# Chapitre 9

# Analyse de variance

Sommaire

# 1 Introduction

Dans le cadre **des tests d'hypothèses**, nous avons émis des hypothèses concernant la moyenne d'une population (**test de conformité**) puis comparé les moyennes de deux populations (**test d'homogénéité**). Ce chapitre a trait à la comparaison des moyennes de plusieurs populations (> 2). **L'analyse de variance** peut être vue comme une **comparaison multiple de moyennes**. Dans tous les cas, la variable étudiée est un caractère quantitatif de type continu qui suit une loi normale.

Il existe différentes types d'analyse de variance qui se distinguent par le **nombre de facteurs** étudiés (un facteur, deux facteurs, deux facteurs avec répétitions, etc), la **nature du facteur** (caractère qualitatif ou quantitatif) et la **nature des modalités** associées au facteur (modèle fixe, modèle aléatoire, modèle mixte).

Nous ne traiterons que le cas de **l'analyse de variance à un facteur contrôlé (modèle fixe)** et ceci pour deux types de données. Dans ce cas **les conclusions ne s'appliquent qu'aux p modalités étudiées**.

♦ Les différentes modalités du facteur correspondent aux différentes modalités d'un **caractère qualitatif**. Ces **modalités sont déterminées** par l'expérimentateur.

**Exemple :** On étudie l'effet de différentes types d'alimentation (Paille, Foin, Herbe, Aliment ensilé) sur le rendement des vaches laitières.

♦ Les modalités du facteur correspondent à différentes valeurs prises par une **variable aléatoire dont les valeurs sont fixées par l'expérimentateur**. L'analyse de variance à un facteur peut également permettre d'étudier la relation, pas forcément linéaire, entre deux variables quantitatives. C'est le **test de linéarité**.

**Exemple :** On étudie l'effet de différentes doses d'engrais (20, 30, 40, 50) sur le rendement du blé. Pour chaque dose d'engrais expérimentée, le rendement est étudié sur un échantillon de parcelles donné.

# 2 Conditions d'application

L'analyse de variance à un facteur contrôlé ou ANOVA1 a pour objectif de **tester l'effet d'un facteur A** sur une **variable aléatoire continue**. Ceci revient à comparer les moyennes de plusieurs populations normales et de même variance à partir d'échantillons aléatoires et indépendants les uns des autres. Chaque échantillon est soumis ou correspond à une modalité du facteur A. Le terme ANOVA indique que la comparaison multiple de moyennes correspond en faite à **la comparaison de deux variances**.

## 2.1 Structure des données

Les données relatives à une analyse de variance à un facteur contrôlé sont structurées dans un tableau du type suivant :

| *Facteur A* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***modalité 1*** | | | ***modalité i*** | | ***modalité p*** |
| $y_{11}$ | | | $y_{i1}$ | | $y_{p1}$ |
| . | | | . | | . |
| $y_{1j}$ | | | $y_{ij}$ | | $y_{pj}$ |
| . | | | . | | . |
| $y_{1n1}$ | | | . | | . |
| | | | $y_{ini}$ | | $y_{pnp}$ |
| $\overline{y}_1$ | | | $\overline{y}_i$ | | $\overline{y}_p$ |

**Notation :**

Le facteur contrôlé A présente $p$ **modalités** ($1 \leq i \leq p$). On parle aussi de niveaux ou traitements.

Le nombre de **répétitions j** pour une **modalité i** est noté $n_i$. Le nombre de répétitions pour chaque modalité du facteur n'est pas forcément le même.

La valeur prise par la variable aléatoire $Y$ pour la **modalité i** du facteur et **la répétition j** est notée $y_{ij}$ et les valeurs moyennes pour chaque modalité notée $\overline{y}_i$.

**Exemple :**

| International | National | Régional | "Récréational" |
|---|---|---|---|
| 24,8 | 45,6 | 33,4 | 31,1 |
| 26,7 | 41,1 | 34,6 | 35,7 |
| 27,5 | 34,3 | 36,4 | 37,3 |
| 30,6 | 37,6 | 39,1 | 39,4 |
| 32,4 | 39,5 | 43,8 | 40,4 |
| 38,2 | | 47,9 | 44,5 |
| 40,5 | | 49,9 | 45,4 |
| 42,9 | | 51,2 | 49,8 |
| | | | 50,1 |

Un test psychologique a été passé par 30 sportifs évoluant à des niveaux de compétition différents : international, national, régional et « récréational ». Une des mesures réalisées porte sur l'anxiété des sportifs au moment de la compétition. Celle-ci diffère-t-elle en fonction du niveau de compétition ?

