

Algèbre

Résolution de problèmes et équations

§ 1. Equations

Une **équation** est une égalité dont l'un ou les deux membres sont des expressions littérales, et dans laquelle on s'intéresse à déterminer la valeur de la (des) lettre(s).

$\underbrace{x+3,2}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{10}_{\text{membre de droite}}$; $a^2 - 2a - 7 = 2a - 2$; $5x + y = 18 - x$; ... sont des équations.

Toute **équation du premier degré** d'inconnue x peut s'écrire sous la forme:

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0).$$

Exemple: $3x - 2 = 0$ ($a = 3$, $b = -2$).

Toute **équation du deuxième degré** d'inconnue peut s'écrire sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Exemple: $-3x^2 + 84 = 0$ ($a = -3$, $b = 0$, $c = 84$).

Les **solutions d'une équation** sont les nombres qui, mis à la place de la lettre (ou des lettres) vérifient l'égalité constituée par l'équation. S désigne l'**ensemble des solutions d'une équation**.

Deux **équations équivalentes** sont deux équations qui ont le même ensemble de solutions.

Exemples:

Les équations $x - 5 = 8 - x$ et $5x = 32,5$ sont équivalentes: leur ensemble de solutions est $S = \{6, 5\}$.

Les équations $10 - 2y = y^2 + y$ et $y^2 + 3y - 10 = 0$ sont équivalentes: leur ensemble de solutions est $S = \{-5; 2\}$.

Les équations $5x = 15$ et $5x^2 = 15x$ ne sont pas équivalentes, parce que 0 est une solution de la deuxième équation sans en être une de la première.

§ 2. Mise en équations de problèmes

Une difficulté majeure en mathématiques est de transformer un problème énoncé en français en un problème énoncé en langage mathématique. Cela s'appelle la **mise en équations**.

Afin de mettre un problème en équations, puis de le résoudre, il y a un certain nombre d'étapes à suivre:

- 1. Lire et comprendre l'énoncé du problème.**
- 2. Faire la liste des quantités inconnues** (que l'on désignera simplement par le mot **inconnues**) et leur donner un nom (x, y, z, \dots).
- 3. Traduire les informations qui sont données dans l'énoncé par des égalités qui utilisent les inconnues** (ce sont les équations liées au problème). Normalement, il doit y avoir autant d'équations que d'inconnues.
- 4. Résoudre la ou les équations obtenues.**
- 5. Vérifier que la ou les solutions trouvées répondent bien à la question.**
- 6. Donner la réponse au problème.**

Avant de résoudre une équation, il est donc nécessaire de maîtriser les points 1 à 3 ci-dessus.

Pour pouvoir maîtriser les points 3 et 4, il faut tout d'abord étudier plus à fond les différentes sortes d'écritures littérales.