Chapitre 7

Tests d'hypothèse

Sommaire

1 Introduction

Un **test d'hypothèse** est un **procédé d'inférence** permettant de contrôler (accepter ou rejeter) à partir de l'étude d'un ou plusieurs **échantillons** aléatoires, la validité d'hypothèses relatives à une ou plusieurs **populations**.
Les méthodes de l'**inférence statistique** nous permettent de déterminer, avec une probabilité donnée, si les différences constatées au niveau des échantillons peuvent être imputables au hasard ou si elles sont suffisamment importantes pour signifier que les échantillons proviennent de populations vraisemblablement différentes.
Les tests d'hypothèses font appel à un certain nombre d'hypothèses concernant la nature de la population dont provient l'échantillon étudié (normalité de la variable, égalité des variances, etc).

En fonction de l'hypothèse testée, plusieurs types de tests peuvent être réalisés :

❒ Les tests destinés **à vérifier si un échantillon peut être considéré comme extrait d'une population donnée**, vis-à-vis d'un paramètre comme la moyenne ou la fréquence observée (**tests de conformité**) ou par rapport à sa distribution observée (**tests d'ajustement**). Dans ce cas **la loi théorique du paramètre est connue au niveau de la population.**

> Est-ce que le taux de glucose moyen mesuré dans un échantillon d'individus traités est conforme au taux de glucose moyen connu dans la population ? (**test de conformité**) Est-ce que la distribution des fréquences génotypiques observées pour un locus donné est conforme à celle attendue sous l'hypothèse du modèle de Hardy-Weinberg ? (**test d'ajustement**).

❒ Les tests destinés à comparer plusieurs populations à l'aide d'un nombre équivalent d'échantillons (**tests d'égalité ou d'homogénéité**) sont les plus couramment utilisés. Dans ce cas **la loi théorique du paramètre est inconnue au niveau des populations.**
On peut ajouter à cette catégorie le **test d'indépendance** qui cherche à tester l'indépendance entre deux caractères, généralement qualitatifs.

> Y a-t-il une différence entre le taux de glucose moyen mesuré pour deux échantillons d'individus ayant reçu des traitements différents ? (**tests d'égalité ou d'homogénéité**). Est-ce que la distribution des fréquences génotypiques observées pour un locus donné est indépendante du sexe des individus ? (**test d'indépendance**).

2 Principe des tests

Le principe des tests d'hypothèse est **de poser une** hypothèse de travail et **de prédire les conséquences** de cette hypothèse pour la population ou l'échantillon. On compare ces prédictions avec les observations et l'on conclut **en acceptant ou en rejetant** l'hypothèse de travail à partir de **règles de décisions objectives.**
Définir les hypothèses de travail, constitue un élément essentiel des tests d'hypothèses de même que vérifier les conditions d'application de ces dernières (normalité de la variable, égalité des variances ou **homoscédasticité**, etc).

Différentes étapes doivent être suivies pour tester une hypothèse :

(1) définir l'**hypothèse nulle** (notée H_0) à contrôler,
(2) choisir un test statistique ou **une statistique** pour contrôler H_0,
(3) définir la distribution de la statistique sous l'hypothèse « H_0 est réalisée »,
(4) définir **le niveau de signification du test** ou région critique notée α,
(5) calculer, à partir des données fournies par l'échantillon, la valeur de la statistique
(6) prendre une décision concernant l'hypothèse posée et faire une interprétation biologique

2.1 Choix de l'hypothèse à tester

2.1.1 Hypothèse nulle et hypothèse alternative

L'hypothèse nulle notée H_0 est l'hypothèse que l'on désire contrôler : elle consiste à dire qu'il **n'existe pas de différence** entre les paramètres comparés ou que la différence observée n'est pas significative et est due aux fluctuations d'échantillonnage.
Cette hypothèse est formulée dans le but d'être rejetée.

L'hypothèse alternative notée H_1 est la négation de H_0, elle est équivalente à dire « H_0 est fausse ». La décision de rejeter H_0 signifie que H_1 est réalisée ou H_1 est vraie.

Remarque : Il existe une **dissymétrie importante** dans les conclusions des tests. En effet, la décision d'accepter H_0 n'est pas équivalente à « H_0 est vraie et H_1 est fausse ». Cela traduit seulement l'opinion selon laquelle, il n'y a pas d'évidence nette pour que H_0 soit fausse.
Un test conduit à rejeter ou à ne pas rejeter une hypothèse nulle jamais à l'accepter d'emblée.

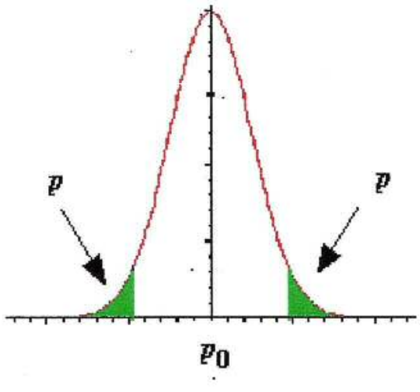
2.1.2 Test unilatéral ou bilatéral

La nature de H_0 détermine la façon de formuler H_1 et par conséquence la nature **unilatérale** ou **bilatérale** du test.

Test bilatéral

Si H_0 consiste à dire que la population estudiantine avec une fréquence de fumeurs « p » est représentative de la population avec une fréquence de fumeurs « p_0 », on pose alors :

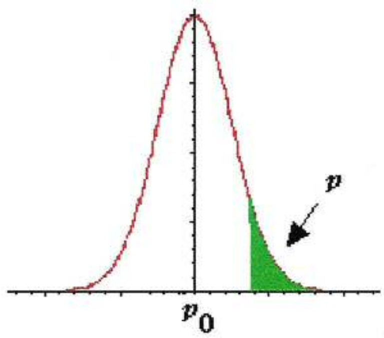
$$H_0 : p = p_0 \quad \text{et } H_1 : p \neq p_0$$

	$H_0 : p = p_0$ et $H_1 : p \neq p_0$ Le test sera **bilatéral** car on considère que la fréquence p peut être **supérieure** ou **inférieure** à la fréquence p_0. La **région critique** α en vert correspond à une probabilité $\frac{\alpha}{2}$ de part et d'autre de la courbe.

