = probabilité d'obtenir une "pile" $= \frac{1}{2}$, X = nb de "piles" obtenus.

$$P(X=5) = C_5^{10}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{10-5} = C_5^{10}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = C_5^{10}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}C_5^{10}$$

$$\cong \underline{\underline{24,61\%}}.$$

Exercice 16

C'est une loi binomiale : $P(X=k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k}$.

Ici X = nb de garçons, $n=5$, $p=\frac{1}{2}$. On a :

$$P(X=k) = C_k^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-k} = C_k^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = C_k^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \underline{\underline{\frac{1}{32} C_k^5}}.$$

Ainsi :

$$P(X=0) = \frac{1}{32} C_0^5 = \frac{1}{32} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{32}}}.$$

$$P(X=1) = \frac{1}{32} C_1^5 = \frac{1}{32} \cdot 5 = \underline{\underline{\frac{5}{32}}}.$$

$$P(X=2) = \frac{1}{32} C_2^5 = \frac{1}{32} \cdot 10 = \underline{\underline{\frac{5}{16}}}.$$

$$P(X=3) = \frac{1}{32} C_3^5 = \frac{1}{32} \cdot 10 = \underline{\underline{\frac{5}{16}}}.$$

$$P(X=4) = \frac{1}{32} C_4^5 = \frac{1}{32} \cdot 5 = \underline{\underline{\frac{5}{32}}}.$$

$$P(X=5) = \frac{1}{32} C_5^5 = \frac{1}{32} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{32}}}.$$

On vérifie que $\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{5}{16} + \frac{5}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = 1.$

Exercice 17

On utilise la loi binomiale : $P(X=k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k}$.

Ici X = nb de faces obtenues, $n=5$ lancers, $p = \frac{4}{9}$ (4 fois face sur 9 lancers).

a) $P(X=1) = C_1^5 \left(\frac{4}{9}\right)^1 \left(1-\frac{4}{9}\right)^{5-1} = 5 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4 \cong \underline{\underline{21,17\%}}.$

b) $P(X=3) = C_3^5 \left(\frac{4}{9}\right)^3 \left(1-\frac{4}{9}\right)^{5-3} = 10 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cong \underline{\underline{27,10\%}}.$

c) $P(\text{plus de faces que de piles sur les 5 lancers}) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$

$$= C_3^5 \left(\frac{4}{9}\right)^3 \left(1-\frac{4}{9}\right)^2 + C_4^5 \left(\frac{4}{9}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{4}{9}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{4}{9}\right)^5 \left(1-\frac{4}{9}\right)^0 =$$

$$= 10 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 \left(\frac{5}{9}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^4 \cdot \frac{5}{9} + 1 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^5 \cong \underline{\underline{39,67\%}}.$$

Exercice 18

On utilise la loi binomiale : $P(X=k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k}$.

Ici X = nb d'étudiant achetant les produits de la fabrique, $n = 4$ étudiants fumeurs choisis et $p = 25\% = \frac{1}{4}$.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_0^4 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-0} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cong \underline{\underline{68{,}36\%}}.$$

Exercice 19

On utilise la loi binomiale : $P(X=k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$.

Ici, X = nb de femmes, $n = 10$ et $p = 28\% = \frac{7}{25}$.

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$$

$$= C_0^{10}\left(\frac{7}{25}\right)^0\left(1-\frac{7}{25}\right)^{10-0} + C_1^{10}\left(\frac{7}{25}\right)^1\left(1-\frac{7}{25}\right)^{10-1} + C_2^{10}\left(\frac{7}{25}\right)^2\left(1-\frac{7}{25}\right)^{10-2} +$$

$$+ C_3^{10}\left(\frac{7}{25}\right)^3\left(1-\frac{7}{25}\right)^{10-3} + C_4^{10}\left(\frac{7}{25}\right)^4\left(1-\frac{7}{25}\right)^{10-4} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{18}{25}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{7}{25} \cdot \left(\frac{18}{25}\right)^9 + 45\left(\frac{7}{25}\right)^2\left(\frac{18}{25}\right)^8 + 120\left(\frac{7}{25}\right)^3\left(\frac{18}{25}\right)^7 + 210\left(\frac{7}{25}\right)^4\left(\frac{18}{25}\right)^6 =$$

$$\cong \underline{\underline{88{,}19\%}}.$$

Exercice 20

On utilise la loi binomiale : $P(X=k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k}$.

Ici : X = nb de patients du docteur, $n = 12$, $p = 90\% = \frac{9}{10}$.

Les $\frac{3}{4}$ des factures du médecin sur 12 patients correspondent à 9.

La probabilité cherchée est donc :

$$P(X \geqslant 9) = P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) =$$

$$= C_9^{12} \left(\frac{9}{10}\right)^9 \left(1-\frac{9}{10}\right)^{12-9} + C_{10}^{12} \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \left(1-\frac{9}{10}\right)^{12-10} + C_{11}^{12} \left(\frac{9}{10}\right)^{11} \left(1-\frac{9}{10}\right)^{12-11} +$$

$$+ C_{12}^{12} \left(\frac{9}{10}\right)^{12} \left(1-\frac{9}{10}\right)^{12-12} =$$

$$= 220 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + 66 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 12 \left(\frac{9}{10}\right)^{11} \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^{12} \cong \underline{\underline{97{,}44\%}}.$$

Exercice 21

On utilise la loi binomiale : $P(X=k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k}$.

Ici : X = nb de raisins dans le petit pain, $n = 1000$ raisins, p = probabilité pour un raisin de se trouver dans un petit pain $= \frac{1}{250}$.

a) $P(X=4) = C_4^{1000} \left(\frac{1}{250}\right)^4 \left(1-\frac{1}{250}\right)^{1000-4} \cong \underline{\underline{19,58\,\%}}$.

b) $P(X<4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$$= C_0^{1000} \left(\frac{1}{250}\right)^0 \left(1-\frac{1}{250}\right)^{1000-0} + C_1^{1000} \left(\frac{1}{250}\right)^1 \left(1-\frac{1}{250}\right)^{1000-1} +$$

$$+ C_2^{1000} \left(\frac{1}{250}\right)^2 \left(1-\frac{1}{250}\right)^{1000-2} + C_3^{1000} \left(\frac{1}{250}\right)^3 \left(1-\frac{1}{250}\right)^{1000-3} =$$

$$= \left(\frac{249}{250}\right)^{1000} + 1000 \cdot \frac{1}{250} \left(\frac{249}{250}\right)^{999} + 499'500 \cdot \left(\frac{1}{250}\right)^2 \left(\frac{249}{250}\right)^{998} +$$

$$+ 166'167'000 \cdot \left(\frac{1}{250}\right)^3 \left(\frac{249}{250}\right)^{997} \cong \underline{\underline{43,31\,\%}}.$$

c) $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X<4) \cong 1 - 0,4331$ (voir b)

$\cong 0,5669 = \underline{\underline{56,69\,\%}}$.