Algèbre

Propriétés des opérations

§ 1. Propriétés des additions

Les additions jouissent de certaines propriétés.

Commutativité de l'addition: l'addition est **commutative**, ce qui signifie que a+b = b+a (par exemple: 3+4 = 4+3 = 7).

Associativité de l'addition: l'addition est **associative**, ce qui signifie que a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c (par exemple: 3+(4+5) = 3+9 = 12 et (3+4)+5 = 7+5 = 12).

Si on veut résumer ces propriétés des additions, on pourrait dire que les additions peuvent se faire dans l'ordre que l'on veut, quitte à mélanger les termes.

Par exemple, si on doit effectuer 1+2+3+4+5+6+7+8+9, on transforme, grâce aux propriétés ci-dessus, ces additions en 1+9+2+8+3+7+4+6+5, ce qui nous permet de dire que la somme vaut 10+10+10+10+5 = 45.

Il est bien clair que les soustractions ne jouissent pas de telles propriétés.

§ 2. Propriétés des multiplications

Les multiplications jouissent de certaines propriétés.

Commutativité de la multiplication: la multiplication est **commutative**, ce qui signifie que $a \cdot b = b \cdot a$ (par exemple: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$).

Associativité de la multiplication: la multiplication est **associative**, ce qui signifie que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$ (par exemple: $3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 20 = 60$ et $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$).

Si on veut résumer ces propriétés des multiplications, on pourrait dire que les multiplications peuvent se faire dans l'ordre que l'on veut, quitte à mélanger les termes.

Par exemple, si on doit effectuer $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5$, on transforme, grâce aux propriétés ci-dessus, ces multiplications en $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10$, ce qui nous permet de dire que le produit vaut $10 \cdot 20 \cdot 10 = 2000$.

Il est bien clair que les divisions ne jouissent pas de telles propriétés.

§ 3. Propriétés liant les multiplications et les additions ou les soustractions

Il existe des propriétés liant les multiplications et les additions ou les soustractions.

Distributivité de la multiplication sur l'addition: on a $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Distributivité de la multiplication sur la soustraction: on a $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Cette propriété est souvent utilisée dans le calcul mental.

Par exemple, si on doit calculer $14 \cdot 11$, on procédera comme suit: $14 \cdot 11 = 14 \cdot (10 + 1) = = 14 \cdot 10 + 14 \cdot 1 = 140 + 14 = 154$.

Un autre exemple est le suivant: $18 \cdot 19 = 18 \cdot (20 - 1) = 18 \cdot 20 - 18 \cdot 1 = 360 - 18 = 342$.

Double distributivité: on a:

$$(A+B+C) \cdot (D+E) = (A+B+C) \cdot D + (A+B+C) \cdot E = \underset{1}{A \cdot D} + \underset{2}{B \cdot D} + \underset{3}{C \cdot D} + \underset{4}{A \cdot E} + \underset{5}{B \cdot E} + \underset{6}{C \cdot E}$$

Par exemple, si on veut calculer $41 \cdot 31$, on peut procéder comme suit:

$41 \cdot 31 = (40 + 1) \cdot (30 + 1) = 30 \cdot 40 + 1 \cdot 30 + 40 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1200 + 30 + 40 + 1 = 1271$.

§ 4. Propriétés des puissances

Les puissances jouissent des propriétés suivantes:

Produit de puissances de même base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (par exemple: $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$).

Quotient de puissances de même base: $a^m : a^n = a^{m-n}$ (par exemple: $6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$), propriété que l'on peut aussi écrire $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Puissance d'une puissance: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (par exemple: $(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6$).

Puissance d'un produit: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ (par exemple: $(10 \cdot 5)^2 = 10^2 \cdot 5^2$).

§ 5. Propriétés des racines

Les racines ont les propriétés suivantes:

Produit de racines: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, où $a \geq 0$ et $b \geq 0$;

Quotient de racines: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, où $a \geq 0$ et $b > 0$.

Ces propriétés sont utiles pour trouver sans calculatrice certaines racines:

$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 7 \cdot 10 = 70$,

$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$,

$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27 \cdot 1000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1000} = 3 \cdot 10 = 30$,

$\sqrt{0,64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0,8$,

$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$.