Algèbre

Polynômes et opérations

§ 1. Polynômes

Un **polynôme** est un monôme ou une **somme** de monômes.

Exemples:

$5x^3$; $\frac{y}{2}+4$; $-x^2+1$; $5z$; $4xy^2-2x$; ... sont des polynômes.

a^b; $\frac{u}{v}$; $\sqrt{y}$; $\frac{3x}{4y}$; ... ne sont pas des polynômes.

Un **binôme** est un polynôme à deux termes.

Un **trinôme** est un polynôme à trois termes.

Les **termes d'un polynôme** sont les monômes de la forme réduite (c'est-à-dire qui ne contient plus une somme de monômes semblables) de ce polynôme.

Exemples:

$5x-1$, qui est réduit, se compose de deux termes.

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, qui est réduit, se compose de quatre termes.

Le **degré d'un polynôme** (sous forme réduite) est le degré de celui de ses termes qui a le plus haut degré.

Exemples:

$x+\frac{x^2}{5}$ est un polynôme de degré 2 (le terme de plus haut degré est $\frac{x^2}{5}$).

$-2a^3+a^3b-4,4$ est un polynôme de degré 4 (le terme de plus haut degré est a^3b).

Deux **polynômes** sont **opposés** si leur somme est égale à zéro.

Exemples:

$6x^2$ et $-6x^2$ sont deux polynômes opposés, car leur somme est égale à zéro.

$y^2+5y-12$ et $-y^2-5y+12$ sont deux polynômes opposés, car leur somme est égale à zéro.

On remarque que, en multipliant un polynôme par -1, autrement dit en changeant tous ses signes, on obtient son opposé.

§ 2. Réduire et ordonner des polynômes

Réduire un polynôme, c'est regrouper ses monômes semblables.

Exemples:

$0,5x+7x=7,5x$, forme réduite.

$w+3+5w-2w-8=4w-5$, forme réduite.

$y^2-5y^2+3y^2=-y^2$, forme réduite.

$3a^2b+4a^3-a^2b+1=4a^3+2a^2b+1$, forme réduite.

Ordonner un polynôme, c'est écrire ses termes dans l'ordre croissant ou décroissant des degrés de l'une des lettres qu'il contient.

Exemples:

$5m^2+2m-1$ est un polynôme ordonné.

$-2+a^4+2a^3b-ab^3+b^4$ est un polynôme ordonné par rapport à b, mais pas par rapport à a.

x^3+1+x^2+x n'est pas un polynôme ordonné.

Lorsqu'on veut ordonner un polynôme, le signe devant le monôme que l'on veut changer de place fait partie du monôme en question. On le prend donc avec dans le déplacement:

Exemple: Ordonner $3x-4x^2+3$: le terme de plus haut degré est $-4x^2$ (le "-" fait partie de ce monôme); on le prend entièrement pour le déplacer; on obtient le polynôme ordonné suivant: $-4x^2+3x+3$.

Dans la pratique, on ordonne souvent les polynômes dans l'ordre des degrés décroissants par rapport à l'une des lettres qu'il contient, comme dans le premier exemple ci-dessus.

Ordonner et réduire un polynôme sert à simplifier au maximum son écriture et cela va faciliter les calculs.

§ 3. Additions de polynômes

Voici deux **méthodes pour additionner des polynômes**:

1ère méthode:

En utilisant l'associativité et la commutativité de l'addition, on peut procéder ainsi:

$(5x^2 - x) + (-2x^2 + 10x - 1) =$

$= 5x^2 - x + (-2x^2) + 10x + (-1)$	écriture d'une somme de monômes
$= \; 5x^2 - x - 2x^2 + 10x - 1$	écriture simplifiée
$= \; 3x^2 + 9x - 1$	réduit et ordonné

En résumé, on a additionné les monômes semblables:

$5x^2$ avec $-2x^2$, ce qui donne $3x^2$,

$-x$ avec $10x$, ce qui donne $9x$, et

-1 qui reste comme il est.