Test unilatéral

Si l'on fait l'hypothèse que la fréquence de fumeurs dans la population estudiantine p est supérieure à la fréquence de fumeurs dans la population p_0, on pose alors

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{et } H_1 : p > p_0$$

	$H_0 : p = p_0$ et $H_1 : p > p_0$ Le test sera **unilatéral** car on considère que la fréquence p ne peut être que **supérieure** à la fréquence p_0. La **région critique** α en vert correspond à une probabilité α.

Le raisonnement inverse peut être formulé avec l'hypothèse suivante :

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{et } H_1 : p < p_0$$

Remarque : Seuls les tests bilatéraux seront développés dans le cours. Les tests unilatéraux seront traités au niveau des exemples.

2.2 Choix d'un test statistique

Ce choix dépend de la nature des données, du type d'hypothèse que l'on désire contrôler, des affirmations que l'on peut admettre concernant la nature des populations étudiées (normalité, égalité des variances) et d'autres critères que nous préciserons.

Un **test statistique** ou une statistique est une **fonction des variables aléatoires** représentant l'échantillon dont la valeur numérique obtenue pour l'échantillon considéré **permet de distinguer entre H_0 vraie et H_0 fausse.**

Dans la mesure où la **loi de probabilité** suivie par le paramètre p_0 au niveau de la population en général est connue, on peut ainsi établir la loi de probabilité de la statistique S telle que :

$$\boxed{S = p - p_0}$$ (voir intervalle de confiance d'une fréquence)

2.3 Choix de la région critique et règle de décision

Connaissant la loi de probabilité suivie par la statistique S sous l'hypothèse H_0, il est possible d'établir une **valeur seuil, S_{seuil}** de la statistique pour une probabilité donnée appelée **le niveau de signification du test** : α.

La **région critique** correspond à l'ensemble des valeurs telles que

$$S > S_{seuil}$$

et le **niveau de signification** est telle que :

$$P(S > S_{seuil}) = \alpha \quad \text{avec} \quad P(S \leq S_{seuil}) = 1 - \alpha$$

Selon la nature unilatérale ou bilatérale du test, la définition de la région critique varie.

	Test unilatéral $H_0 : p = p_0$		**Test bilatéral** $H_0 : p = p_0$
Hypothèse alternative	$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p \neq p_0$
Valeur de S sous H_1 $S = p - p_0$	$S > 0$	$S < 0$	$\lvert S \rvert \neq 0$
Niveau de signification α	$P(S > S_{seuil}) = \alpha$	$P(S < S_{seuil}) = \alpha$	$P(\lvert S \rvert > S_{seuil}) = \alpha$

Il existe deux stratégies pour prendre une décision en ce qui concerne un test d'hypothèse :
la première stratégie **fixe *a priori* la valeur du seuil de signification** α et la seconde établit la **valeur de la probabilité critique α_{obs} *a posteriori.***

Règles de décision 1 :
Sous l'hypothèse « H_0 est vraie » et pour **un seuil de signification α fixé**

- si la valeur de la statistique S calculée ($S_{obs.}$) est **supérieure** à la valeur seuil S_{seuil}
  $S_{obs} > S_{seuil}$ alors **l'hypothèse H_0 est rejetée** **au risque d'erreur α**
  et l'hypothèse H_1 est acceptée.
- si la valeur de la statistique S calculée ($S_{obs.}$) est **inférieure** à la valeur seuil S_{seuil}
  $S_{obs} \leq S_{seuil}$ alors **l'hypothèse H_0 ne peut être rejetée.**

Remarque : Le choix du risque α est lié aux conséquences pratiques de la décision : si les conséquences sont graves, on choisira $\alpha = 1\%$ ou 1‰, mais si le débat est plutôt académique, le traditionnel $\alpha = 5$ % fera le plus souvent l'affaire.

Règles de décision 2 :
La probabilité critique α telle que $P(S \geq S_{obs.}) = \alpha_{obs}$ est **évaluée**

- si $\alpha_{obs} \geq 0{,}05$ **l'hypothèse H_0 est acceptée** car le **risque d'erreur** de rejeter H_0 alors qu'elle est vrai est trop important.
- si $\alpha_{obs} < 0{,}05$ **l'hypothèse H_0 est rejetée** car le risque d'erreur de rejeter H_0 alors qu'elle est vrai est très faible.

2.4 Risques d'erreur, puissance et robustesse d'un test

2.4.1 Risque d'erreur de première espèce α

Le risque d'erreur α est la probabilité que la valeur expérimentale ou calculée de la statistique S **appartienne à la région critique** si H_0 est vrai. Dans ce cas H_0 est rejetée et H_1 est considérée comme vraie.

Le risque **α de première espèce** est celui de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie

$$\alpha = P(\text{ rejeter } H_0 / H_0 \text{ vraie})$$

ou accepter H_1 alors qu'elle est fausse

$$\alpha = P(\text{ accepter } H_1 / H_1 \text{ fausse})$$

La valeur du **risque α doit être fixée *a priori*** par l'expérimentateur et jamais en fonction des données. C'est un compromis entre le risque de conclure à tort et la faculté de conclure.

Remarque : Toutes choses étant égales par ailleurs, **la région critique diminue** lorsque **α décroît** (voir intervalle de confiance) et donc on rejette moins fréquemment H_0. A vouloir commettre moins d'erreurs, on conclut plus rarement.

Exemple :

Si l'on cherche à tester l'hypothèse qu'une pièce de monnaie n'est pas « truquée », nous allons adopter la régle de décision suivante : (mettre image d'une pièce)

H_0 : la pièce n'est pas truquée est

acceptée si $X \in [40,60]$

rejetée si $X \notin [40,60]$ donc soit $X < 40$ ou $X > 60$

avec X « nombre de faces » obtenus en lançant 100 fois la pièce.

