Algèbre

Algèbre et expressions littérales

§ 1. Algèbre ou calcul littéral

Jusqu'à maintenant, les calculs effectués ont toujours été faits avec les nombres. Cela s'appelle l'**arithmétique**.

Pour résoudre divers problèmes, nous allons avoir besoin de pouvoir faire des calculs avec des lettres. Cela s'appelle l'**algèbre** ou **calcul littéral**.

§ 2. Représentation de grandeurs par des expressions ou écritures littérales

Une **expression ou écriture littérale** est une écriture mathématique qui contient une ou plusieurs lettres.

Exemples: x; $2\cdot(y+5)$; $4,8-a+b$; $\frac{x^2}{2}$; $\frac{1}{z}$; 2^x; ... sont des expressions littérales.

Une **expression "en fonction de x"** est une expression qui contient la lettre x.

Toutes les grandeurs que l'on rencontre dans les problèmes (longueurs, aires, volumes, temps, quantités, etc.) peuvent être écrites sous forme d'**expressions ou écriture littérales**.

Voyons comment on s'y prend pour exprimer une grandeur sous forme d'expression ou écriture littérale:

Exemple 1:

Les multiples de 7: ce sont les nombres 7, 14, 21, 28, 35, etc., que l'on peut écrire 1·7, 2·7, 3·7, 4·7, 5·7, etc.; on remarque qu'ils s'expriment comme un nombre entier naturel multiplié par 7; de manière littérale, on peut donc dire que les multiples de 7 sont de la forme $n \cdot 7$ ou $7 \cdot n$, où n est un nombre entier naturel.

Exemple 2:

L'aire d'un rectangle: pour calculer l'aire d'un rectangle, on multiple sa longueur par sa largeur; si on appelle sa longueur a et sa largeur b, son aire est donc $a \cdot b$, qui est une expression ou écriture littérale.

§ 3. Convention d'écriture pour le signe de multiplication

Afin d'alléger les calculs, on utilise une convention d'écriture pour le signe de multiplication qui permet de ne pas écrire celui-ci dans certaines situations.
Pour alléger les expressions littérales, on peut supprimer le signe de la multiplication entre:
- un nombre et une lettre: $5 \cdot y = 5y$,
- un nombre et une parenthèse: $3 \cdot (m+n) = 3(m+n)$,
- une lettre et une parenthèse: $a \cdot (b+c) = a(b+c)$,
- deux lettres: $x \cdot y = xy$,
- deux parenthèses: $(x+y) \cdot (z+t) = (x+y)(z+t)$.

On évitera d'écrire $a2$ à la place de $a \cdot 2$ (pour éviter la confusion avec a^2), et on notera de préférence $2a$. Autrement dit, dans une multiplication de nombre(s) et de lettre(s), on écrira d'abord le ou les nombres, puis la ou les lettres.

§ 4. Ecritures littérales équivalentes ou égales

Deux **écritures littérales** sont dites **équivalentes** ou **égales** si elles donnent le même résultat pour toutes les valeurs possibles des lettres qui y sont contenues.
Par exemple, $2(x-1)$ et $2x-2$ sont des écritures littérales équivalentes, car, si on choisit une valeur pour x (par exemple $x=2$), $2(x-2) = 2(2-1) = 2$ et $2x-2 = 4-2 = 2$; les deux écritures littérales donnent le même résultat et ceci est valable pour n'importe quel choix de x.

§ 5. Priorités des opérations

Dans un calcul comprenant plusieurs opérations (par exemple $4+3\cdot 5$), on doit spécifier l'ordre dans lequel on doit les effectuer (fait-on d'abord l'addition, puis la multiplication, ou, au contraire, la multiplication, puis l'addition?). Pour cela, on utilise des **parenthèses**.

Les parenthèses indiquent l'ordre des opérations, dans le sens où on effectue en premier les opérations entre parenthèses (ainsi, on indiquera soit $(4+3)\cdot 5$, ce qui signifie que l'on fait l'addition en premier, puis la multiplication, soit $4+(3\cdot 5)$, ce qui signifie que l'on fait la multiplication en premier, puis l'addition).

Lorsqu'on a plusieurs parenthèses imbriquées les unes dans les autres, on commencera toujours par calculer la parenthèses la plus à l'intérieur et on continuera avec celles allant de plus en plus vers l'extérieur.

Cependant, s'il y a beaucoup d'opérations en jeu, le fait d'indiquer la séquence des opérations par des parenthèses peut devenir très fastidieux.

Pour parer à cela, les mathématiciens ont mis au point ce que l'on appelle les **priorités des opérations**. En fait, dans un calcul comportant plusieurs opérations, on effectuera toujours les opérations dans l'ordre suivant:

1) les **parenthèses** possibles;
2) les **puissances** et les **racines** possibles;
3) les **multiplications** et les **divisions** possibles;
4) les **additions** et les **soustractions** possibles.

Une fois qu'on a pu effectuer un des points ci-dessus, on recommencera les étapes par l'étape 1) jusqu'à ce qu'on ait le résultat du calcul.

A cette liste de priorités s'ajoutent les deux règles suivantes:

- dans une suite ne comprenant que des additions ou des soustractions sans parenthèses, on effectue les opérations de **gauche à droite**;
- dans une suite ne comprenant que des multiplications ou des divisions sans parenthèses, on effectue les opérations de **gauche à droite**.

Illustrons cette méthode par un exemple. On doit effectuer le calcul suivant:

$$120-4\cdot((8-2^2)-(5-3))^2.$$

1) on peut effectuer la parenthèse $(5-3)=2$; le calcul devient $120-4\cdot((8-2^2)-2)^2$; il n'y a pas d'autres parenthèses possibles pour l'instant;

2) on peut effectuer la puissance $2^2=4$; le calcul devient $120-4\cdot((8-4)-2)^2$; il n'y a pas d'autres puissances possibles pour l'instant;

1) on peut effectuer la parenthèse $(8-4)=4$; le calcul devient $120-4\cdot(4-2)^2$; on peut effectuer la parenthèse $(4-2)=2$; le calcul devient $120-4\cdot 2^2$; il n'y a plus de parenthèses;

2) on peut effectuer la puissance $2^2=4$; le calcul devient $120-4\cdot 4$; il n'y a plus de puissances ou de racines;

3) on peut effectuer le produit $4\cdot 4=16$, le calcul devient $120-16$; il n'y a plus de multiplications ou de divisions;

4) on peut effectuer la différence $120-16=104$ et le calcul est terminé.

Ainsi on a: $120-4\cdot((8-2^2)-(5-3))^2=104$.

Il faut donc être très systématique dans les calculs et bien veiller à chaque fois à utiliser les priorités des opérations.

Les priorités des opérations s'appliquent aussi bien en arithmétique qu'en algèbre.