Algèbre

Systèmes de deux équations du deuxième degré à deux inconnues

§ 1. Résolutions de systèmes de deux équations du deuxième degré à deux inconnues

Dans certains problèmes, on est parfois amené à **résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues dont l'une (ou les deux) sont des équations du deuxième degré**. Pour résoudre ces équations, on a aussi à disposition une méthode de substitution et une méthode de combinaison linéaire.

Exemple 1:

Résoudre le système d'équations: $2x+3y=5$

$$4x^2-5y^2=41.$$

De la première équation, on déduit $2x=-3y+5$, d'où $x=-\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}$.

On substitue alors cette relation dans la deuxième équation:

$$4(-\tfrac{3}{2}y+\tfrac{5}{2})^2-5y^2=41 \quad | \quad \text{calcul}$$

$$4(\tfrac{9}{4}y^2-\tfrac{15}{2}y+\tfrac{25}{4})-5y^2=41 \quad | \quad \text{distributivité}$$

$$9y^2-30y+25-5y^2=41 \quad | \quad \text{réduction}$$

$$4y^2-30y+25=41 \quad | \quad \text{- 40}$$

$$4y^2-30y-16=0$$

C'est une équation du deuxième degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=4$, $b=-30$ et $c=-16$.

Le discriminant Δ est $\Delta=b^2-4ac=(-30)^2-4\cdot 4\cdot(-16)=900+256=1156$.

Comme $\Delta>0$, on aura deux solutions pour l'équation:

$$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-30)+\sqrt{1156}}{2\cdot 4} = \frac{30+34}{8} = \frac{64}{8} = 8 \text{ et}$$
$$y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-30)-\sqrt{1156}}{2\cdot 4} = \frac{30-34}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

On a donc deux solutions pour y: $-\frac{1}{2}$ et 8.

Avec $y = -\frac{1}{2}$ et $x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}$, on trouve $x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{2} = \frac{13}{4}$.

Avec $y = 8$ et $x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}$, on trouve $x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}\cdot 8 + \frac{5}{2} = -12 + \frac{5}{2} = -\frac{19}{2}$.

On a donc deux couples de solutions:

$$x = \frac{13}{4} \textit{ et } y = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x = -\frac{19}{2} \textit{ et } y = 8.$$

Exemple 2:

Résoudre le système d'équations:
$$3x^2 + 4y^2 = 60$$
$$6x^2 - 5y^2 = 22,5$$

En multipliant la première équation par 5, on obtient: $15x^2 + 20y^2 = 300$

En multipliant la deuxième équation par 4, on obtient: $24x^2 - 20y^2 = 90$

En additionnant ces deux dernières relations, on trouve: $39x^2 = 390$

D'où on conclut que $x^2 = 10$ et, donc, que $x = \pm\sqrt{10}$.

Si $x = \pm\sqrt{10}$, en remplaçant dans la première équation, on trouve:

$3\cdot 10 + 4y^2 = 60$	|	calcul
$30 + 4y^2 = 60$	|	- 30
$4y^2 = 30$	|	: 4
$y^2 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$	|	$\sqrt{}$
$y = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$.		

On a donc les solutions $x = \pm\sqrt{10}$ et $y = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$, ce qui correspond en fait à 4 couples de solutions:

$$x = \sqrt{10} \text{ et } y = \sqrt{\frac{15}{2}}$$
$$x = \sqrt{10} \text{ et } y = -\sqrt{\frac{15}{2}}$$
$$x = -\sqrt{10} \text{ et } y = \sqrt{\frac{15}{2}}$$
$$x = -\sqrt{10} \text{ et } y = -\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

§ 2. Résolutions de problèmes utilisant des systèmes de deux équations du deuxième degré à deux inconnues

On doit résoudre le problème suivant:

Les organisateurs d'un spectacle doivent obtenir une recette de Fr. 9'000.-- pour couvrir leurs frais. Au moment de disposer les chaises dans la salle, ils constatent qu'en les serrant un peu plus, ils peuvent en ajouter 100 et diminuer par conséquent de Fr. 3.-- le prix de la place pour obtenir la même recette. Combien avaient-ils prévue de spectateurs au départ et quel était le prix des places fixé initialement?

Après avoir lu et compris l'énoncé du problème, on détermine quelles sont les inconnues (qui correspondent aux questions du problème):

- on appelle x le nombre de spectateurs prévus au départ;
- on appelle y le prix des places fixé initialement.

Au départ, on doit avoir que le nombre de spectateurs prévus multiplié par le prix initial des places soit égal aux Fr. 9'000.--: la première équation est donc $x \cdot y = 9'000$.

Après l'augmentation du nombre de places, on doit avoir que le nombre de spectateurs possibles alors multiplié par le prix final des places soit aussi égal aux Fr. 9'000.--: le nombre de spectateurs possibles est alors de $x+100$ et le prix final des places est alors de $y-3$; la deuxième équation est donc: $(x+100)\cdot(y-3) = 9'000$.

On a donc obtenu le système de deux équations suivants:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 9'000 && (1) \\ (x+100)\cdot(y-3) &= 9'000 && (2). \end{aligned}$$

De (1), on tire: $y = \frac{9'000}{x}$.

Par substitution dans (2), on obtient:

$$\begin{aligned}
&(x+100)\cdot\left(\tfrac{9'000}{x} - 3\right) = 9'000 && \text{distributivité} \\
&9'000 - 3x + \tfrac{900'000}{x} - 300 = 9'000 && \cdot x \\
&9'000x - 3x^2 + 900'000 - 300x = 9'000x && \text{réduction} \\
&-3x^2 + 8700x + 900'000 = 9'000x && -9'000x \\
&-3x^2 - 300x + 900'000 = 0 && :(-3) \\
&x^2 + 100x - 300'000 = 0.
\end{aligned}$$

C'est une équation du deuxième degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où $a = 1$, $b = 100$ et $c = -300'000$.

Le discriminant Δ vaut

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300'000) = 10'000 + 1'200'000 = 1'210'000.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation du deuxième degré a deux solutions données par:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100+\sqrt{1'210'000}}{2\cdot 1} = \frac{-100+1100}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100-\sqrt{1'210'000}}{2\cdot 1} = \frac{-100-1100}{2} = \frac{-1200}{2} = -600.$$

Comme x représente le nombre de spectateurs, cette deuxième solution est exclue et on obtient que le nombre de spectateurs au départ est $x = 500$.

Avec $x = 500$ et $y = \frac{9'000}{x}$, on obtient: $y = \frac{9'000}{500} = 18$.

La solution du système d'équations est donc $x = 500$ et $y = 18$.

Cela signifie qu'il avaient prévus initialement **500 places à Fr. 18.--**.