Quel est **le risque d'erreur de première espèce α** dans ce cas ?

2.4.2 Risque d'erreur de deuxième espèce β

Le risque d'erreur β est la probabilité que la valeur expérimentale ou calculée de la statistique n'**appartienne pas à la région critique** si H_1 est vrai. Dans ce cas H_0 est acceptée et H_1 est considérée comme fausse.

Le risque **β de deuxième espèce** est celui d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse

$$\beta = P(\text{ accepter } H_0 / H_0 \text{ fausse}) \text{ ou } P(\text{ accepter } H_0 / H_1 \text{ vraie})$$

ou rejeter H_1 alors qu'elle est vraie

$$\beta = P(\text{ rejeter } H_1 / H_1 \text{ vraie})$$

Remarque : Pour quantifier le risque β, il faut connaître la loi de probabilité de la statistique S sous l'hypothèse H_1.

Exemple :

Si l'on reprend l'exemple précédent de la **pièce de monnaie**, la probabilité p d'obtenir face est de 0,6 pour une pièce truquée. Si l'on adopte toujours la même régle de décision :

H0 : la pièce n'est pas truquée est

acceptée si $X \in [40,60]$

rejetée si $X \notin [40,60]$ donc soit $X < 40$ ou $X > 60$

avec X « nombre de faces » obtenues en lançant 100 fois la pièce.

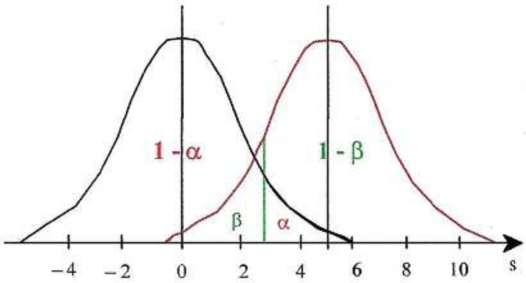
Quel est le **risque d'erreur de second espèce β** dans ce cas ?

2.4.3 La puissance et la robustesse d'un test $(1 - \beta)$

Les tests ne sont pas faits pour « démontrer » H_0 mais pour « **rejeter** » **H_0** . L'aptitude d'un test à rejeter H_0 alors qu'elle est fausse constitue **la puissance du test**.

La **puissance d'un test** est : $1 - \beta = P(\text{ rejeter } H_0 / H_0 \text{ fausse}) = P(\text{accepter } H_1/H_1 \text{ vraie})$

La relation entre les deux risques d'erreur figure sur le graphe ci-dessous.



La puissance d'un test est fonction de la nature de H_1, un **test unilatéral** est **plus puissant** qu'un test bilatéral. La puissance d'un test **augmente** avec taille de l'échantillon **N** étudié à valeur de α constant. La puissance d'un test **diminue** lorsque α **diminue**.

Exemple :

Si l'on reprend l'exemple précédent de la **pièce de monnaie**, calculez la puissance du test lorsque la probabilité d'obtenir face est respectivement 0,3 - 0,4 - 0,6 - 0,7 -0,8 pour une pièce truquée. Que constatez-vous ?

Les différentes situations que l'on peut rencontrer dans le cadre des tests d'hypothèse sont résumées dans le tableau suivant :

Décision \ Réalité	H_0 vraie	H_0 fausse
Non-rejet de H_0	correct	Manque de puissance **risque de second espèce β**
Rejet de H_0	Rejet à tort **risque de première espèce α**	Puissance du test **$1 - \beta$**

La robustesse d'une technique statistique représente sa sensibilité à des écarts aux hypothèses faites.

Exemple : Toute chose étant égale par ailleurs, que se passe-t-il si l'hypothèse de normalité n'est pas satistfaite ?

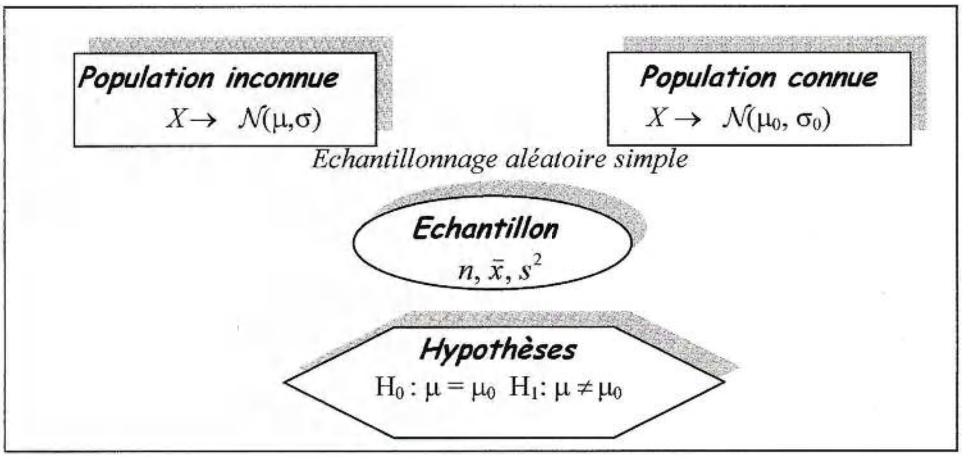
3 Tests de conformité

Les tests de conformité sont destinés **à vérifier si un échantillon peut être considéré comme extrait d'une population donnée ou représentatif de cette population**, vis-à-vis d'un paramètre comme la moyenne, la variance ou la fréquence observée. Ceci implique que l**a loi théorique du paramètre est connue au niveau de la population.**

3.1 Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique

3.1.1 Principe du test

Soit X, une variable aléatoire observée sur une population, suivant **une loi normale** et **un échantillon** extrait de cette population.