2ème méthode:

Une autre méthode est la suivante: on place les polynômes à additionner en colonnes comme pour l'addition de nombres entiers naturels, mais, au lieu de considérer les colonnes des unités, des dizaines, des centaines, etc., on considère à droite la colonne des nombres seuls, à gauche de celle-ci la colonne des coefficients de x, à gauche de cette dernière, les coefficients de x^2, etc. On place alors les coefficients (qu'ils soient positifs ou négatifs) dans les colonnes appropriées et on effectue l'addition des nombres dans les colonnes, sans mettre de retenue:

	x^2	x	nb	
$5x^2 - x \rightarrow$	5	-1	0	
$-2x^2 + 10x - 1 \rightarrow$	-2	10	-1	+
	3	9	-1	

On obtient donc bien $(5x^2 - x) + (-2x^2 + 10x - 1) = = \; 3x^2 + 9x - 1$.

§ 4. Soustractions de polynômes

Voici deux **méthodes pour soustraire des polynômes**:

1ère méthode:

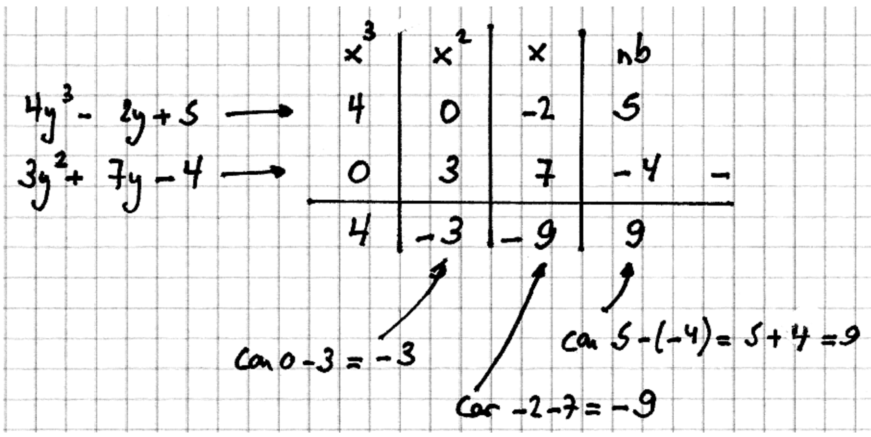
Pour soustraire un polynôme, on additionne son opposé:

$$(4y^3 - 2y + 5) - (3y^2 + 7y - 4) =$$

$= (4y^3 - 2y + 5) + (-3y^2 - 7y + 4)$	addition de l'opposé
$= 4y^3 - 2y + 5 + (-3y^2) + (-7y) + 4$	écriture d'une somme
$= 4y^3 - 2y + 5 - 3y^2 - 7y + 4$	écriture simplifiée
$= 4y^3 - 3y^2 - 9y + 9$	réduit et ordonné

2ème méthode:

Une autre méthode est la suivante: on place les polynômes à soustraire en colonnes comme pour la soustraction de nombres entiers naturels, mais, au lieu de considérer les colonnes des unités, des dizaines, des centaines, etc., on considère à droite la colonne des nombres seuls, à gauche de celle-ci la colonne des coefficients de y (ou de la lettre concernée), à gauche de cette dernière, les coefficients de y^2, etc. On place alors les coefficients (qu'ils soient positifs ou négatifs) dans les colonnes appropriées et on effectue la soustraction des nombres dans les colonnes, sans prendre par exemple une dizaine pour faire dix unités lorsque c'est nécessaire:



On obtient donc bien $(4y^3 - 2y + 5) - (3y^2 + 7y - 4) = 4y^3 - 3y^2 - 9y + 9$.

§ 5. Multiplications de polynômes

Voici deux **méthodes pour multiplier des polynômes**:

1ère méthode:

Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second et on réduit la somme ainsi obtenue (on utilise en fait la distributivité de la multiplication sur l'addition):

$$(y-2)\cdot(y-5) = [y+(-2)]\cdot[y+(-5)] = y\cdot y + y\cdot(-5) + (-2)\cdot y + (-2)\cdot(-5) =$$
$$= y^2 - 5y - 2y + 10 = y^2 - 7y + 10,$$

ou, de manière plus rapide:

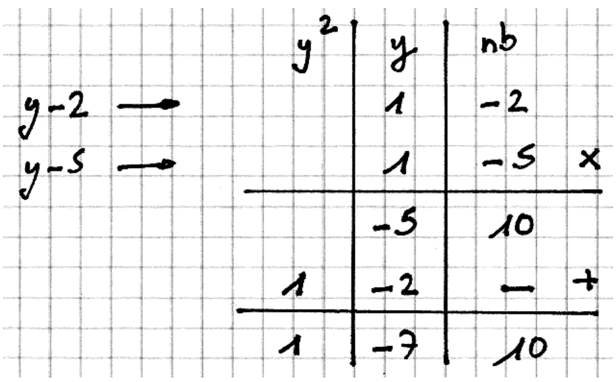
$$(y-2)\cdot(y-5) = y\cdot y - y\cdot 5 - 2\cdot y + 2\cdot 5 = y^2 - 5y - 2y + 10 = y^2 - 7y + 10.$$