## 2.2 Conditions d'application de l'analyse

Les hypothèses relatives au modèle d'analyse de variances sont nombreuses. L'analyse des **résidus $e_{ij}$**, ($y_{ij}$ - $\overline{y}_i$) est particulièrement utile pour répondre aux hypothèses de normalité et d'homoscédasticité. Mais dans le cadre d'un modèle à effet fixe, il est équivalent de tester ces hypothèses sur la variable $y_{ij}$.

### *2.2.1 Indépendance*

L'indépendance entre les différentes valeurs de la variable mesurée $y_{ij}$ est **une condition essentielle** à la réalisation de l'analyse de variance.

Les $p$ échantillons comparés sont **indépendants**.
L'ensemble des $N$ individus est réparti au hasard (**randomisation**) entre les $p$ modalités du facteur contrôlé A, $n_i$ individus recevant le traitement i.

### *2.2.2 Normalité*

La variable quantitative étudiée suit **une loi normale** dans les $p$ populations comparées.
La variable aléatoire étudiée $Y$ dont $y_{ij}$ est une représentation, suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_i,\sigma)$ sous $H_1$.

La normalité de la variable pourra être testée à l'aide d'un **test de Khi-deux d'ajustement** si les effectifs sont suffisamment importants. Sinon le test non paramétrique de **Lilliefors** permet de tester l'ajustement à loi normale lorsque les effectifs sont faibles.

On peut en fait se limiter à vérifier si la **distribution** des valeurs $e_{ij}$ ou $y_{ij}$ est **unimodale**.

**Remarque** : Si la normalité de la variable n'est pas vérifiée, soit on peut transformer cette dernière, soit avoir recours à l'équivalent non paramétrique de l'ANOVA, le **test de Kruskall-Wallis**.

### *2.2.3 Homoscédasticité*

Les $p$ populations comparées ont **même variance**.
Le facteur A agit seulement sur la moyenne de la variable $Y$ et ne change pas sa variance.

Différents tests permettent de vérifier l'égalité des variances relatives aux $p$ populations comparées $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ..... = \sigma_i^2 = ..... = \sigma_p^2 = \sigma^2$.

- Le **test de Lévène** est le test **le plus satisfaisant** pour effectuer la comparaison multiple de variances mais sa réalisation est assez longue car il correspond à une ANOVA1 sur les résidus $e_{ij}$.

- Le **test de Bartlett** est dédié à la comparaison multiple de variances avec **un nombre de répétitions $n_i$ différent** selon les modalités i du facteur. Mais ce test est très sensible à l'hypothèse de normalité des $p$ populations (peu robuste).

- Le **test de Hartley** est dédié à la comparaison multiple de variances avec un **nombre de répétitions $n_i$ identiques** selon les modalités i du facteur. Mais ce test est très sensible à l'hypothèse de normalité des $p$ populations (peu robuste).

**Remarque** : Si l'hétérogénétié entre variances est très importantes, on peut avoir recours aux statistiques non paramétriques, **test de Kruskal-Wallis**.

**Exemple :** Dans le cadre de l'exemple des sportifs, les conditions d'application de l'analyse de variance sont-elles vérifiées ?

### 2.2.4 Ro

De nombreux travaux ont étudié la **robustesse** de l'ANOVA1 vis à vis des écarts aux hypothèses faites.

| Hypothèses | Test | Robustesse |
|---|---|---|
| Normalité de $Y$ | Test du $\chi^2$ d'ajustement | Très robuste si indépendance et égalité des variances |
| Homoscédasticité des $p$ distributions | Test de Levène ou de Bartlett | Très robuste à l'inégalité des variances |
| Indépendance des $p$ distributions | Plan expérimental | Pas robuste |

**Remarque** : L'analyse de variance à un facteur contrôlé est relativement peu sensible à l'inégalité des variances ainsi qu'à la non normalité lorsque les échantillons comparés sont de grandes tailles.

# 3 Modèle de l'an lyse de variance

## 3.1 Modèle sous $H_0$ : homogénéité des données

L'analyse de variance à un facteur teste l'effet d'un facteur contrôlé $A$ ayant $p$ modalités sur les moyennes d'une variable quantitative $Y$.

**L'hypothèse nulle** testée est la suivante :
il n'y a pas d'effet du facteur $A$ et les $p$ moyennes sont égales à une même moyenne $\mu$.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_i = \ldots\ldots = \mu_p = \mu$

alors $\mathbf{y_{ij} = \mu + e_{ij}}$ sous $H_0$

avec $e_{ij}$ variables aléatoires **indépendantes** suivant une **même loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$.**

Les résidus $e_{ij}$ correspondent aux fluctuations expérimentales pour chaque valeur de la variable $y_{ij}$ mesurée.

