Chapitre 8

Intégrales multiples

8.1 Intégrales doubles

8.1.1 Définition et interprétation géométrique

Soit D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$ et $f(x, y)$ une fonction continue sur D. On a envie de définir l'intégrale double

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

de telle manière qu'elle soit égale au volume compris entre la base D et la surface

$$S = \{(x, y, f(x,y) \mid (x,y) \in D\}.$$

Défintion analytique

On décompose D de façon quelconque en sous-domaines disjoints $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Soit ΔA_i l'aire de chaque D_i.

On choisit arbitrairement un point $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ et on calcule

$$\begin{aligned}\Delta V_i &= f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i = \text{volume du prisme de base } D_i \text{ et de hauteur } z_i = f(\xi_i, \eta_i)\\ &\approx \text{volume limité par } D_i \text{ et la surface } S_i\end{aligned}$$

On pose alors

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i$$

Posons $\delta = \max_i d_i$ avec d_i = diamètre du plus petit cercle contenant D_i. Alors, on définit

$$\iint_D f\, dA = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} V_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i$$

et ceci indépendamment du choix des D_i, des ξ_i et des η_i.

On note aussi $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ au lieu de $\iint_D f\, dA$.
L'élément $dA = dxdy$ est l'élément différentiel de surface.

8.1.2 Propriétés de l'intégrale double

En utilisant les propriétés des limites, on démontre que :

1. $\iint_D (f+g)\, dA = \iint_D f\, dA + \iint_D g\, dA$
2. $\iint_D \alpha \cdot f\, dA = \alpha \cdot \iint_D f\, dA$
3. Si $D = D' \cup D''$ et $D' \cap D'' = \emptyset$ alors

$$\iint_D f\, dA = \iint_{D'} f\, dA + \iint_{D''} f\, dA$$

4. si $f \leqslant g$ sur D alors $\iint_D f\, dA \leqslant \iint_D g\, dA$.
5. si $f(x, y) = 1$ alors $\iint_D 1 \cdot dA = \text{Aire}(D)$

8.1.3 Calcul effectif

Sur un rectangle

Supposons que D soit un rectangle : $D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b\,,\ c \leqslant y \leqslant d\}$.

Soit $A(x)$ est l'aire de la section $PP'Q'Q$ avec x fixé $\in [a; b]$.

Alors

$$I = \iint_D f(x,y)\; dxdy = \int_a^b A(x)\; dx$$

Or pour $x = x_0$ fixé, on a $A(x_0) = \displaystyle\int_c^d f(x_0,\, y)\; dy$. Donc finalement

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\; dy \right)\; dx.$$

On intègre donc d'abord selon y en considérant x comme un paramètre et ensuite selon x. Mais on peut faire l'inverse. On obtient donc aussi

$$I = \int_c^d \left(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\; dx}_{=B(y)} \right)\; dy.$$

Cas particulier : si

$$f(x,y) = p(x)q(y)$$

alors

$$A(x) = \int_c^d p(x)q(y)\; dy = p(x) \cdot \int_c^d q(y)\; dy$$

et alors

$$I = \int_a^b \left(p(x) \int_c^d q(y)\, dy \right)\; dx = \int_a^b p(x)\, dx \cdot \int_c^d q(y)\, dy.$$

L'intégrale double, est dans ce cas le produit de 2 intégrales simples.

Cas général

Supposons que l'on peut trouver deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ définie entre x_1 et x_2 telles que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [x_1; x_2]\;\; \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

L'aire de la section située dans le plan vertical $x = x_0$ est alors égale à

$$A(x_0) = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0,y)\; dy$$

et alors

$$\iint_D f(x,y)\; dxdy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\; dy \right) dx.$$

De façon analogue, on peut d'abord intégrer selon la variable x qui varie entre $\theta(y)$ et $\sigma(y)$ et ensuite selon y. On obtient

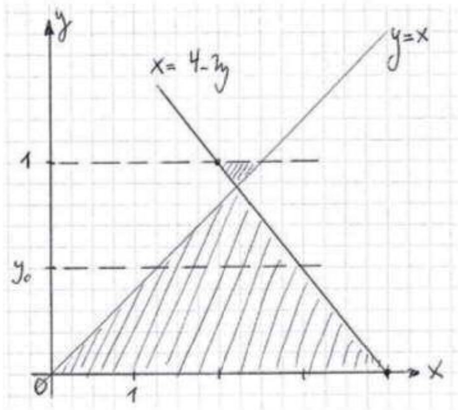
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{\theta(y)}^{\sigma(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Remarque : En général, il faut décomposer D en plusieurs sous-domaines pour trouver $\phi(x)$ et $\psi(x)$.

Remarque : Le choix de l'ordre d'intégration ne change rien en théorie mais, en pratique, il est important. Un bon choix peut conduire à un petit nombre d'intégrales alors qu'un mauvais choix peut même amener à une intégrale impossible à calculer.

Exemples 8.1.

(1) Considérons la fonction $f(x,y) = x+y$ sur le domaine D ci-contre



Prenons $y = y_0$ fixé $\Longleftrightarrow$ on intègre d'abord selon x. Alors

$$A(y_0) = \int_{x=y_0}^{x=4-2y_0}(x+y_0)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+xy_0\right)\Big|_{x=y_0}^{x=4-2y_0} = \cdots = 8-4y_0-\frac{3}{2}y_0^2.$$

Donc

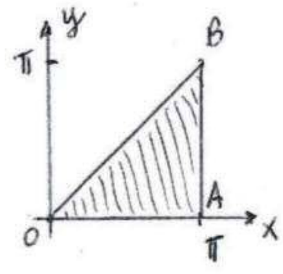
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{y=0}^{y=1}\left(8-4y-\frac{3}{2}y^2\right)dy = \left(8y-2y^2-\frac{1}{2}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{2}.$$

Si on intègre d'abord selon y et ensuite selon x, il faut calculer 3 intégrales :

$$\int_{x=0}^{x=1}\ldots\,dA + \int_{x=1}^{x=2}\ldots\,dA + \int_{x=2}^{x=4}\ldots\,dA.$$

(2) soit $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}\cdot\sin^2 x$ sur le domaine
$D =$ triangle de sommets $O(0,0)$, $A(\pi,0)$ et $B(\pi,\pi)$.