Le but est de savoir si un **échantillon de moyenne** $\bar{x}$, estimateur de μ, appartient à une **population de référence connue d'espérance** μ_0 (H_0 vraie) et ne diffère de μ_0 que par des fluctuations d'échantillonnage ou bien appartient à une **autre population inconnue d'espérance** μ (H_1 vraie).

Pour tester cette hypothèse, il existe deux statistiques : la variance σ_0^2 de la population de référence est connue (test ε) ou cette variance est inconnue et il faut l'estimer (test T).

3.1.2 Variance de la population connue

3.1.2.1 Statistique du test

Soit $\bar{X}$ la distribution d'échantillonnage de la moyenne dans la population inconnue suit une loi normale telle que : $\bar{X} \to \mathcal{N}(\mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}})$.

La statistique étudiée est l'écart : $S = \bar{X} - \mu_0$ dont la distribution de probabilité est la suivante

$S \to \mathcal{N}(0, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}})$ avec sous H_0, $E(S) = 0$ et $V(S) = \frac{\sigma^2}{n}$ (voir démonstration)

Nous pouvons établir grâce au **théorème central limite** la variable Z centrée réduite telle que

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

Sous $H_0 : \mu = \mu_0$ avec σ^2 connue

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$ suit une **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$

3.1.2.2 Application et Décision

L'hypothèse testée est la suivante :

$H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Une valeur z de la variable aléatoire Z est calculée :

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$ notée aussi ε_{obs}

ε calculée (ε_{obs}) est comparée avec la valeur ε_{seuil} lue **sur la table de la loi normale centrée réduite** pour un risque d'erreur α fixé (**Règle de décision 1**).

- si $\varepsilon_{obs} > \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α : l'échantillon appartient à une population d'espérance μ et n'est pas représentatif de la population de référance d'espérance μ_0 .
- si $\varepsilon_{obs} \leq \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est acceptée: l'échantillon est représentatif de la population de référence d'espérance μ_0.

Exemple :

La **glycémie** d'une population suit une loi normale d'espérance $\mu_0 = 1$g/l et d'écart-type $\sigma_0 = 0{,}1$ g/l. On relève les glycémies chez 9 patients. On trouve $\bar{x} = 1{,}12$g/l. Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

3.1.3 Variance de la population inconnue

3.1.3.1 Statistique du test

La démarche est la même que pour le test ε mais la variance de la population n'étant pas connue, elle est estimée par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \text{ (voir estimation ponctuelle)}$$

La statistique étudiée est l'écart : $S = \overline{X} - \mu_0$ dont la distribution de probabilité est la suivante

$S \rightarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}})$ avec $E(S) = 0$ et $V(S) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n}$ (voir démonstration)

Nous pouvons établir grâce au théorème central limite la variable T centrée réduite telle que

$$T = \frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}$$

> Sous $H_0 : \mu = \mu_0$ avec σ^2 inconnue
>
> $T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}$ suit une une **loi de Student** à n-1 degrés de liberté.

3.1.3.2 Application et Décision

> L'hypothèse testée est la suivante :
>
> $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$
>
> Une valeur t de la variable aléatoire T est calculée :
>
> $$t = \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} = \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}}$$
>
> t calculée (t_{obs}) est comparée avec la valeur t_{seuil} lue dans **la table de Student** pour un risque d'erreur α fixé et (n - 1) degrés de liberté.

- si $t_{obs} > t_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α : l'échantillon appartient à une population d'espérance μ et n'est pas représentatif de la population de référence d'espérance μ_0 .
- si $t_{obs} \leq t_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est acceptée: l'échantillon est représentatif de la population de référence d'espérance μ_0.

Remarque : Si $n < 30$, la variable aléatoire X étudiée doit **impérativement** suivre **une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$**. Pour $n \geq 30$, la variable de **student t** converge vers une **loi normale centrée réduite ε.**

Exemple :

Pour étudier un lot de fabrication de comprimés, on prélève au hasard 10 comprimés parmis les 30 000 produits et on les pèse. On observe les valeurs de poids en grammes :

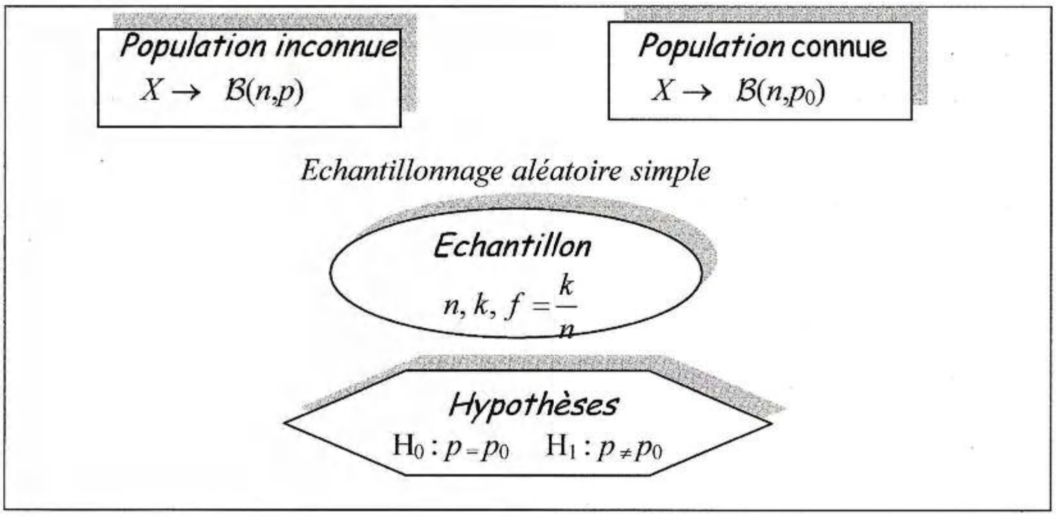
0,81 – 0,84 – 0,83 – 0,80 – 0,85 – 0,86 – 0,85 – 0,83 – 0,84 – 0,80

Le poids moyen observé est-il compatible avec la valeur 0,83g, moyenne de la production au seuil 98% ? Réponse.