Sous l'hypothèse $e_{ij} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma)$, on montre que $y_{ij} \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$E(y_{ij}) = E(\mu + e_{ij}) = E(\mu) + E(e_{ij}) = \mu + E(e_{ij}) = \mu$ puisque $E(e_{ij}) = 0$

$V(y_{ij}) = V(\mu + e_{ij}) = V(\mu) + V(e_{ij}) = 0 + \sigma^2 = \sigma^2$ puisque $V(e_{ij}) = \sigma^2$

## 3.2 Modèle sous $H_1$ : hétérogénéité des données

**L'hypothèse alternative** est la suivante :
il y a un effet du facteur $A$ et il existe au moins deux moyennes significativement différentes.

$H_1 : \quad \exists\ \mu_i \neq \mu_j$

alors $\mathbf{y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}}$ sous $H_1$

avec $e_{ij}$ : variables aléatoires **indépendantes** suivant **une même loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$.**

$a_i$ : **l'effet de la modalité i** du facteur $A$ sur la variable $Y$

Sous l'hypothèse $e_{ij} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma)$, on montre que $y_{ij} \rightarrow \mathcal{N}(\mu + a_i, \sigma)$

$E(y_{ij}) = E(\mu + a_i + e_{ij}) = E(\mu) + E(a_i) + E(e_{ij}) = \mu + a_i + E(e_{ij}) = \mu + a_i$ puisque $E(e_{ij}) = 0$

$V(y_{ij}) = V(\mu + a_i + e_{ij}) = V(\mu) + V(a_i) + V(e_{ij}) = 0 + 0 + \sigma^2 = \sigma^2$ puisque $V(e_{ij}) = \sigma^2$

Ainsi il existe une différence entre les moyennes de la variable selon les modalités du facteur controlé.

**Remarque** : Tester l'hypothèse nulle « absence d'effet sur facteur $A$ » revient à tester
$H_0$ : les $a_i$ sont tous nuls.

## 3.3 Equation fondamentale de l'analyse de variance

### *3.3.1 Estimation des paramètres des modèles*

**Sous $H_0$ : $y_{ij} = \mu + e_{ij}$**

$\hat{\mu} = \overline{y}$ notée aussi $y_{..}$ $\qquad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ avec $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$

L'ensemble des données du tableau peuvent être estimées à partir de la moyenne totale des $y_{ij}$ à laquelle s'ajoute la part d'aléatoire dans les mesures, $e_{ij}$ .

**Sous $H_1$ : $y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$**

$\hat{\mu} + \hat{a}_i = \overline{y}_i$ notée aussi $y_{i.}$ $\qquad \overline{y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ moyenne des $y_{ij}$ pour la modalité i

d'où $\hat{a}_i = \overline{y}_i - \overline{y}$

et $\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{a}_i = y_{ij} - \overline{y} - \overline{y}_i + \overline{y} = y_{ij} - \overline{y}_i$

ainsi $\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \overline{y}_i$

### *3.3.2 Décomposition de la variation totale*

Soit le modèle sous $H_1$ : $y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$

avec les estimateurs $y_{ij} = \overline{y} + (\overline{y}_i - \overline{y}) + (y_{ij} - \overline{y}_i)$

$$(y_{ij} - \overline{y}) = (\overline{y}_i - \overline{y}) + (y_{ij} - \overline{y}_i)$$

avec les écarts au carré $(y_{ij} - \overline{y})^2 = (\overline{y}_i - \overline{y})^2 + (y_{ij} - \overline{y}_i)^2 + 2(\overline{y}_i - \overline{y})(y_{ij} - \overline{y}_i)$

avec les sommes pour tous les individus j

$$\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y})^2 = n_i(\overline{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2 + 2(\overline{y}_i - \overline{y})\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_i)$$

or $2(\overline{y}_i - \overline{y})\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_i) = 0$

car $\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_i) = 0$ sachant que $E(e_{ij}) = 0$ si les hypothèses initiales sont vérifiées.

avec la somme pour les $p$ modalités du facteur controlé

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{p} n_i(\overline{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2$$

**L'équation fondamentale** de l'analyse de variance

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{p} n_i(\overline{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2$$