Domaine D :



Intégration d'abord selon y :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x=0}^{x=\pi}\left(\int_{y=0}^{y=x} \frac{y}{x^2}\sin^2 x\,dy\right)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{x^2}\sin^2 x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Intégration d'abord selon y :

$$I = \int_{y=0}^{\pi}\left(\int_{x=y}^{x=\pi} y \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\right)\,dy = \int_{y=0}^{\pi} y \cdot \left(\int_{x=y}^{x=\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\right)\,dy = \dots$$

Impossible d'intégrer $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

(3) $f(x,y) = 2xy$ sur le domaine $D =$ quart de cercle de rayon 1 et de centre $O(0,0)$.

$$\iint_D 2xy\,dA = \int_0^1 \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} 2xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\cdot\left[y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 x(1-x^2)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

8.1.4 Applications

Centre de masse

(A) Corps ponctuels

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OP_i}$$

avec $M = \sum_{i=1}^{n} m_i =$ masse totale.
Le point G ne dépend pas de l'origine O choisie. En effet si on prend O', on obtient

$$\overrightarrow{O'G} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{O'P_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{O'O} + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OP_i}$$
$$= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG}.$$

(B) Cas général : soit D un domaine fini de masse spécifique $\mu(x,y)$.

Alors la masse m_i d'un très petit sous-domaine D_i est environ égale à

$$m_i = \mu(x,y) \cdot \Delta A_i$$

avec $\Delta A_i = \text{Aire}(D_i)$.
Masse totale :

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad M = \iint_D \mu(x,y)\, dA.$$

Pour le centre de masse, chaque D_i donne une contribution de

$$m_i \cdot \overrightarrow{OP_i} = \mu(P_i) \cdot \Delta A_i \cdot \overrightarrow{OP_i}.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iint_D \mu(x,y) \cdot \overrightarrow{OP}\, dxdy \qquad \text{avec } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En choisissant un système d'axes, et en notant (x_G, y_G) les coordonnées de G, on obtient

$$\boxed{x_G = \frac{1}{M} \iint_D x \cdot \mu(x,y)\, dxdy} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y_G = \frac{1}{M} \iint_D y \cdot \mu(x,y)\, dxdy.} \tag{8.1}$$

Exemples 8.2.

1. Centre de masse d'un demi disque homogène ($\mu \equiv 1$) de rayon R.

Masse totale :

$$M = \iint_D 1\, dxdy = A = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Centre de masse : par symétrie, on a $x_G = 0$.

Pour y_G la formule 8.1 donne

$$
\begin{aligned}
y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\ dxdy &= \frac{2}{\pi R^2}\cdot\int_{x=-R}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\ dydx \\
&= \frac{2}{\pi R^2}\cdot\int_{x=-R}^{R}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\
&= \frac{2}{\pi R^2}\cdot\int_{x=-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\cdot\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\cdot\left(2R^3-\frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4}{3\pi}R.
\end{aligned}
$$

2. Centre de masse d'un triangle homogène ($\mu \equiv 1$).

A l'aide d'une translation et d'une rotation, on peut toujours se ramener au cas suivant :

$$A(0,0), \quad B(x_B, y_B) \quad \text{et} \quad C(x_B, y_C).$$

Equation de la droite AB : $y = mx + h = \frac{y_B}{x_B}\cdot x$
Droite AC : $y = mx + h = \frac{y_C}{x_B}\cdot x$
Masse du triangle = aire du triangle = $A = \frac{1}{2}x_B\cdot(y_C - y_B)$
Alors

$$
\begin{aligned}
\iint_\Delta x\ dxdy &= \int_{x=0}^{x_B}\left(\int_{\frac{y_B}{x_B}\cdot x}^{\frac{y_C}{x_B}\cdot x} x\ dy\right)dx = \int_{x=0}^{x_B} x\cdot\left(\frac{y_C}{x_B}\cdot x - \frac{y_B}{x_B}\cdot x\right)dx \\
&= \int_{x=0}^{x_B}\frac{y_C-y_B}{x_B}\,x^2\ dx = \frac{1}{3}\ \frac{y_C-y_B}{x_B}\ x_B^3 \\
&= \frac{1}{3}x_B^2(y_C-y_B)
\end{aligned}
$$

et donc

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_\Delta x\ dxdy = \frac{2}{x_B(y_C-y_B)}\cdot\frac{1}{3}x_B^2(y_C-y_B) = \frac{2}{3}x_B = \frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C).$$

De même

$$
\begin{aligned}
\iint_\Delta y\ dxdy &= \int_{x=0}^{x_B}\left(\int_{\frac{y_B}{x_B}\cdot x}^{\frac{y_C}{x_B}\cdot x} y\ dy\right)dx = \int_{x=0}^{x_B}\frac{1}{2}\ \left(\frac{y_C^2}{x_B^2}-\frac{y_B^2}{x_B^2}\right)x^2\ dx \\
&= \frac{1}{6}\ \left(\frac{y_C^2}{x_B^2}-\frac{y_B^2}{x_B^2}\right)\cdot x_B^3 = \frac{1}{6}\ x_B(y_C^2-y_B^2).
\end{aligned}
$$

et donc

$$y_G = \frac{1}{A}\iint_\Delta y\, dxdy = \frac{2}{x_B(y_C - y_B)} \cdot \frac{1}{6}\, x_B(y_C^2 - y_B^2) = \frac{1}{3}(y_B + y_C) = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C).$$

