Algèbre

Inéquations et résolutions

§ 1. Inéquations

Une **équation** est formée de deux expressions littérales entre lesquelles il y a une **égalité**.
Une **inéquation** est formée de deux expressions littérales entre lesquelles il y a une **inégalité** ($>$, $<$, $\geq$ *ou* $\leq$).

Exemples

$\underbrace{x+4}_{\text{membre de gauche}} < \underbrace{7}_{\text{membre de droite}}$; $3x \geqslant x-5$; $2 > x+y$; … sont des inéquations.

Une lettre utilisée dans l'écriture d'une inéquation est une **inconnue de l'inéquation** dès le moment où on s'intéresse à déterminer l'ensemble de ses valeurs.
Les **solutions d'une inéquation** sont les nombres qui, mis à la place de la lettre (ou des lettres), vérifient l'inégalité.
Généralement, une inéquation n'a pas une solution unique, mais un ensemble de solutions qui peut être écrit sous forme d'un ou de plusieurs **intervalles de nombres**.

Exemples:

- tous les nombres inférieurs ou égaux à 5 sont solutions de l'inéquation $2x-1<9$: on a $S=]-\infty;5[$ (cette notation signifie que S est l'ensemble des nombres entre $-\infty$ (non compris puisqu'on ne peut pas atteindre $-\infty$) et 5 (non compris également)); $]-\infty;5[$ s'appelle un **intervalle ouvert**.
- tous les nombres inférieurs à -1 ou supérieurs à 2 sont solutions de l'inéquation $x^2>x+2$: on a $S=]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$ (cette notation signifie que S est l'ensemble des nombre

entre $-\infty$ (non compris) et -1 (non compris) et des nombres entre 2 (non compris) et $+\infty$ (non compris)); on écrit aussi parfois $S=\mathbb{R}-[-1;2]$, ce qui signifie que S est l'ensemble de tous les nombres réels à l'exception de l'intervalle entre -1 (compris) et 2 (compris); $[-1;2]$ s'appelle un **intervalle fermé**.

Deux **inéquations équivalentes** sont deux inéquations qui ont le même ensemble de solutions.

§ 2. Résolutions d'inéquations

Certaines règles, appelées **règles d'équivalence pour les inéquations** permettent de transformer une inéquation en une inéquation équivalente:

- effectuer un calcul littéral dans ses membres (ce que l'on appelle souvent **réduction**);

- addition (ou soustraire) un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de l'inéquation;

- multiplier (ou diviser) les deux membres de l'inéquation par un même nombre strictement positif;

- multiplier (ou diviser) les deux membres de l'inéquation par un même nombres strictement négatif en inversant le sens de l'inégalité dans l'inéquation;

- permuter ses deux membres en inversant le sens de l'inégalité dans l'inéquation.

On remarque que, mis à part les deux dernières, ces règles sont les mêmes que les règles d'équivalence pour les équations.

La seule différence avec les règles d'équivalence pour les équations est que, **si on multiplie ou divise par un nombre négatif ou si on permute les membres, on doit changer le sens de l'inégalité dans une inéquation**.

Les règles d'équivalence permette de résoudre toute **inéquation du premier degré à une inconnue**.

Exemple 1:

Résoudre l'inéquation $5x-4<3+x$.

On peut procéder comme suit:

$5x - 4 < 3 + x$	+ 4
$5x < 7 + x$	- x
$4x < 7$	: 4
$x < \frac{7}{4}.$	

Tous les nombres inférieurs à $\frac{7}{4}$ (non compris) sont solutions de l'inéquation $5x - 4 < 3 + x$.

On peut donc écrire $S = \left]-\infty; \frac{7}{4}\right[$.

Exemple 2:

Résoudre l'inéquation $\frac{3}{4}(4 - 2x) > \frac{x}{3} - 1$.

On peut procéder comme suit:

$\frac{3}{4}(4 - 2x) \leq \frac{x}{3} - 1$	distributivité (on commence toujours par traiter les parenthèses)
$3 - \frac{3x}{2} \leq \frac{x}{3} - 1$	$\cdot 2$ (on multiplie par les dénominateurs des fractions)
$6 - 3x \leq \frac{2x}{3} - 2$	$\cdot 3$
$18 - 9x \leq 2x - 6$	- $2x$
$18 - 11x \leq -6$	- 18
$-11x \leq -24$	: (-11)
$x \geq \frac{24}{11}$	on change le sens de l'inégalité puisqu'on divise par un nombre négatif.

Tous les nombres supérieurs à $\frac{24}{11}$ (compris) sont solutions de l'inéquation $\frac{3}{4}(4 - 2x) > \frac{x}{3} - 1$.

On peut donc écrire $\left[\frac{24}{11}; +\infty\right[$.

Un intervalle telle que $\left[\frac{24}{11}; +\infty\right[$, fermé à gauche et ouvert à droite est appelé un **intervalle semi-ouvert**.