3.2 Comparaison d'une fréquence observée et d'une fréquence théorique

3.2.1 Principe du test

Soit X une variable qualitative prenant deux modalités (succès X=1, échec X=0) observée sur une population et **un échantillon** extrait de cette population.



Le but est de savoir si un **échantillon** de fréquence observée $\frac{K}{n}$, estimateur de p, appartient à une **population de référence connue de fréquence** p_0 (H_0 vraie) ou à une autre **population inconnue de fréquence p** (H_1 vraie).

3.2.2 *Statistique du test*

La distribution d'échantillonnage de la fréquence de succès dans la population inconnue, $\frac{K}{n}$ suit une loi normale telle que : $\frac{K}{n}$ suit $\mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}})$, les variances étant supposées égales dans la population de référence et la population d'où est extrait l'échantillon.

La statistique étudiée est l'écart : $S = \frac{K}{n} - p_0$ dont la distribution de probabilité est la suivante $S \rightarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}})$ avec sous H_0 $E(S) = 0$ et $V(S) = \frac{p_0 q_0}{n}$ (voir démonstration)

Nous pouvons établir grâce au théorème central limite la variable Z centrée réduite telle que

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} = \frac{\frac{K}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$ mais **seulement si np_0 et $nq_0 \geq 10$**

Sous $H_0 : p = p_0$

$$Z = \frac{\frac{K}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$ suit une **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$

3.2.3 *Application et décision*

L'hypothèse testée est la suivante :

$H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$

Une valeur z de la variable aléatoire Z est calculée :

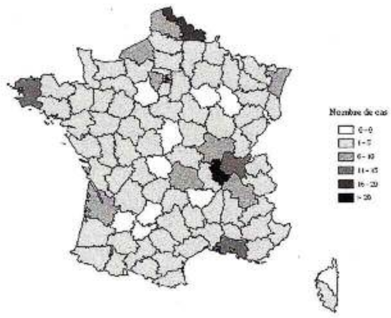
$$z = \frac{\left|\frac{k}{n} - p_0\right|}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$ notée aussi ε_{obs}

ε calculée (ε_{obs}) est comparée avec la valeur ε_{seuil} lue **sur la table de la loi normale centrée réduite** pour un risque d'erreur α fixé (**Règles de décision 1**).

- si $\varepsilon_{obs} > \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α : l'échantillon appartient à une population de fréquence p et n'est pas représentatif de la population de référence de fréquence p_0 .
- si $\varepsilon_{obs} \leq \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est acceptée: l'échantillon est représentatif de la population de référence de fréquence p_0.

Exemple :

Une anomalie génétique touche en France 1/1000 des individus. On a constaté dans une région donnée : 57 personnes atteintes sur 50 000 naissances.
Cette région est-elle représentative de la France entière ?



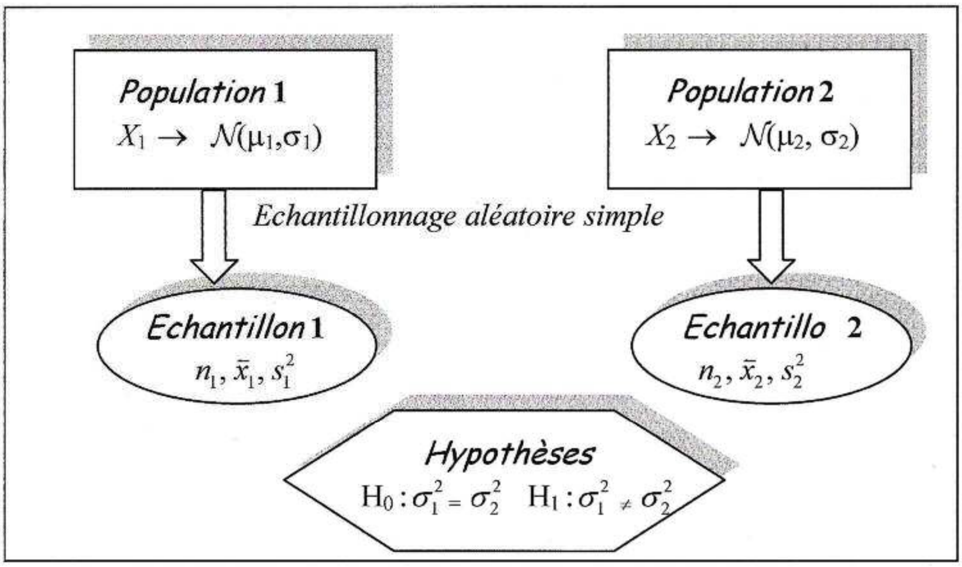
4 Tests d'homogénéité

Les tests d'homogénéité destinés à comparer deux populations à l'aide d'un nombre équivalent d'échantillons (**tests d'égalité ou d'homogénéité**) sont les plus couramment utilisés. Dans ce cas **la loi théorique du paramètre étudié** (par exemple p, μ , σ^2) **est inconnue au niveau des populations étudiées.**

4.1 Comparaison de deux variances

4.1.1 Principe du test

Soit X, une variable aléatoire observée sur 2 populations suivant **une loi normale** et **deux échantillons indépendants** extraits de ces deux populations.



On fait l'hypothèse que les deux échantillons proviennent de 2 populations dont **les variances sont égales.**
Le test de comparaison de variance est nécessaire lors de la **comparaison de deux moyennes** lorsque les variances des populations σ_1^2 et σ_2^2 ne sont pas connues. C'est également la statistique associée à **l'analyse de variance**.

4.1.2 Statistique du test

La statistique associée au test de comparaison de deux variances correspond au rapport des deux variances estimées.