On a donc montré que dans un triangle ABC :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Propriété du centre de masse : Soit $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$ et G_i le centre de masse de D_i et m_i la masse de D_i. Alors G = barycentre des points G_i affectés des masses m_i :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}(m_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + \cdots + m_n \cdot \overrightarrow{OG_n})$$

Théorème 8.3 (Théorème de Guldin). *Soit D un domaine homogène du plan dont l'aire vaut A. Soit $G(x_G, y_G)$ le centre de gravité de D. Soit V le volume du corps de révolution engendré par rotation de D autour de l'axe Ox. Alors*

$$\boxed{V = 2\pi y_G \cdot A}$$

V = (circonférence du cercle décrit par G) × (aire de D)

Démonstration : On a vu au chapitre 5 que $V = \pi \int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x)\right]\, dx$. Donc

$$y_G = \frac{1}{A}\iint_D y dxdy = \frac{1}{A}\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} y\, dy\right) dx = \frac{1}{A}\int_a^b \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{f(x)}^{g(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2A}\int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x)\right]\, dx = \frac{1}{2A} \cdot \frac{V}{\pi}.$$

Moment d'inertie

Corps ponctuel de masse m tournant à une distance r autour d'un axe. Alors

$$J = mr^2.$$

Corps étendu D de masse spécifique $\mu(x, y)$ (= masse par unité de surface).
Tournant autour de l'axe Ox :

$$J_x = \iint_D y^2 \mu(x, y)\, dxdy.$$

Tournant autour de l'axe Oy :

$$J_y = \iint_D x^2 \mu(x, y)\, dxdy.$$

Théorème 8.4 (Théorème de Steiner). *Notons J_y^G le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à Oy et passant par le centre de gravité $G(x_G, y_G)$.*

Alors

$$J_y = J_y^G + Mx_G^2$$

où $M = \iint_D \mu(x, y)\, dxdy$ est la masse totale

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
J_y^G &= \iint_D (x - x_G)^2 \mu(x, y)\, dxdy = \iint_D \left[x^2 - 2xx_G + x_G^2\right] \cdot \mu(x, y)\, dxdy \\
&= \iint_D x^2 \mu(x, y)\, dxdy - 2x_G \iint_D x\mu(x, y)\, dxdy + x_G^2 \iint_D \mu(x, y)\, dxdy \\
&= J_y - 2x_G \cdot Mx_G + Mx_G^2 = J_y - Mx_G^2
\end{aligned}$$

□

8.1.5 Intégration sur tout $\mathbb{R}^2$

Soit $f(x, y)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Comment définir $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy$?

(A) Cas d'une fonction positive : soit $f(x, y) \geqslant 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
Soit $\{D_n\}$ une suite de sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant les 2 propriétés suivantes :

(1) $D_n \subset D_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Pour toute boule ouverte $B_r = B(O,r)$, il existe un $n_r \in \mathbb{N}$ avec $B_r \subset D_{n_r}$. (Ceci implique que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{R}^2$.)

Posons alors

$$I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\, dxdy.$$

- Si la limite $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ existe, on définit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\, dxdy.$$

On peut montrer que cette définition est bonne dans le sens qu'elle ne dépend pas du choix des D_n.

- Si $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\, dxdy = +\infty$, on dit que l'intégrale $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy$ **diverge**.

Critère de comparaison : soient $0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$.

(i) Si $\iint_{\mathbb{R}^2} g\, dA$ converge alors $\iint_{\mathbb{R}^2} f\, dA$ converge aussi ;

(ii) Si $\iint_{\mathbb{R}^2} f\, dA$ diverge alors $\iint_{\mathbb{R}^2} g\, dA$ diverge aussi.

(B) Cas d'une fonction quelconque : si $f(x,y)$ est quelconque, on considère d'abord l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dxdy.$$

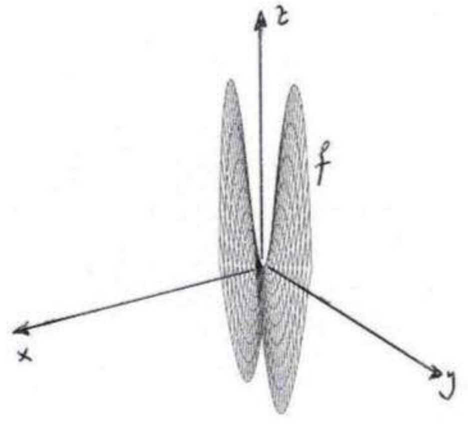
(1) Si cette intégrale converge on dit que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, on peut montrer que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\, dxdy$$

existe et est indépendante du choix des D_n.

(2) Dans le cas où $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dxdy$ n'est pas convergente, on ne peut pas définir $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy$ comme précédemment car cette limite dépend du choix des D_n.

Exemple : $f(x,y) = x^2 - y^2$.



Soit D_n le carré de centre $(0,0)$ et de côté $2n$. Alors

$$\iint_{D_n} f(x,y)\; dxdy = \int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} \left(x^2 - y^2\right)\; dx\; dy = \int_{-n}^{n} (\frac{2}{3}n^3 - 2y^2 n)\; dy = \frac{4}{3}n^4 - \frac{4}{3}n^4 = 0$$

et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\; dA = 0$.
Soit $D'_n = \{(x,y) \mid -2n < x < 2n,\; n < y < n\}$ le rectangle de centre $(0,0)$ et de côtés $2n$ et n. Alors

$$\begin{aligned}
\iint_{D'_n} f(x,y)\; dxdy &= \int_{-2n}^{2n}\int_{-n}^{n} \left(x^2 - y^2\right)\; dydx = \int_{-2n}^{2n} \left[x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-n}^{y=n} dx \\
&= \int_{-2n}^{2n} (2x^2 n - \frac{2}{3}n^3)\; dx = \left[\frac{2}{3}nx^3 - \frac{2}{3}n^3 x\right]_{-2n}^{2n} \\
&= \frac{32}{3}n^4 - \frac{8}{3}n^4 = 8n^4.
\end{aligned}$$

On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D'_n} f(x,y)\; dA = +\infty$.