Autre exemple:

$$(m^2+m+1)\cdot(m-1) = m^2\cdot m - m^2\cdot 1 + m\cdot m - m\cdot 1 + 1\cdot m - 1\cdot 1 =$$
$$= m^3 - m^2 + m^2 - m + m - 1 = m^3 - 1.$$

2ème méthode:

Une autre méthode est la suivante: on place les polynômes à multiplier en colonnes comme pour la multiplication de nombres entiers naturels, mais, au lieu de considérer les colonnes des unités, des dizaines, des centaines, etc., on considère à droite la colonne des nombres seuls, à gauche de celle-ci la colonne des coefficients de x (ou de la lettre concernée), à gauche de cette dernière, les coefficients de x^2, etc. On place alors les coefficients (qu'ils soient positifs ou négatifs) dans les colonnes appropriées et on effectue la multiplication des nombres dans les colonnes, sans mettre de retenue et en tenant compte des règles de multiplications des nombres négatifs s'il y a lieu:



On obtient donc bien $(y-2)\cdot(y-5)=y^2-7y+10$.

	m^3	m^2	m	nb	
m^2+m+1 →		1	1	1	
$m-1$ →			1	-1	×
		-1	-1	-1	
	1	1	1	—	+
	1	0	0	-1	

On obtient donc bien $(m^2+m+1)\cdot(m-1)=m^3-1$.

§ 6. Identités remarquables

On est souvent amené à calculer les mêmes produits de polynômes. Pour nous aider, on a ce que l'on appelle les **identités remarquables**, identités à connaître **par coeur**:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ces identités s'obtiennent facilement en utilisant la méthode de multiplication de polynômes décrites ci-dessus:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Les identités remarquables sont utilisées dans les multiplications de polynômes et dans les factorisations de polynômes (voir plus loin).

§ 7. Divisions de polynômes

Il existe une **méthode pour diviser deux polynômes** apparentée à la division euclidienne des nombres. D'ailleurs cette méthode est appelé la **division euclidienne de polynômes**.

Pour diviser x^3+2x^2-3x+5 par $2x-3$, on peut procéder comme suit:

1) on place les polynômes à diviser:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-3x+5 & 2x-3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2) on regarde par quoi il faut multiplier le premier terme du diviseur pour obtenir le premier terme du dividende:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-3x+5 & 2x-3 \\ \cline{2-2} & 0{,}5x^2 \end{array} \qquad \text{car } 0{,}5x^2 \cdot 2x = x^3$$

3) on multiplie alors les termes du diviseur par ce terme trouvé et on les aligne avec les puissances de x sous le dividende:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-3x+5 & 2x-3 \\ \cline{2-2} x^3-1{,}5x^2 & 0{,}5x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{car } 0{,}5x^2 \cdot 2x = x^3 \\ \text{et } 0{,}5x^2 \cdot (-3) = -1{,}5x^2 \end{array}$$

4) on soustrait ce qu'il faut du dividende et on abaisse les monômes pas touchés:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-3x+5 & 2x-3 \\ \cline{2-2} -(x^3-1{,}5x^2) & 0{,}5x^2 \\ \cline{1-1} 3{,}5x^2-3x+5 & \end{array} \qquad \text{car } 2x^2-(-1{,}5x^2)=3{,}5x^2$$

5) on regarde par quoi il faut multiplier le premier terme du diviseur pour obtenir le premier terme du reste obtenu:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-3x+5 & 2x-3 \\ \hline
-(x^3-1{,}5x^2) & 0{,}5x^2+1{,}75x \\ \cline{1-1}
3{,}5x^2-3x+5 &
\end{array}
\qquad \text{car } 1{,}75x\cdot 2x = 3{,}5x^2$$

