Algèbre

Fractions rationnelles et opérations

§ 1. Fractions rationnelles

Une **fraction rationnelle** est le quotient de deux polynômes (ou monômes), au même titre qu'une fraction (numérique) est le quotient de deux nombres entiers.

Exemples: $\frac{x^2+2x-0,5}{2x-2,5}$, $\frac{2x}{x^3-x^2}$ et $\frac{1}{x}$ sont des fractions rationnelles.

§ 2. Equivalence, amplification, simplification et fractions irréductibles

Deux **fractions rationnelles** sont **équivalentes** si, pour passer de l'une à l'autre, on multiplie ou divise le numérateur et le dénominateur par le même polynôme (ou monôme).

L'**amplification d'une fraction rationnelle** est le fait de multiplier le numérateur et le dénominateur par le même polynôme (ou monôme).

La **simplification d'une fraction rationnelle** est le fait de diviser le numérateur et le dénominateur par le même polynôme (ou monôme).

Voici quelques exemples de fractions rationnelles équivalentes:

$\frac{x^2y}{x^3y} = \frac{1}{x}$ (simplification par le polynôme x^2y);

$\frac{2x^2+3}{x-2} = \frac{2x^3-6x^2+3x-9}{x^2-5x+6}$ (amplification par le polynôme $x-3$);

$\frac{x^2(x-y)+x(x-y)}{3x(x-y)} = \frac{x^2+x}{3x}$ (simplification par le polynôme $x-y$).

Une fraction rationnelle non simplifiable est dite **fraction rationnelle irréductible**.

L'amplification et la simplification de fractions rationnelles est très utile dans le calcul algébrique. Voici quelques critères permettant de distinguer les fractions irréductibles des fractions rationnelles simplifiables:

A) Dans les cas où les termes sont écrits sous forme de produit, on divise ces deux polynômes par leurs facteurs communs, s'ils existent.

Exemples: $\frac{(3x+2)(x^2+1)(1-x)}{(x-5)(x^2+1)} = \frac{(3x+2)(1-x)}{x-5}$ (simplification par x^2+1)

$\frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)(x+3)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$ (simplification par $(x-2)(x+3)$).

B) Dans les cas où les termes se présentent sous forme de sommes, il faut essayer de les factoriser (voir les méthodes de factorisation décrites dans le chapitre “Polynômes et opérations”)

Exemples: $\frac{3x-4x^2+0{,}5x^3}{6x^2+11x} = \frac{x(3-4x+0{,}5x^2)}{x(5x+11)} = \frac{3-4x+0{,}5x^2}{6x+11}$ (simplification par x après mise en évidence de ce facteur au numérateur et au dénominateur);

$\frac{2(x-y)+x^2(x-y)}{2x-2y+xy-y^2} = \frac{(2+x^2)(x-y)}{2(x-y)+y(x-y)} = \frac{(2+x^2)(x-y)}{(2+y)(x-y)} = \frac{2+x^2}{2+y}$ (simplification par $x-y$ après mise en évidence de ce facteur au numérateur et au dénominateur);

$\frac{4x^2+12x+9}{4x^2-9} = \frac{(2x+3)^2}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{2x+3}{2x-3}$ (simplification par $2x+3$ après transformation du numérateur au moyen de l'identité $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et du dénominateur par l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$).

C) Après avoir essayé les méthodes précédentes, on peut encore envisager la division de l'un des termes par l'autre.

Exemple: $\frac{x-2y}{x^3-8y^3} = \frac{1}{x^2+2xy+4y^2}$ (la division de x^3-8y^3 par $x-2y$ donne le quotient exact (sans reste) $x^2+2xy+4y^2$; il est donc possible de simplifier cette fraction rationnelle par $x-2y$).

D) Mentionnons quelque cas de fractions rationnelles irréductibles qui prêtent à confusions:

$\frac{x^2+y^2}{x+y}$ est irréductible car le carré de $x+y$ n'est pas x^2+y^2, mais $x^2+2xy+y^2$. D'autre part, x^2+y^2 n'est pas un membre d'une identité remarquable, la division de x^2+y^2 par $x+y$ ne se termine pas et il n'est pas possible de mettre des facteurs en évidence dans ces deux polynômes. En revanche, on a $\frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x-y} = \frac{x+y}{1} = x+y$.