8.1.6 Changement de variables

Soit D un domaine défini dans le plan Oxy. Considérons un changement de variables $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$h(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\nabla h(u,v) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{pmatrix}.$$

Le domaine D se transforme en un domaine $\tilde{D}$ dans le plan Ouv.

Considérons un petit rectangle situé dans $\tilde{D}$ et limité par les points

$$P(u,v), \qquad Q(u+\Delta u, v), \qquad R(u+\Delta u, v+\Delta v) \qquad \text{et} \qquad S(u, v+\Delta v).$$

Son aire est égale à $\Delta u \Delta v$. Calculons la surface ΔA correspondante dans D. Approximation du 1er ordre autour du point $P(u, v)$

$$\begin{aligned} h(u+\Delta u, v) &= h(u,v) + \nabla h(u,v) \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} + o(\Delta u) \\ &\approx h(u,v) + \begin{pmatrix} x_u(u,v)\cdot \Delta u \\ y_u(u,v) \cdot \Delta u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} h(u, v+\Delta v) &= h(u,v) + \nabla h(u,v) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} + o(\Delta v) \\ &\approx h(u,v) + \begin{pmatrix} x_v(u,v)\cdot \Delta v \\ y_v(u,v) \cdot \Delta v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$\overrightarrow{a} = h(u+\Delta u, v) - h(u,v) \approx \begin{pmatrix} x_u \cdot \Delta u \\ y_u \cdot \Delta u \end{pmatrix}.$$

et

$$\overrightarrow{b} = h(u, v+\Delta v) - h(u,v) \approx \begin{pmatrix} x_v \cdot \Delta v \\ y_v \cdot \Delta v \end{pmatrix}.$$

L'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ vaut $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|$. Si $\Delta u, \Delta v \to 0$ alors

$$\begin{aligned} dxdy = dA &= \left\| \begin{pmatrix} x_u du \\ y_u du \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_v dv \\ y_v dv \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_u y_v - y_u x_v \end{pmatrix} dudv \right\| \\ &= |x_u y_v - x_v y_u| \cdot dudv = \left|\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| dudv = \left|\det \nabla h\right| dudv. \end{aligned}$$

Notation : le terme $|\det \nabla h| = \left|\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right|$ est aussi noté $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$. C'est la valeur absolue du jacobien de h. On a ainsi démontré l'égalité

$$\boxed{dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.}$$

Lors d'un changement de variables donné par $h(u,v) = (x,y)$, il faut donc remplacer

- $dxdy$ par $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$
- D par $\tilde{D}$
- $f(x,y)$ par $\tilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$.

Ainsi

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.}$$

Exemple 8.5. Soit $D = \Big\{(x,y) \mid x > 0, y > 0,\ 1 \leqslant xy \leqslant 4,\ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 3\Big\}$.
Calculons
$$J = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

On pose $\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy. \end{array} \right.$

- D devient $\tilde{D} = \big\{1 \leqslant u \leqslant 3\,,\ 2 \leqslant v \leqslant 8\big\} = [1;3] \times [2;8]$ (c'est un rectangle).
- $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left| \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \right| = 4(x^2 + y^2)$. Donc

$$dudv = 4(x^2 + y^2)dxdy.$$

L'intégrale devient
$$J = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{4} dudv = \frac{1}{4} \int_1^3 du \cdot \int_2^8 dv = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 6 = 3.$$

8.1.7 Application : coordonnées polaires

si $\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{array} \right.$ alors
$$\nabla h = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

et $\det(\nabla h) = \rho$. On a donc
$$\boxed{dx\, dy = \rho\; d\rho\, d\varphi}$$

Exemple : Soit D le demi-disque supérieur de centre $(1,0)$ et de rayon 1 et $f(x,y) = y$.
On veut calculer
$$I = \iint_D f(x,y)\, dxdy.$$

Coordonnées polaires :
- le domaine D devient $\rho \leqslant 2\cos\varphi$;
- la fonction f devient $\tilde{f}(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$.

L'intégrale devient donc
$$\begin{aligned} I = \iint_D f(x,y)\, dxdy &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{2\cos\varphi} \rho\sin\varphi\; \rho\, d\rho d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{2\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi\; d\rho d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin(\varphi) \cdot \frac{1}{3}\rho^3 \Big|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\varphi} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{8}{3} \sin(\varphi) \cdot \cos^3(\varphi)\, d\varphi = -\frac{2}{3}\cos^4\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Intégration sur $\mathbb{R}^2$

En coordonnées polaires, l'intégrale sur tout $\mathbb{R}^2$ devient

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \lim_{R\to\infty} \int_{\rho=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \tilde{f}(\rho,\varphi)\,\rho\,d\varphi d\rho = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\rho,\varphi)\,\rho\,d\varphi d\rho$$

Application : calcul de l'intégrale d'erreur

On veut calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.
Problème : e^{-x^2} ne possède pas de primitive analytique.

Solution : on calcule I^2 ! ! !

$$\begin{aligned} I\cdot I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \qquad \Big|\ \text{coordonnées polaires} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho\,d\varphi = 2\pi\cdot\Big[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\Big]_0^{\infty} = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Donc

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Conséquence : soit $p > 0$ et $q \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2+qx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{p}x-\frac{q}{2\sqrt{p}})^2+\frac{q^2}{4p}}\,dx = e^{\frac{q^2}{4p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{p}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{q^2}{4p}}.$$

En particulier, si $p = \pi$ et $q = 0$ on trouve une intégrale valant 1.
$f(x) = e^{-\pi x^2}$ est donc une densité de probabilité (appelée gaussienne).

8.2 Intégrales triples

8.2.1 Définition

La définition et les propriétés de l'intégrale triple sont analogues à celles de l'intégrale double. On note

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

l'intégrale de f sur le domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ borné.

