Algèbre

Equations du deuxième degré à une inconnue

§ 1. Equations du deuxième degré à une inconnue

Une **équation du deuxième degré à une inconnue** est une équation qui peut se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a est différent de zéro.

Exemple: si on a une équation de la forme $(2x+1)^2 = x^2 - 12$, on peut la transformer dans la forme $ax^2 + bx + c = 0$; en effet, en utilisant les identités remarquables (ou la double distributivité de la multiplication sur l'addition), on a $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, et l'équation devient donc $4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 12$, équation que l'on peut transformer en $3x^2 + 4x + 13 = 0$ par soustraction de $x^2 - 12$, qui est bien de la forme cherchée.

En transformant une équation du deuxième degré en une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, on peut alors utiliser une formule pour trouver sa ou ses solutions.

On verra qu'une équation du deuxième degré peut avoir 2 solutions, 1 solution ou pas de solution.

§ 2. Résolutions des équations du deuxième degré à une inconnue

On part d'une équation du deuxième degré mise sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

On calcule en premier lieu ce que l'on appelle le **discriminant**. C'est un nombre qui nous permettra de dire si l'équation a 2 solutions, 1 solution ou aucune solution.

Le discriminant, symbolisé par la lettre grec Δ (delta) est donné par $\Delta = b^2 - 4ac$, où a, b et c sont les coefficients dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

On a alors les trois cas possibles suivants:

- si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution;

- si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution et elle est donnée par $x = -\frac{b}{2a}$;

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes qui sont données par:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

(on différencie les deux solutions en les appelant x_1 et x_2).

§ 3. Exemples de résolutions d'équations du deuxième degré à une inconnue

Exemple 1:

Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

Ici, par identification des termes avec l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$, on a:

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1$$

Le discriminant est, dans ce cas: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$.

Comme $\Delta < 0$, on en conclut que l'équation n'a aucune solution.

Exemple 2:

Résoudre l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Ici, par identification des termes avec l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$, on a:

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 1$$

Le discriminant est, dans ce cas: $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, on en conclut que l'équation a une seule solution qui est donnée par:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Exemple 3:

Résoudre l'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Ici, par identification des termes avec l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$, on a:

$$a=1,\ b=4,\ c=3$$

Le discriminant est, dans ce cas: $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4$.

Comme $\Delta>0$, on en conclut que l'équation a deux solutions qui sont données par:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{-4+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{-4-2}{2}=\frac{-6}{2}=-3.$$

Exemple 4:

Résoudre l'équation $x^2-4x-3=0$.

Ici, par identification des termes avec l'équation générale $ax^2+bx+c=0$, on a:

$$a=1,\ b=-4,\ c=-3$$

Le discriminant est, dans ce cas: $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16+12=28$.

Comme $\Delta>0$, on en conclut que l'équation a deux solutions qui sont données par:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)+\sqrt{28}}{2\cdot1}=\frac{4+\sqrt{28}}{2} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)-\sqrt{28}}{2\cdot1}=\frac{4-\sqrt{28}}{2}.$$

On peut laisser les réponses sous cette forme si on veut les solutions exactes.

On peut aussi les calculer à la calculatrice et donner les solutions approchées: on obtient alors: $x_1\simeq4,646$ et $x_2\simeq-0,646$.

§ 4. Problèmes utilisant les équations du deuxième degré à une inconnue

Comme pour toute résolution d'un problème nécessitant une équation, on procède de la manière suivante:

- lire et comprendre l'énoncé;

- en fonction de la ou des questions posées, nommer les inconnues par des lettres;

- transformer l'énoncé du problème en une (ou plusieurs) équation;

- résoudre l'équation (si c'est une équation du deuxième degré, utiliser la technique vue dans le chapitre sur les équations du deuxième degré à une inconnue et leur résolution);

- vérifier que la ou les solutions obtenues donnent un résultat logique pour le problème qui était à résoudre.

Exemple:

On doit résoudre le problème suivant:

Un batelier descend une rivière de 120 km. Il la remonte ensuite et met un jour de plus, car il parcourt 6 km de moins par jour qu'en descendant. Combien a-t-il mis de jours pour descendre? (On suppose évidemment que la vitesse du courant est constante et que le batelier rame avec la même énergie à la descente et à la montée.)

Après avoir lu et compris l'énoncé, on détermine l'inconnu en fonction de la question du problème: on appelle x le nombres de jours que le batelier met pour descendre la rivière.

Puisque le batelier parcourt au total 120 km de descente en x jours, il fera $\frac{120}{x}$ km par jour.

Pour remonter, il met un jour de plus, donc $x+1$ jours. Il fera donc, pour remonter, $\frac{120}{x+1}$ km par jour.

De plus, en montée, il fait 6 km de moins par jour qu'en descente. On doit donc avoir:

$$\frac{120}{x} - 6 = \frac{120}{x+1}.$$

C'est notre équation et on doit maintenant la résoudre:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{120}{x} - 6 = \frac{120}{x+1} & \cdot x \\
120 - 6x = \frac{120x}{x+1} & \cdot(x+1) \\
120\cdot(x+1) - 6x\cdot(x+1) = 120x & \text{distributivité} \\
120x + 120 - 6x^2 - 6x = 120x & \text{réduction} \\
-6x^2 + 114x + 120 = 120x & -120x \\
-6x^2 - 6x + 120 = 0 & :(-6) \\
x^2 + x - 20 = 0. &
\end{array}
$$

C'est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = 1,\ b = 1,\ c = -20$.

Le discriminant Δ vaut $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-20) = 1 + 80 = 81$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{81}}{2\cdot 1} = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{81}}{2\cdot 1} = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$$

Le nombre de jours étant forcément un nombre positif, on exclut la solution $x_2 = -5$.

Par conséquent, la solution est $x_1 = 4$ et, donc, le batelier met **4 jours** pour descendre la rivière.