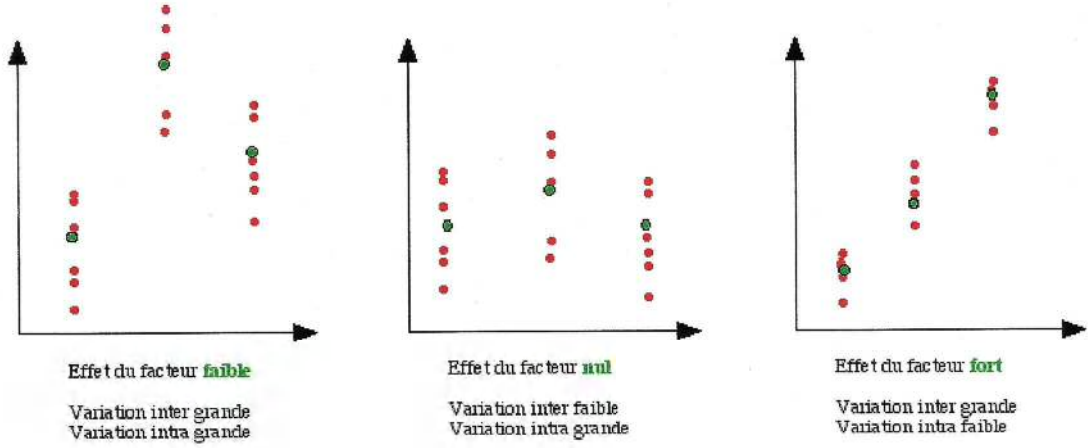
$SCE_{totale}$ $\qquad$ $SCE_{inter}$ $\qquad$ $SCE_{intra}$

**Notation :**

$SCE_{totale}$ = somme des écarts totaux ou variation totale = $N\ s_y^2$

$SCE_{inter}$ = somme des écarts liés aux effets du facteur $A$ ou variation inter (entre modalités)

$SCE_{intra}$ = somme des écarts résiduelles ou variation intra (interne à chaque modalité)

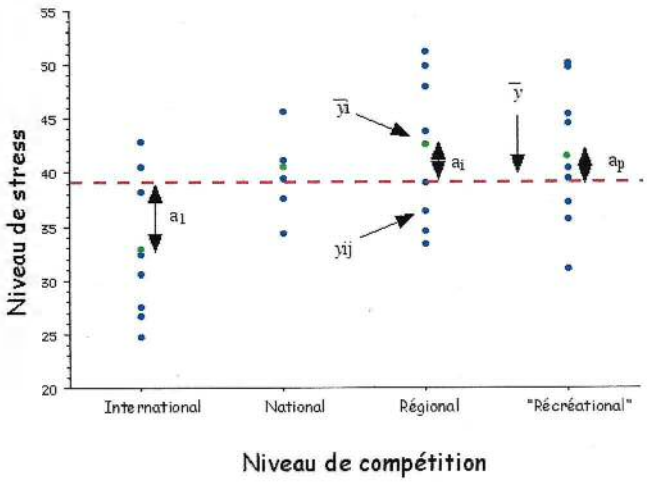



**Exemple :** Distribution des valeurs de la variable « **anxiété des sportifs** » $y_{ij}$ en fonction des niveaux de compétition pour 30 sportifs.

$\overline{y_i}$ : **moyenne** pour chaque modalité i du facteur **en vert**,

$\overline{y}$ : **moyenne** de l'ensemble des données

$a_i$ : effet de la modalité i sur la variable $y_{ij}$




### *3.3.3 Le rapport de corrélation*

Le **rapport de corrélation** donne la part de la variabilité totale des données expliquée par l'effet du facteur A :

$$\eta^2 = \frac{SCE_{inter}}{SCE_{totale}}$$

C'est un **indice de liaison**, pas nécessairement linéaire entre les variables étudiées qui varie entre 0 et 1. Il mesure **la qualité de l'ajustement** des effets du facteur au travers des moyennes.

# 4 Pratique de l'an lyse de variance

L'analyse de variance à un facteur teste l'effet d'un facteur contrôlé $A$ ayant $p$ modalités sur les moyennes d'une variable quantitative $Y$.