Si $f(x,y,z) \equiv 1$, on a en particulier

$$\iint_D 1\,dxdydz = Vol(D).$$

8.2.2 Calcul effectif

Soit $\tilde{D}$ la projection orthogonale de D sur le plan Oxy. Alors

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)dV &= \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=\sigma^-(x,y)}^{\sigma^+(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \\ &= \int_{x=a}^{b} \int_{y=\phi(x)}^{\psi(x)} \int_{z=\sigma^-(x,y)}^{\sigma^+(x,y)} f(x,y,z)dz\, dy\, dx.\end{aligned}$$

Exemple 8.6.

- $D =$ tétraèdre de sommets $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;4)$ et $O(0;0;0)$.
- $f(x,y,z) = x$.

$\tilde{D} =$ triangle ABO
Equation de la droite AB : $y = -2x + 2$
Equation du plan ABC : $z = -4x - 2y + 4$.

Alors

$$\begin{aligned}\iiint_D x\, dV &= \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=0}^{z=-4x-2y+4} x\, dz \right) dxdy = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} \int_0^{-4x-2y+4} x\ dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{-2x+2} \cdot \Big[xz\Big]_0^{z=-4x-2y+4} dy\, dx = \int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} \left(-4x^2 - 2xy + 4x\right)\, dy \\ &= \int_0^1 \Big[(-4x^2+4x)y - xy^2\Big]_0^{-2x+2} dx = \cdots = \int_0^1 \left(4x^3 - 8x^2 + 4x\right)\, dx \\ &= \Big[x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

8.2.3 Changement de variables

Soit $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un changement de variables donné par

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

On note $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| := \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$. Alors on a l'égalité

$$\boxed{dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw}$$

Coordonnées cylindriques

Si $h(\rho,\varphi,z) = (x,y,z)$ est définie par

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \rho > 0, \quad \varphi \in [0;\, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

alors

$$\nabla h = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_z \\ y_\rho & y_\varphi & y_z \\ z_\rho & z_\varphi & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $|\det\nabla h| = \rho$. Ceci donne la transformation

$$\boxed{dxdydz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}$$

Coordonnées sphériques

Si $h(r,\varphi,\theta) = (x,y,z)$ est définie par

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r > 0, \quad \theta \in [0;\, \pi], \quad \varphi \in [0;\, 2\pi]$$

alors ∇h est donné au paragraphe §7.5 et l'on a trouvé

$$\det\nabla h = r^2\sin\theta.$$

Noter que $r^2\sin\theta > 0$ pour $r \neq 0$ et $\theta \in]0;\theta[$.
Ceci donne la transformation

$$\boxed{dxdydz = r^2\, \sin(\theta)\; dr\, d\varphi\, d\theta}$$

Exemple : soit D la sphère de centre O et de rayon R. Alors

$$\begin{aligned} Vol(D) &= \iiint_D 1\cdot dxdydz = \iiint_D 1\cdot r^2\sin(\theta)\; drd\varphi d\theta = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} r^2\sin(\theta)d\theta\, d\varphi\, dr \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi}\sin(\theta)\; d\theta}_{=2}\cdot\underbrace{\int_0^R r^2\; dr}_{=\frac{1}{3}R^3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Application : calcul de masse

Soit D un corps dont la masse volumique est $\mu(x,y,z)$. La masse d'un petit parallélépipède rectangle est

$$\Delta m_k \approx \mu(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k.$$

En intégrant, on trouve la masse totale du corps

$$M = \iiint_D \mu(x,y,z)\ dxdydz.$$

Application : calcul du centre de gravité

Comme pour la dimension 2, le **centre de gravité** est donné par la formule :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iiint_D \mu(x,y,z) \cdot \overrightarrow{OP} \cdot dxdydz \qquad (*)$$

où $\mu(x,y,z)$ est la masse volumique et M la masse totale du corps.
En composantes, l'équation $(*)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \iiint_D \mu(x,y,z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dxdydz$$

Exemple 8.7. Centre de gravité de l'hémisphère nord homogène ($\mu \equiv 1$).
$D = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0\right\}$

Par symétrie, $x_G = y_G = 0$.
De plus $M = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{2}{3}\pi R^3$.

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M} \iiint_D z\ dxdydz \\
&= \frac{3}{2 \cdot \pi R^3} \iiint_{\tilde{D}} r\cos(\theta) \cdot r^2 \sin(\theta)\ \ drd\varphi d\theta \\
&= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R r^3\ dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta\ \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{\pi R^4}{4} \\
&= 3\frac{R}{8}.
\end{aligned}$$

Application : moment (polaire) d'inertie

Rappel : $J = mr^2$ où m est la masse et r la distance entre le corps et l'axe de rotation

Corps de domaine D et de masse volumique $\mu(x, y, z)$.
Axe vertical passant par l'origine. Alors

$$\begin{aligned} J_z &= \iiint_D (x^2+y^2)\mu(x,y,z)\ dxdydz \qquad \Big|\ \text{coordonnées cylindriques} \\ &= \iiint_{\tilde{D}} \rho^2 \tilde{\mu}(\rho,\varphi,z)\ \rho\ \ d\rho d\varphi dz = \iiint_{\tilde{D}} \rho^3 \tilde{\mu}(\rho,\varphi,z)\ \ d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

Exemple : cylindre homogène de base un cercle de centre $(0, 1)$ de rayon 1 et de hauteur 1

Equations en coordonnées cylindriques : $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ \rho \leqslant 2\sin\varphi \\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases}$

$$\begin{aligned} J_z &= \iiint_{\tilde{D}} \rho^3 \cdot 1 \cdot d\rho d\varphi dz = \int_0^h \int_0^\pi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3\ d\rho d\varphi dz \\ &= h \cdot \int_0^\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{2\sin\varphi} d\varphi \\ &= 4h \underbrace{\int_0^\pi \sin^4\varphi\ d\varphi}_{=\cdots=\frac{3\pi}{8}} = \frac{3}{2}\pi h. \end{aligned}$$

8.3 Intégrales de surfaces

8.3.1 Représentation paramétrique d'une surface

Nous traiterons ici uniquement le cas des surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 8.8. Une **surface** est l'image d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ par une application continue $\Gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$(u,v) \in D$ sont les **paramètres**.