Sous H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$F_{obs.} = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1 - 1} s_1^2}{\frac{n_2}{n_2 - 1} s_2^2}$$ suit une **loi de Fisher-Snedecor** à (n_1-1, n_2-1) degrés de liberté

avec $\hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2$ car le **rapport des variances doit être supérieur à 1**.

Remarque : Il existe d'autres statistiques que celle de Fisher –Snédecor pour comparer deux variances, notamment le test de Hartley qui impose l'égalité de la taille des échantillons comparés $n_1 = n_2$ mais que nous ne développerons pas dans ce cours.

4.1.3 Application et décision

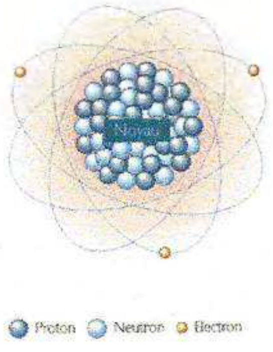
La valeur de la statistique F calculée (F_{obs}) est comparée avec la valeur F_{seuil} lue dans **la table de la loi de Fisher-Snedecor** pour un **risque d'erreur α** fixé et (n_1-1, n_2-1) degrés de liberté.

- si $F_{obs} \geq F_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α : les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant des variances statistiquement différentes σ_1^2 et σ_2^2.
- si $F_{obs} \leq F_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est acceptée: les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant même variance σ^2.

Remarque : Pour l'application de ce test, il est impératif que $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ et que les deux échantillons soient **indépendants.**

Exemple :

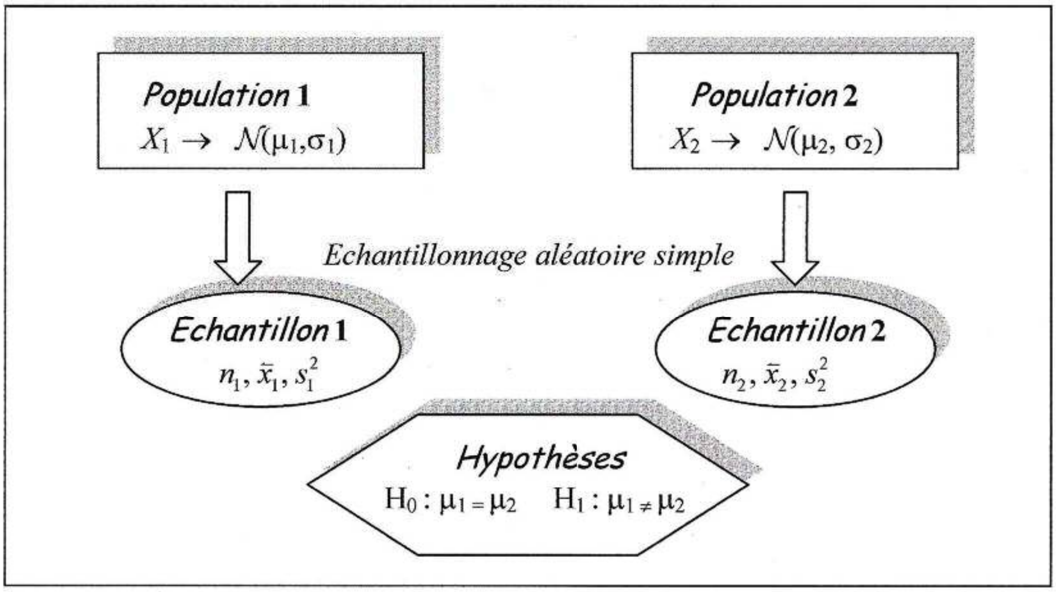
Un biologiste effectue des dosages par une méthode de mesure de radioactivité et ne dispose donc que d'un nombre très limité de valeurs.
Les concentrations C_1 et C_2 mesurées sur deux prélèvements ont donné les valeurs suivantes :
C_1 : 3,9 – 3,8 – 4,1 – 3,6 C_2 : 3,9 – 2,8 – 3,1 – 3,7 – 4,1
La variabilité des valeurs obtenues pour les deux prélèvements est-elle similaire ?



4.2 Comparaison de deux moyennes

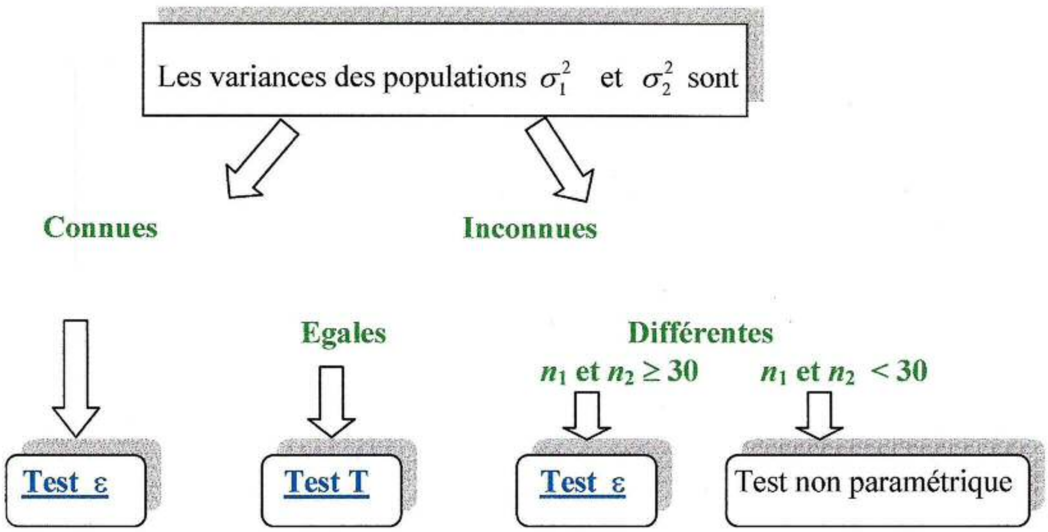
4.2.1 Principe du test

Soit X un **caractère quantitatif continu** observé sur 2 populations suivant une **loi normale** et **deux échantillons indépendants** extraits de ces deux populations.