$\frac{3x+2}{3x-2}$ est irréductible. La division euclidienne de l'un des termes par l'autre présente un reste non nul et il n'est pas possible de mettre des facteurs en évidence dans ces deux termes. En revanche, on a $\frac{3x-2}{2-3x} = \frac{3x-2}{-(-2+3x)} = \frac{3x-2}{-(3x-2)} = \frac{1}{-1} =$ $= -1$. Le numérateur et le dénominateur de cette dernière fraction sont des polynômes opposés.

§ 3. Additions et soustractions de fractions rationnelles

Pour **additionner ou soustraire deux fractions** numériques, il faut que leurs dénominateurs soient égaux. Cette règle reste valable pour des fractions rationnelles, bien que la recherche d'un dénominateur commun le plus petit possible soit moins aisée que celle du ppmc de deux nombres entiers.

Lorsque les fractions rationnelles ont été transformées en fractions rationnelles équivalentes de même dénominateur, il suffit, pour les additionner ou les soustraire, d'effectuer la somme ou la différence des numérateurs.

Exemples:

$\frac{3x^2+2x+1}{x^2+1} + \frac{x}{2x-3} = \frac{(3x^2+2x+1)(2x-3)}{(x^2+1)(2x-3)} + \frac{x(x^2+1)}{(x^2+1)(2x-3)} = \frac{6x^3-5x^2-4x-3+x^3+x}{(x^2+1)(2x-3)} = \frac{7x^3-5x^2-3x-3}{(x^2+1)(2x-3)}$, qui est irréductible. Le dénominateur commun est le produit des deux dénominateurs. Le numérateur de la somme a été simplifié par réduction des termes semblables. On laisse le dénominateur sous forme de produit.

$\frac{3}{(x+y)^2} - \frac{1}{x^2-y^2}$: Le produit des deux dénominateurs est évidemment un multiple de $(x+y)^2$ et de x^2-y^2. Cependant, en décomposant ces polynômes, nous pouvons trouver un multiple commun plus simple: on a $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$ et $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$. Le produit de deux facteurs $(x+y)$ et d'un facteur $(x-y)$ est multiple des deux dénominateurs. Le plus petit commun multiple cherché est donc $(x+y)^2(x-y)$. On amplifie la première fraction rationnelle par $x-y$, la seconde par $x+y$, puis on soustrait les numérateurs: $\frac{3}{(x+y)^2} - \frac{1}{x^2-y^2} = \frac{3(x-y)}{(x+y)^2(x-y)} - \frac{x+y}{(x+y)^2(x-y)} = \frac{3x-3y-x-y}{(x+y)^2(x-y)} = \frac{2x-4y}{(x+y)^2(x-y)}$.

$\frac{1}{x} + 3 - \frac{2-x}{(x+1)x} + \frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{(x+1)x} + \frac{3x(x+1)}{(x+1)x} - \frac{2-x}{(x+1)x} + \frac{2x}{(x+1)x} = \frac{x+1+3x^2+3x-2+x+2x}{(x+1)x} = \frac{3x^2+7x-1}{(x+1)x}$.

Le plus petit dénominateur commun des quatre fractions rationnelles données est $(x+1)x$. Dans la soustraction du numérateur de la troisième fraction, il faut tenir compte du fait que l'opposé de $2-x$ est $-2+x$.

§ 4. Multiplications et divisions de fractions rationnelles

Pour **multiplier deux fractions rationnelles**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. **Diviser par une fraction rationnelle** revient à multiplier par son inverse.

Exemples:

$\frac{(3x+2)x}{x^2+1} \cdot \frac{2x-5}{3x+2} = \frac{x(3x+2)(2x-5)}{(x^2+1)(3x+2)} = \frac{x(2x-5)}{x^2+1}$. Le produit de ces deux fractions se simplifie par $3x+2$. Cette simplification est évidente car le numérateur et le dénominateur du produit sont également des produits.

$$\frac{s^3-2x^2y+y^3}{x-3} : \frac{x^2y}{xy-3y} = \frac{x^3-2x^2y+y^3}{x-3} \cdot \frac{xy-3y}{x^2y} = \frac{(x^3-2x^2y+y^3)(xy-3y)}{(x-3)x^2y} = \frac{(x^3-2x^2y+y^3)(x-3)y}{(x-3)x^2y} = \frac{x^3-2x^2y+y^3}{x^2}.$$