Remarque 8.9.

• Si l'on peut trouver une fonction $f(x,y)$ telle que $z = f(x,y)$, alors la surface est le graphe de f.

• Si l'on peut éliminer les paramètres u et v on obtient l'équation cartésienne de la surface $\Gamma : F(x,y,z) = 0$.

Exemples 8.10.

1. L'équation $x^2 + y^2 = 4$ est l'équation cartésienne d'un cylindre de révolution vertical d'axe Oz et de rayon 2. Une paramétrisation est

$$\begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\sin u \qquad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \qquad v \in \mathbb{R} \\ z = v \end{cases}$$

ATTENTION : 1 équation dans $\mathbb{R}^3$ donne toujours une surface même si une variable n'apparaît pas.

2. Surface hélicoïdale H :

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \qquad u, v \in \mathbb{R} \\ z = c \cdot v \end{cases}$$

Si l'on fixe un paramètre $u = R$ on obtient la courbe γ située sur H

$$\begin{cases} x = R\cos v \\ y = R\sin v \\ z = c \cdot v \end{cases}$$

qui ne dépend plus que d'un paramètre v. C'est une <u>hélice</u>.

Plus généralement, si l'on fixe un des 2 paramètres d'une surface, on obtient une courbe situé sur la surface.

3. Sphère de centre O et de rayon R :

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi]$$

- En fixant $\theta = \theta_0$, on a
$$z = z_0 = R\cos\theta_0 = cste$$
et on obtient un cercle dans le plan horizontal $z = z_0$: c'est **un parallèle**. Si $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est l'équateur.
- Si l'on fixe $\varphi = \varphi_0$, on obtient un cercle dans le plan vertical d'équation $\sin(\varphi_0) \cdot x - \cos(\varphi_0) \cdot y = 0$: c'est **un méridien**.

8.3.2 Calcul de l'aire d'une surface

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et $\Gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface définie par

$$\Gamma(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

En reprenant le calcul effectué pour le changement de variables (cf. §8.1.6), on obtient

$\vec{a} \approx \Gamma_u \, du$ et $\vec{b} \approx \Gamma_v \, dv$ avec

$$\Gamma_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\boxed{dS = \|\Gamma_u \times \Gamma_v\| \, dudv}$$

et l'aire de la surface vaut

$$\boxed{A_S = \iint_{(u,v)\in D} \|\Gamma_u \times \Gamma_v\| \, dudv}$$

Relation importante :

$$\|\Gamma_u \times \Gamma_v\|^2 = \|\Gamma_u\|^2 \cdot \|\Gamma_v\|^2 \sin^2\alpha = \|\Gamma_u\|^2 \cdot \|\Gamma_v\|^2 (1-\cos^2\alpha) = \|\Gamma_u\|^2 \cdot \|\Gamma_v\|^2 - (\Gamma_u \bullet \Gamma_v)^2$$

Exemple 8.11. Aire d'une zone sphérique :

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

On a

$$\Gamma_\varphi = \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \\ z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_\theta = \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \\ z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\Gamma_\varphi \times \Gamma_\theta = \begin{pmatrix} -R^2\cos\varphi\sin^2\theta \\ -R^2\sin\varphi\sin^2\theta \\ -R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc $\|\Gamma_\varphi \times \Gamma_\theta\| = R^2\sin\theta$. Alors

$$\boxed{dS = R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta}$$

L'aire d'une "bande sphérique" comprise entre θ_1 et θ_2 est donc

$$S = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} R^2 \sin(\theta) \; d\theta \; d\varphi = 2\pi \cdot R^2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \; d\theta = 2\pi R^2 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = 2\pi R \cdot h$$

où $h = R\cos\theta_1 - R\cos\theta_2$ = hauteur de la bande.

On retrouve : aire de la sphère $= 4\pi R^2$.

8.3.3 Cas explicite $z = f(x, y)$

Si la surface est le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$ alors une paramétrisation évidente est

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Donc $\Gamma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}$ et $\Gamma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$ ce qui donne

$$\|\Gamma_u \times \Gamma_v\| = \left\| \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}$$

L'aire de la surface vaut donc

$$\boxed{A_S = \iint_{(x,y)\in D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \iint_{(x,y)\in D} \sqrt{1 + (\nabla f)^2}\, dxdy}$$

où $(\nabla f)^2 = \nabla f \bullet \nabla f = \nabla f \cdot \nabla^T f$.

Rappel : longueur d'une courbe. $L = \displaystyle\int_{x\in I} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

Exemple 8.12.
Calculer l'aire de la surface $z = f(x, y) = xy$ située à l'intérieur du cylindre $(\Gamma) : x^2+y^2 = 1$.

$$\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, dxdy$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\; dxdy = \iint_{\substack{(\rho,\varphi) \\ \rho \leqslant 1}} \sqrt{1 + \rho^2}\; \rho\; d\rho\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}\; d\rho = 2\pi \frac{1}{3}(1 + \rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Application

Surface $\Gamma(u, v)$, $(u, v) \in D$ de masse surfacique $\mu(x, y, z)$. Alors sa masse est $M = \displaystyle\iint_D \mu\, dS$.

8.4 Intégrales dépendant d'un paramètre

Considérons une fonction $f(x,t)$ à 2 variables. Supposons que $f(x,t)$ et $f_t(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ sont continues sur un rectangle $D = \{(x,t) \,|\, x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$.
Posons

$$F(t) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)\, dx.$$

Alors

Théorème 8.13 (Théorème 1). *$F(t)$ est dérivable (même de classe C^1) et*

$$F'(t) = \int_{x_1}^{x_2} f_t(x,t)\, dt.$$

On peut passer la dérivée à l'intérieur de l'intégrale.