6) on multiplie alors les termes du diviseur par ce dernier terme trouvé et on les aligne avec les puissances de *x*:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-3x+5 & 2x-3 \\ \hline
-(x^3-1{,}5x^2) & 0{,}5x^2+1{,}75x \\ \cline{1-1}
3{,}5x^2-3x+5 & \\
3{,}5x^2-5{,}25x &
\end{array}
\qquad \begin{array}{l}\text{car } 1{,}75x\cdot 2x = 3{,}5x^2 \\ \text{et } 1{,}75x\cdot(-3) = -5{,}25x\end{array}$$

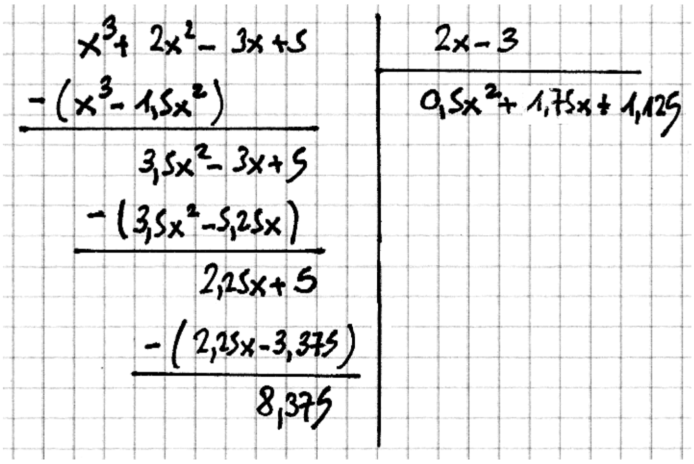
7) on soustrait ce qu'il faut et on abaisse les monômes pas touchés:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-3x+5 & 2x-3 \\ \hline
-(x^3-1{,}5x^2) & 0{,}5x^2+1{,}75x \\ \cline{1-1}
3{,}5x^2-3x+5 & \\
-(3{,}5x^2-5{,}25x) & \\ \cline{1-1}
2{,}25x+5 &
\end{array}
\qquad \text{car } -3x-(-5{,}25x) = 2{,}25x$$

8) on regarde par quoi il faut multiplier le premier terme du diviseur pour obtenir le premier terme du reste obtenu:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-3x+5 & 2x-3 \\ \hline
-(x^3-1{,}5x^2) & 0{,}5x^2+1{,}75x+1{,}125 \\ \cline{1-1}
3{,}5x^2-3x+5 & \\
-(3{,}5x^2-5{,}25x) & \\ \cline{1-1}
2{,}25x+5 &
\end{array}
\qquad \text{car } 1{,}125\cdot 2x = 2{,}25x$$

9) on multiplie alors les termes du diviseur par ce dernier terme trouvé et on les aligne avec les puissances de *x* et on soustrait ce qu'il faut:



On remarque qu'on ne peut alors plus continuer la division, car on ne peut pas multiplier 2x par un monôme pour obtenir 8,375. La division est donc terminée, le quotient est $0,5x^2+1,75x+1,125$ et le reste est $8,375$.

On peut alors écrire: $\frac{x^3+2x^2-3x+5}{2x-3}=0,5x^2+1,75x+1,125+\frac{8,375}{2x-3}$.

De manière générale, si D(x) est le dividende, d(x) est le diviseur, Q(x) est le quotient obtenu jusqu'à ce qu'on ne puisse plus continuer et R(x) est le reste qu'on obtient à ce moment-là (il peut être zéro), on peut écrire: $\frac{D(x)}{d(x)}=Q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$.

§ 8. Factorisations de polynômes

Factoriser un polynôme, c'est transformer une somme en un produit, contrairement à la multiplication qui consiste à transformer un produit en somme. La factorisation est le processus inverse du développement d'un produit.

Exemples:

$$9x^3+6x^2+12x=3x(3x^2+2x+4)$$
$$20m-5=5(4m-1)$$
$$y^2-2y+1=(y-1)(y-1)=(y-1)^2$$
$$u^2-16=(u+4)(u-4)$$
$$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$$
$$3x+6+2y+xy=(x+2)(3+y)$$

Il n'est pas toujours facile de factoriser un polynôme (les méthodes utilisées dans les exemples ci-dessus ne sont pas explicites). Il nous faut décrire ces méthodes en détail.

Il existe plusieurs méthodes de factorisation d'un polynôme.

1ère méthode ou méthode de mise en évidence:

Si les monômes formant le polynôme ont tous un diviseur commun, on le met en évidence, c'est-à-dire que l'on fait l'opération inverse de la distributivité.