On fait l'hypothèse que les deux échantillons proviennent de 2 populations dont les **espérances sont égales.**

Il existe plusieurs statistiques associées à la comparaison de deux moyennes en fonction de la nature des données.



4.2.2 Les variances des populations sont connues

4.2.2.1 Statistique du test

- Soit $\bar{X}_1$ **la distribution d'échantillonnage** de la moyenne dans la population 1 suit une loi normale telle que : $\bar{X}_1 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$ et de même pour $\bar{X}_2 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$
- $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ étant deux variables aléatoires indépendantes, nous pouvons établir la loi de probabilité de la variable aléatoire à étudier $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 \qquad \text{(Propriété de l' espérance)}$$

$$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = V(\bar{X}_1) - V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \qquad \text{(Propriété de la variance)}$$

- Sachant que $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$, nous pouvons établir grâce au **théorème central limite** la variable Z centrée réduite telle que

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Sous $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ avec σ_1^2 et σ_2^2 connues

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$ suit une **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$

4.2.2.2 Application et décision

L'hypothèse testée est la suivante :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Une valeur z de la variable aléatoire Z est calculée :

$$z = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$ notée aussi ε_{obs}

ε calculée (ε_{obs}) est comparée avec la valeur ε_{seuil} lue **sur la table de la loi normale centrée réduite** pour un risque d'erreur α fixé.

- si $\varepsilon_{obs} \geq \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α : les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant des espérances respectivement μ_1 et μ_2.
- si $\varepsilon_{obs} \leq \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est acceptée: les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant même espérance μ.

Remarque : Pour l'application de ce test, il est impératif que $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ pour les échantillons de **taille < 30** et que les deux échantillons soient **indépendants**.

Exemple :

On a effectué une étude, en milieu urbain et en milieu rural, sur le rythme cardiaque humain :

	Milieu urbain	Milieu rural
Effectif de l'échantillon	300	240
Moyenne de l'échantillon	80	77
Variance de la population	150	120

Peut-on affirmer qu'il existe une différence significative entre les rythmes cardiaques moyens des deux populations ? **Réponse**.

4.2.3 Les variances des populations sont inconnues et égales

4.2.3.1 Statistique du test

- Les variances des populations n'étant pas connues, on fait l'hypothèse que les deux populations présentent la même variance.

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (voir **test de comparaison des variances**)

- L'égalité des variances des deux populations ou **homoscédasticité** permet alors d'établir la loi de probabilité de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ avec

$$\bar{X}_1 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}) \text{ et } \bar{X}_2 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_2})$$

- Sachant que $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$, nous pouvons établir grâce au **théorème central limite** la variable T telle que

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

Sous $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ avec $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$ suit une **loi de Student** à $(n_1 + n_2 - 2)$ degrés de liberté

4.2.3.2 Application et décision

L'hypothèse testée est la suivante :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Les variances des populations n'étant pas connues, l'égalité des variances doit être vérifiée

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ contre $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ **test de Fisher-Snedecor**.

Une valeur t de la variable aléatoire T est calculée :

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$ avec $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ estimation de la variance σ^2 commune

t calculée (t_{obs}) est comparée avec la valeur t_{seuil} lue dans **la table de Student** pour un risque d'erreur α fixé et $(n_1 + n_2 - 2)$ degrés de liberté.

- si $t_{obs} > t_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α : les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant des espérances respectivement μ_1 et μ_2.
- si $t_{obs} \leq t_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est acceptée: les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant même espérance μ.

Remarque : Pour l'application de ce test, il est impératif que $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ pour les échantillons de **taille < 30,** que les deux échantillons soient **indépendants** et que les deux **variances estimées soient égales**.

Exemple :

Dans le but d'étudier l'influence du type d'atmosphère d'élevage sur la durée de développement des drosophiles femelles, ces dernières ont été élevées à 14°C sous atmosphère normale (N) ou enrichie en $C0_2$ (C02). Les résultats suivants ont été obtenus :

N	864, 768, 912, 804, 924, 984, 888, 816, 840, 936, 792, 876
$C0_2$	840, 948, 936, 1032, 912, 948, 1020, 936, 1056, 876, 1032, 918

Que peut-on conclure ?

4.2.4 Les variances des populations sont inconnues et inégales

Si les variances des populations **ne sont pas connues** et si leurs estimations à partir des échantillons sont **significativement différentes** (**test de comparaison des variances**), il faut considérer deux cas de figure selon la taille des échantillons comparés :

les **grands échantillons** avec n_1 et n_2 supérieurs à 30.
les **petits échantillons** avec n_1 et/ou n_2 inférieurs à 30.

Cas où n_1 et $n_2 > 30$

La statistique utilisée est la même que pour le cas où les **variances sont connues**.

Sous $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$ suit une **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$

Comme les variances **sont inconnues et significativement différentes** $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, on remplace les variances des populations par leurs estimations ponctuelles calculées à partir des échantillons, $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} s_1^2$ et $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} s_2^2$

L'hypothèse testée est la suivante :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Une valeur z de la variable aléatoire Z est calculée :

$$z = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}} = \varepsilon_{obs.}$$

ε calculée (ε_{obs}) est comparée avec la valeur ε_{seuil} lue **sur la table de la loi normale centrée réduite** pour un risque d'erreur α fixé.

- si $\varepsilon_{obs} > \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α : les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant des espérances respectivement μ_1 et μ_2.
- si $\varepsilon_{obs} \leq \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est acceptée: les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant même espérance μ.

Remarque : Pour l'application de ce test, il est impératif que $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ et que les deux échantillons soient **indépendants**.