On généralise ce résultat au cas où les bornes dépendent de t.

Théorème 8.14 (Théorème 2). *Soit*

$$F(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t)\, dx.$$

Supposons que $f(x,t)$ et $f_t(x,t)$ sont continues en x et t et que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont dérivables. Alors

$$F'(t) = f\big((x_2(t),t\big) \cdot \dot{x_2}(t) - f\big((x_1(t),t\big) \cdot \dot{x_1}(t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f_t(x,t)\, dx$$

Les théorèmes 1 et 2 se généralisent pour les fonctions à plus de 2 variables et pour les intégrales doubles ou triples.

Ces 2 théorèmes restent valables pour les intégrales impropres

$$\int_I f(x,t)\, dx$$

$\Big($ avec $I = \,]a;\,+\infty[$ et/ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x,t) = \pm\infty \Big)$
si l'on rajoute ces 2 hypothèses :

(I) il existe une fonction $g(x) \geqslant 0$ définie sur I avec $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ pour tout $t \in [t_1;t_2]$ et $\displaystyle\int_I g(x)\, dx < +\infty$;

(II) il existe une fonction $\psi(x) \geqslant 0$ définie sur I avec $|f_t(x,t)| \leqslant \psi(x)$ pour tout $t \in [t_1;t_2]$ et $\displaystyle\int_I \psi(x)\, dx < +\infty$.

Applications

1. Calcul de $I_\alpha(t) = \displaystyle\int_0^\infty \underbrace{e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin(tx)}{x}}_{=f(x,t)}\, dx \quad (\alpha > 0)$.

   Remarquons d'abord que $I_\alpha(0) = 0$.
   Intégrale impropre en $+\infty$ mais pas en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} f(x,t) = 1 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(tx)}{x} = t$.
   On a
   $$f_t(x,t) = e^{-\alpha x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos(tx) \cdot x = e^{-\alpha x}\cos(tx).$$
   Vérifions les hypothèses (I) et (II) :

   (I) $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{e^{-\alpha x}}{x}$ dont l'intégrale sur $[1;\,+\infty[$ converge ;

   (II) $|f_t(x,t)| \leqslant e^{-\alpha x}$ et $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\alpha x}\, dx$ converge.

Le théorème 1 donne alors

$$\begin{aligned} I'_\alpha(t) &= \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(tx)\,dx \overset{I.P.P}{=} \frac{1}{\alpha^2+t^2}\left(t\sin tx - \alpha\cos tx\right)e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}. \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$I_\alpha(t) = \int \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}\,dt\ + C\ = \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right) + C.$$

Comme $I_\alpha(0) = 0$ on en déduit que $C = 0$ et donc finalement que

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin(tx)}{x}\ dx = I_\alpha(t) = \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)}$$

2. Calcul de

$$J = \int_0^\infty e^{-x}\cdot x\cdot\sin x\ dx.$$

On pose

$$I(t) = \int_0^\infty \sin(x)\cdot e^{-tx}\,dx$$

pour $t \geqslant \epsilon > 0$.
Alors le théorème 1 (les hypothèses (I) et (II) sont remplies) donne

$$I'(t) = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx = \int_0^\infty \sin(x)\cdot e^{-tx}\cdot(-x)\,dx \quad\Longrightarrow\quad J = -I'(1).$$

Mais une intégration par parties donne

$$I(t) = \int_0^\infty \sin(x)\cdot e^{-tx}\,dx = \Big[-\frac{1}{1+t^2}(t\sin x + \cos x)e^{-tx}\Big]_0^\infty = \frac{1}{1+t^2}.$$

Donc $I'(t) = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$. On en conclut que $J = -I'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Intégrale d'Euler

Par définition on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Ici, x est le paramètre et t la variable d'intégration.
Pour tout $x > 0$, l'intégrale converge.
Propriétés :

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$
- $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \underbrace{t^x}_{f}\cdot\underbrace{e^{-t}}_{g'}\,dt \overset{\text{I.P.P.}}{=} \underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty x\cdot t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$

  En particulier, si $x = n \in \mathbb{N}$, alors

  $$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = n(n-1)\cdot\Gamma(n-1) = \cdots = n!\cdot\Gamma(1) = n!$$

  On peut donc dire que la fonction $\Gamma(x)$ étend la factorielle à tout $\mathbb{R}$.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt \underbrace{=}_{t=u^2} \int_{u=0}^\infty u^{-1}e^{-u^2}2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$

8.5 Intégrales curvilignes

On ne traitera ici que le cas de courbes dans $\mathbb{R}^3$ mais les cas $n = 2$ ou $n > 3$ se déduisent aisément. On considère une courbe (dérivable)

$$\gamma : \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

8.5.1 Intégration d'un champ scalaire

Soit $f(x, y, z)$ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^3$. On a envie de définir

$$\int_\gamma f \cdot ds.$$

Rappel :

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt = \text{élément différentiel de longueur} = \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

On pose alors

$$\int_\gamma f \cdot ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\ \ dt$$

Interprétation physique : si $f(x, y, z)$ est la masse par unité de longueur de la courbe γ, alors $\displaystyle\int_\gamma f \cdot ds$ est la masse totale de la courbe.

8.5.2 Intégration d'un champ vectoriel

Soit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une courbe et $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$ un champ vectoriel. Nous définissons

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\ \ dt$$

où $\bullet$ désigne le produit scalaire.

Interprétation physique : si $\overrightarrow{F}$ est un champ de force et γ la trajectoire d'un mobile, alors

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds}$$

est le **travail** de F le long de γ.

Exemple : Soit le champ de force $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$.
Calculer le travail de F entre les points $P(0, 1)$ et $Q(1, 2)$

(a) le long de la droite d passant par P et Q ;

(b) le long de la parabole Γ d'équation $y = x^2 + 1$.