L'hypothèse nulle testée est la suivante

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_I = \ldots\ldots = \mu_p = \mu$ contre $H_1 : \exists\ \mu_i \neq \mu_j$

Le test de comparaison multiple de moyenne revient à faire un test de **comparaison de deux variance.**

## 4.1 Principe du test

Soit l'équation de décomposition de la variation totale :

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{p} n_i\left(\bar{y}_i-\bar{y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2$$

$SCE_{totale}$ $SCE_{inter}$ $SCE_{intra}$

Les estimations des variances associées ou **carré moyen** sont :

Variance totale : $\dfrac{SCE_{totale}}{N-1}$ avec $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$

Variance due au facteur $A$ ($CM_{inter}$) : $\dfrac{SCE_{inter}}{p-1}$ **estimateur de $\sigma^2$** si $H_0$ vraie

Variance résiduelle ($CM_{intra}$) : $\dfrac{SCE_{intra}}{N-p}$ **estimateur de $\sigma^2$** quelque soit le modèle

Remarque : L'équation fondamentale de l'analyse de variance ne s'applique pas aux variances : Variance totale ≠ Variance inter + Variance intra

- **Sous $H_0$ :** $\mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_i = \ldots\ldots = \mu_p = \mu$ avec $a_i = 0\ \forall i$

  $\dfrac{SCE_{inter}}{p-1}$ et $\dfrac{SCE_{intra}}{N-p}$ **estimateur du même paramètre** $\sigma^2$

  d'où $\dfrac{SCE_{inter}}{p-1} \approx \dfrac{SCE_{intra}}{N-p}$

  et donc le rapport $\dfrac{SCE_{inter}}{p-1} \times \dfrac{N-p}{SCE_{intra}}$ est **proche de 1**

- **Sous $H_1$ :** $\exists\ \mu_i \neq \mu_j$ avec au moins un $a_i \neq 0$

  $\dfrac{SCE_{intra}}{N-p}$ **unique estimateur** de $\sigma^2$

  d'où $\dfrac{SCE_{inter}}{p-1} \neq \dfrac{SCE_{intra}}{N-p}$ avec $\dfrac{SCE_{inter}}{p-1} >> \dfrac{SCE_{intra}}{N-p}$

et donc le rapport $\frac{SCE_{inter}}{p-1} \times \frac{N-p}{SCE_{intra}}$ est **très supérieur à 1**

Sous $H_0$ : il n'y a pas d'effet du facteur $A$ sur la variable $Y$

$\mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_i = \ldots\ldots = \mu_p = \mu$

contre $H_1$ : le facteur $A$ exerce un effet en moyenne sur la variable $Y$

$\exists\ \mu_i \neq \mu_j$

$$F_{obs.} = \frac{CM_{inter}}{CM_{intra}} = \frac{\frac{SCE_{inter}}{p-1}}{\frac{SCE_{intra}}{N-p}}$$ suit une **loi de Fisher-Snedecor**

$F_{obs}$ comparée à $F_{seuil}$ lue dans **la table de la loi de Fisher-Snedecor** pour un **risque d'erreur $\alpha$** fixé et ($p$-1, $N$- $p$) degrés de liberté.

- si $F_{obs} > F_{seuil}$ l'hypothèse $H_0$ est rejetée au risque d'erreur $\alpha$ : le facteur controlé $A$ a un effet significatif en moyenne sur les valeurs de la variable étudiée.
- si $F_{obs} \leq F_{seuil}$ l'hypothèse $H_0$ est acceptée: le facteur controlé $A$ n'a pas d'effet significatif en moyenne sur les valeurs de la variable étudiée.

Remarque : Le rejet de l'égalité des moyennes ne permet pas de savoir quelles sont les moyennes significativement différentes. Pour cela, la méthode des contrastes ou **méthode de Scheffé** associée à l'analyse de variance permet de répondre à cette question.

## 4.2 Application et Tableau de variation

Le tableau de variation donne un résumé des calculs effectués pour l'analyse de variance.

| Sources de variation | Degrés de liberté | Somme des Carrés des Ecarts | Carré Moyen | Test de Fisher-Snédécor |
|---|---|---|---|---|
| Totale | $N$ - 1 | $SCE_{TOT}$ | | $F_{obs.} = \frac{CM_{inter}}{CM_{intra}}$ |
| Facteur | $p$ - 1 | $SCE_{inter}$ | $CM_{inter} = SCE_{inter} / (p-1)$ | |
| Résiduelle | $N$ - $p$ | $SCE_{intra}$ | $CM_{intra} = SCE_{intra} / (N-p)$ | |

Pour effectuer les calculs, des **formules développées** peuvent être utilisées.

$$SCE_{TOT} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{T^2}{N} \qquad \text{avec } T = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \text{ et } N = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

$$SCE_{inter} = \sum_{i=1}^{p} n_i\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{p} \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{N} \qquad \text{avec } T_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

$$SCE_{intra} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{p}\frac{T_i^2}{n_i} \quad \text{ou} \quad SCE_{intra} = SCE_{TOT} - SCE_{inter}$$

**Exemple :**

L'anxiété des sportifs au moment de la compétition diffère-t-elle en fonction du niveau de compétition ? (**Tableau de variation**)