STATISTIQUE ET PROBABILITES

Corrigé du TE

Exercice 1

Avec remise: on a les possibilités suivantes: BNN, NBN, NNB (B = boule blanche, N = boule noire);
avec remise, la probabilité d'obtenir B est $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ et la probabilité d'obtenir N est $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$;
ainsi la probabilité cherchée est $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=37,5\%$.

Sans remise: là aussi, on a les possibilités suivantes: BNN, NBN, NNB;

BNN : prob d'obtenir $B=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
prob d'obtenir $N=\frac{5}{9}$ (il reste 5 noires sur 9 boules),
prob d'obtenir $N=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (il reste 4 noires sur 8 boules);

NBN : prob d'obtenir $N=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
prob d'obtenir $B=\frac{5}{9}$ (il reste 5 blanches sur 9 boules),
prob d'obtenir $N=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (il reste 4 noires sur 8 boules);

NNB : prob d'obtenir $N=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
prob d'obtenir $N=\frac{4}{9}$ (il reste 4 noires sur 9 boules),
prob d'obtenir $B=\frac{5}{8}$ (il reste 5 blanches sur 8 boules);

ainsi la probabilité cherchée est $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=$

$$=\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{5}{12}\cong \underline{\underline{41,67\%}}.$$

$\Rightarrow$ <u>Sans remise.</u>

Exercice 2

a) Les possibilités sont : pipé - parfait, parfait - pipé.

La probabilité est : $\underset{\text{pipé}}{\frac{1}{5}} \cdot \underset{\text{parfait sur les 4 restants}}{\frac{4}{4}} + \underset{\text{parfait}}{\frac{4}{5}} \cdot \underset{\text{pipé sur les 4 restants}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = \underline{\underline{40\%}}.$

b) Pour le choix des dés, les possibilités sont : pipé - parfait, parfait - pipé, parfait - parfait.

Les probabilités de ces événements sont :

pipé - parfait $\to$ double six : $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{60}$;

sur les 2 dés choisis, il y a 7 faces sur 12 avec le six

parfait - pipé $\to$ double six : $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{60}$;

parfait - parfait $\to$ double six : $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{60}$.

1 possibilité d'obtenir double six sur 36 possibilités totales

Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{7}{60} + \frac{7}{60} + \frac{1}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = \underline{\underline{25\%}}.$

c) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ici : A = on a choisi le dé pipé et B = le six sort 2 fois ;

$A \cap B$ = on a choisi le dé pipé et le six sort 2 fois ;

$p(A \cap B) = 1$;

$p(B) = \underset{\text{dé pipé}}{1} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}_{\text{dé parfait}} = 1 + \frac{1}{36} = \frac{37}{36}$.

Ainsi $p(A|B) = \frac{1}{37/36} = \frac{36}{37} \cong \underline{\underline{97,30\%}}.$

Exercice 3

On va utiliser la loi binomiale : $P(X=k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k}$.

a) Ici : X = nb de fois qu'Alexandre atteint la cible ; $n = 5$ flèches ; $p = \frac{7}{10}$.

On a $P(X=2) = C_2^5 \left(\frac{7}{10}\right)^2 \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \underline{\underline{13,23\%}}$.

b) On veut $P(X \geq 1) > \frac{999}{1000}$ et on doit déterminer n.

$P(X \geq 1) > 0,999 \Rightarrow 1 - P(X<1) > 0,999 \Rightarrow P(X<1) < 0,001$

$\Rightarrow P(X=0) < 0,001 \Rightarrow C_0^n \left(\frac{7}{10}\right)^0 \left(\frac{3}{10}\right)^n < 0,001$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^n < 0,001 \Rightarrow \log\left(\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) < \log(0,001)$

$\Rightarrow n \log\left(\frac{3}{10}\right) < \log(0,001) \Rightarrow n > \dfrac{\log(0,001)}{\log(3/10)}$ car $\log\left(\frac{3}{10}\right) < 0$

$\Rightarrow n > 5,74$

Donc, il doit lancer <u>au moins 6 flèches</u>.

c) On a les possibilités suivantes : - Alexandre touche et Bernard rate
- Alexandre rate et Bernard touche.

La probabilité est ainsi $\frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{56}{100} + \frac{6}{100} = \frac{62}{100} = \underline{\underline{62\%}}$.

d) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ici : A = c'est la flèche d'Alexandre qui a atteint la cible,
B = seule une des deux flèches a atteint la cible,
$A \cap B$ = Alexandre a touché la cible et Bernard a raté la cible,
$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{14}{25}$
$P(B) = \frac{62}{100} = \frac{31}{50}$ (voir c).

Ainsi $P(A|B) = \dfrac{14/25}{31/50} = \frac{14}{25} : \frac{31}{50} = \frac{14}{25} \cdot \frac{50}{31} = \frac{28}{31} \cong \underline{\underline{90,32\%}}$.