Exemples:

Factoriser $4x^3+8x^2+10x$:

on remarque que $2x$ est diviseur de $4x^3$, $8x^2$ et $10x$; on peut alors écrire: $4x^3+8x^2+10x=2x\cdot(2x^2+4x+5)$, car $2x\cdot 2x^2=4x^3$, $2x\cdot 4x=8x^2$ et $2x\cdot 5=10x$.

Factoriser $-3x^3+4x^2$:

on remarque que x^2 est diviseur de $-3x^2$ et $4x^2$; on peut alors écrire $-3x^3+4x^2=x^2\cdot(-3x+4)$, car $x^2\cdot(-3x)=-3x^3$ et $x^2\cdot 4=4x^2$.

On ne peut bien sûr pas factoriser tous les polynômes en utilisant cette méthode (il suffit que les monômes le constituant n'aient aucun diviseur commun autre que 1 pour que cela ne marche pas).

2ème méthode ou méthode des identités remarquables:

Certains polynômes du deuxième degré peuvent se factoriser grâce aux identités remarquables.

Rappelons que les identités remarquables de degré 2 sont:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Exemples:

Factoriser $4x^2+20x+25$:

on peut le comparer à l'identité remarquable qui lui correspond: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$; on met l'une en dessous de l'autre ces deux expressions littérales:

$$\begin{array}{l} 4x^2+20x+25 \\ a^2+2ab+b^2; \end{array}$$

on identifie a^2 à $4x^2$ et b^2 à 25, ce qui signifie que $a = 2x$ et $b = 5$; on vérifie alors que $2ab = 20x$: $2ab = 2 \cdot 2x \cdot 5 = 20x$; on a donc $4x^2 + 20x + 25 = = (a+b)^2 = (2x+5)^2$.

Factoriser $x^2 - 6x + 9$:

on peut le comparer à l'identité remarquable qui lui correspond: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$; on met l'une en dessous de l'autre ces deux expressions littérales:

$$\begin{array}{c} x^2 - 6x + 9 \\ a^2 - 2ab + b^2; \end{array}$$

on identifie a^2 à x^2 et b^2 à 9, ce qui signifie que $a = x$ et $b = 3$; on vérifie alors que $2ab = 6x$: $2ab = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$; on a donc $x^2 - 6x + 9 = (a-b)^2 = (x-3)^2$.

Factoriser: $16x^2 - 25$:

on peut le comparer à l'identité remarquable qui lui correspond: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; on met l'une en dessous de l'autre ces deux expressions littérales:

$$\begin{array}{c} 16x^2 - 25 \\ a^2 - b^2: \end{array}$$

on identifie a^2 à $16x^2$ et b^2 à 25, ce qui signifie que $a = 4x$ et $b = 5$; on a alors $16x^2 - 25 = (a+b)(a-b) = (4x+5)(4x-5)$.

Cette méthode ne marche cependant pas pour tous les polynômes du second degré.

<u>3ème méthode ou méthode de factorisation de Newton:</u>

D'autres polynômes du deuxième degré peuvent se factoriser en utilisant une méthode différente que ci-dessus.

Pour factoriser un polynôme de la forme $x^2 + bx + c$ (on remarque que le coefficient de x^2 est 1), on va chercher des nombres m et n tels que $m + n = b$ et $m \cdot n = c$. S'ils existent, on aura alors $x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$.

<u>Exemples:</u>

Factoriser $x^2 + 5x + 6$:

on recherche m et n tels que $m + n = 5$ et $m \cdot n = 6$; on peut prendre $m = 3$ et $n = 2$ et on a alors: $x^2 + 5x + 6 = (x+m) \cdot (x+n) = (x+3) \cdot (x+2)$.

Factoriser $x^2 - 2x + 1$:

on recherche m et n tels que $m+n=-2$ et $m \cdot n=1$; on peut prendre $m=-1$ et $n=-1$ et on a alors: $x^2-2x+1=(x+m)\cdot(x+n)=(x-1)\cdot(x-1)=(x-1)^2$.

Là aussi, cette méthode ne marche pas pour tous les polynômes du second degré.

Il existe une méthode qui permet de trouver la factorisation de tout polynôme du deuxième degré, mais elle nécessite des connaissances qui dépassent ce chapitre.

Il en va de même pour des polynômes de degrés autres que deux.