Solution :

(a) Paramétrisation de d : $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Alors

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le champ de force sur γ vaut

$$F(\gamma(t)) = F(t, t+1) = \begin{pmatrix} t^2 - (t+1) \\ (t+1)^2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - t - 1 \\ t^2 + 3t + 1 \end{pmatrix}$$

et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int_d F \bullet ds &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - t - 1 \\ t^2 + 3t + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - t - 1 + t^2 + 3t + 1)\, dt = [\frac{2}{3}t^3 + t^2]_0^1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

(b) Paramétrisation de la parabole Γ : $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Alors

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

et

$$F(\gamma(t)) = F(t, t^2+1) = \begin{pmatrix} t^2 - (t^2+1) \\ (t^2+1)^2 + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t^4 + 2t^2 + t + 1 \end{pmatrix}$$

et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \bullet ds &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ t^4 + 2t^2 + t + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad dt \\ &= \int_0^1 2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1 \quad dt = \left[\frac{t^6}{3} + t^4 + \frac{2}{3}t^3 + t^2 - t\right]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

On constate que le travail de F dépend du chemin parcouru. Ceci est vrai en général. Mais si F est le gradient d'une fonction, alors le travail est indépendant du chemin parcouru.

Théorème 8.15. *Soit $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^2 et*

$$\overrightarrow{F} = \nabla V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

le gradient de V.
Soit $\gamma : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe avec $\gamma(a) = P$ (point de départ) et $\gamma(b) = Q$ (point d'arrivée). Alors

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds} = V\big(\gamma(b)\big) - V\big(\gamma(a)\big) = V|_Q - V|_P.$$

Le travail de F ne dépend pas du chemin parcouru mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée.

En particulier, sur une courbe fermée (P=Q), on a $\oint_\gamma \nabla V \cdot \overrightarrow{ds} = 0$.

DÉMONSTRATION :

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds} = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_a^b \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \Big[V(\gamma(t))\Big]_a^b$$
$$= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)).$$

car la règle de composition donne $\frac{d}{dt}V(\gamma(t)) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$. □

Définition 8.16. Le champ scalaire V est appelé **potentiel** et on dit que $\overrightarrow{F}$ est un **champ conservatif** lorsqu'il existe V avec $\overrightarrow{F} = \nabla V$ (et V de classe C^2).

Comment savoir si un champ vectoriel donné est conservatif ou non ?

Supposons que $F = \nabla V$ avec V de classe C^2 . Alors

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Comme V est de classe C^2, on doit avoir $V_{yx} = V_{xy}$, $V_{zy} = V_{yz}$ et $V_{zx} = V_{xz}$ ce qui donne

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \qquad (CI)$$

C'est une condition nécessaire. Si F ne satisfait pas (CI), il ne peut pas être conservatif.

Le théorème suivant affirme, que sur certains domaines D, (CI) est aussi une condition suffisante :
D'abord une définition :

Définition 8.17 (Simplement connexe)**.** Un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ ($\subset \mathbb{R}^2$) est dit **simplement connexe**

(1) si pour tout couple de points $P, Q \in D$ il existe une courbe (continue) contenue dans D et reliant P et Q. ;
(2) et si toute courbe fermée contenue dans D peut se contracter en un seul point sans sortir de D (il n'y a pas de "trous" dans D).

Théorème 8.18. *Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert simplement connexe et $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel tel que la condition (CI) soit satisfaite.*
Alors il existe un potentiel $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\nabla V = F.$$

Remarque : le théorème est aussi vrai dans le plan : il suffit de remplacer la condition (CI) par

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

DÉMONSTRATION :

On utilise les résultats sur les intégrales avec paramètres.

(i) On suppose d'abord que D est un parallélépipède rectangle (ou un rectangle si on est dans $\mathbb{R}^2$).
Choisissons un point $(x_0, y_0, z_0) \in D$ et pour tout $(x, y, z) \in D$, posons

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_1(\xi, y_0, z_0)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} F_2(x, \eta, z_0)\, d\eta + \int_{z_0}^{z} F_3(x, y, \zeta)\, d\zeta$$

Alors

$$\begin{aligned}
V_x(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) &= F_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, \eta, z_0)\, d\eta + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, \zeta)\, d\zeta \\
&= F_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial \eta}(x, \eta, z_0)\, d\eta + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta}(x, y, \zeta)\, d\zeta \\
&= F_1(x, y_0, z_0) + \big[F_1(x, \eta, z_0)\big]_{y_0}^{y} + \big[F_1(x, y, \zeta)\big]_{z_0}^{z} \\
&= F_1(x, y_0, z_0) + F_1(x, y, z_0) - F_1(x, y_0, z_0) + F_1(x, y, z) - F_1(x, y, z_0) \\
&= F_1(x, y, z)
\end{aligned}$$

De même on calcule que $V_y(x,y,z) = F_2(x,y,z)$ et $V_z(x,y,z) = F_3(x,y,z)$ ce qui montre que

$$\nabla V = F.$$

(ii) Si D n'est pas un parallélépipède rectangle, on intègre de proche en proche.

□

Contre-exemple : l'hypothèse D simplement connexe est essentielle.
Considérons le champ vectoriel

$$F = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

On a

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Mais F n'est pas continu en $(0,0)$. Et donc le domaine D n'est pas simplement connexe.
Intégrons ce champ vectoriel le long d'un cercle centré à l'origine et de rayon 1 :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

$$\overrightarrow{ds} = \dot{\gamma}(t)\; dt = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

et

$$\int_\gamma F(\gamma(t)) \bullet \overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 + \cos^2 t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1\; dt = 2\pi.$$

Si le théorème s'appliquait, on devrait trouver 0.
En revanche, si on prend une courbe **fermée γ ne contenant pas le point** $(0,0)$ alors on aura bien $\int_\gamma F \bullet \overrightarrow{ds} = 0$.