Exemple :

Dans le but d'étudier l'influence éventuelle de la lumière sur la croissance du poisson *Lebistes Reticulus*, on a élevé deux lots de ce poisson dans des conditions d'éclairage différentes. Au 95ème jour, on a mesuré en mm les longueurs x_i des poissons. On a obtenu les résultats suivants :

Lot 1 (180 individus) : éclairage à 400 lux	$\sum x_{i1} = 3\ 780$	$\sum x_{i1}^2 = 84\ 884$
Lot 2 (90 individus) : éclairage à 3 000 lux.	$\sum x_{i2} = 2\ 043$	$\sum x_{i2}^2 = 46\ 586$

Que peut-on conclure ?

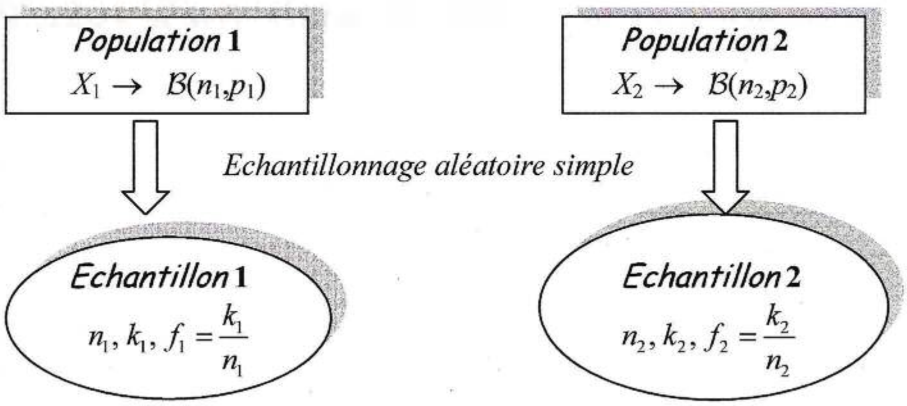
Cas où n_1 et/ou $n_2 < 30$

Lorsque les variances sont **inégales** et les échantillons de **petites tailles**, la loi de probabilité suivie par $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ n'est pas connue. On a recours alors au **statistique non paramétrique**.

4.3 Comparaison de deux fréquences

4.3.1 Principe du test

Soit X une **variable qualitative prenant deux modalités** (succès X=1, échec X=0) observée sur 2 populations et **deux échantillons indépendants** extraits de ces deux populations. On fait l'hypothèse que les deux échantillons proviennent de 2 populations dont les **probabilités de succès sont identiques**.



Hypothèses

$H_0 : p_1 = p_2 \quad H_1 : p_1 \neq p_2$

Le problème est de savoir si la différence entre les deux fréquences observées est réelle ou explicable par les fluctuations d'échantillonnage. Pour résoudre ce problème, deux tests de comparaison de fréquences sont possibles :

Test ε ou test de la variable centrée réduite et **test du Khi-deux χ^2**

4.3.2 Statistique du test ε

- **La distribution d'échantillonnage** de la fréquence de succès dans la population 1, $\frac{K_1}{n_1}$ suit une loi normale telle que :

$$\frac{K_1}{n_1} \text{ suit } \mathcal{N}\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1}}\right) \text{ et de même pour } \frac{K_2}{n_2} \text{ suit } \mathcal{N}\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2 q_2}{n_2}}\right)$$

si et seulement si $n_1p_1, n_1q_1, n_2p_2, n_2q_2 \geq 10$

- $\frac{K_1}{n_1}$ et $\frac{K_2}{n_2}$ étant deux variables aléatoires indépendantes, nous pouvons établir la loi de probabilité de la variable aléatoire à étudier $\frac{K_1}{n_1} - \frac{K_2}{n_2}$

$$E\left(\frac{K_1}{n_1} - \frac{K_2}{n_2}\right) = E\left(\frac{K_1}{n_1}\right) - E\left(\frac{K_2}{n_2}\right) = p_1 - p_2$$ (**Propriété de l' espérance**)

$$V\left(\frac{K_1}{n_1} - \frac{K_2}{n_2}\right) = V\left(\frac{K_1}{n_1}\right) + V\left(\frac{K_2}{n_2}\right) = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$ (**Propriété de la variance**)

- Sachant que $\frac{K_1}{n_1} - \frac{K_2}{n_2}$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}\right)$, nous pouvons établir grâce au **théorème central limite** la variable Z centrée réduite telle que

$$Z = \frac{\left(\frac{K_1}{n_1} - \frac{K_2}{n_2}\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

Sous $H_0 : p_1 = p_2$ avec $p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$

$$Z = \frac{\left(\frac{K_1}{n_1} - \frac{K_2}{n_2}\right)}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$ suit une **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$

4.3.3 Application et décision

La valeur p, probabilité du succès commune aux deux populations n'est en réalité pas connue. On l'estime à partir des résultats observés sur les deux échantillons :

$\hat{p} = \dfrac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$ où k_1 et k_2 représentent le nombre de succès observés respectivement pour l'échantillon 1 et pour l'échantillon 2.

L'hypothèse testée est la suivante :

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{contre} \quad H_1 : p_1 \neq p_2$$

Une valeur z de la variable aléatoire Z est calculée :

$$z = \frac{\left|\dfrac{k_1}{n_1} - \dfrac{k_2}{n_2}\right|}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{avec} \quad \hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$$

z ou ε calculée (ε_{obs}) est comparée avec la valeur ε_{seuil} lue **sur la table de la loi normale centrée réduite** pour un risque d'erreur α fixé.

- si $\varepsilon_{obs} > \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α : les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant des probabilités de succès respectivement p_1 et p_2.
- si $\varepsilon_{obs} \leq \varepsilon_{seuil}$ l'hypothèse H_0 est acceptée: les deux échantillons sont extraits de deux populations ayant même probabilité de succès p.

Exemple :

On veut tester l'impact des travaux dirigés dans la réussite à l'examen de statistique.

	Groupe 1	Groupe 2
Nbre d'heures de TD	20 h	30 h
Nbre d'étudiants	180	150
Nbre d'étudiants ayant réussi à l'examen	126	129

Qu'en concluez-vous ?