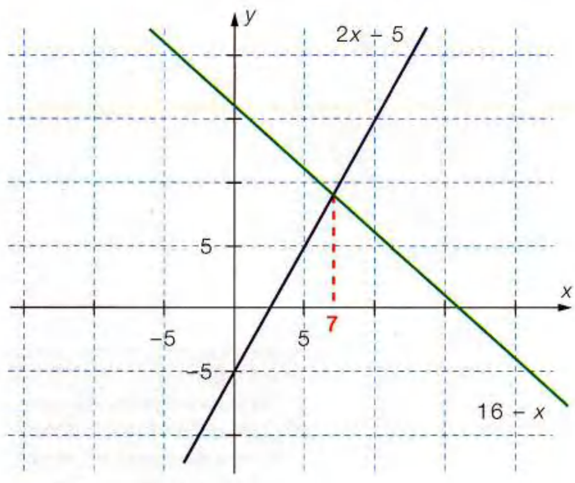
# Algèbre

# Equations du premier degré à une inconnue

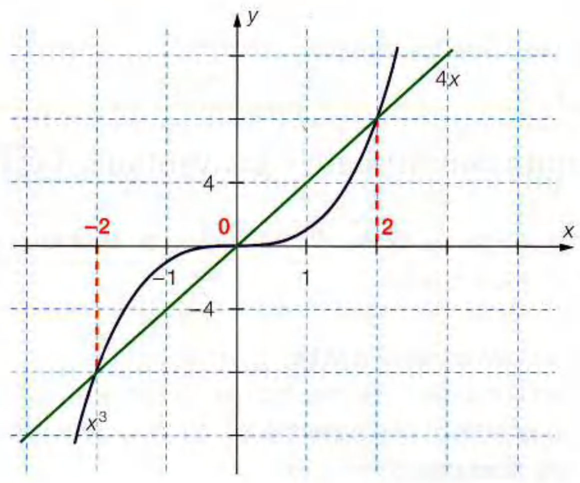
## § 1. Résolution graphique d'équations

Une méthode (pas toujours précise) pour résoudre une équation est de dessiner les graphes des fonctions représentées par le membre de gauche et par le membre de droite de l'équation. On cherche alors où ces deux graphes se coupent, ce qui nous permet de déterminer la ou les valeurs de l'inconnue (valeurs correspondantes sur l'axe x), ce qui nous donnera la ou les solutions de l'équation. On fait particulièrement cela lors qu'on a une équation qu'on ne sait pas résoudre par une autre méthode.

Exemple:




7 est la solution de l'équation
$2x-5 = 16-x$
car $2\cdot 7-5 = 16-7$
On note: $S = \{7\}$




$-2$ , $0$ et $2$ sont les solutions de l'équation
$x^3 = 4x$
car $(-2)^3 = 4\cdot(-2)$ ; $0^3 = 4\cdot 0$ ; $2^3 = 4\cdot 2$
On note: $S = \{-2 ; 0 ; 2\}$

## § 2. Règles d'équivalence entre équations

Certaines règles permettent de transformer une équation en une équation équivalente. On les appelle les **règles d'équivalence**:

**- effectuer un calcul littéral dans ses membres;**

**- additionner (ou soustraire) un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de l'équation;**

**- multiplier (ou diviser) les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.**

Exemple: on a l'équation $3x^2 - 2x = -5x + 12$; en additionnant $5x - 12$ aux deux membres, on obtient l'équation équivalente $3x^2 + 3x - 12 = 0$.

Il est à remarquer que si on divise ou multiplie par l'inconnue les deux membres d'une équation, on obtient une équation non équivalente à la première.

## § 3. Technique algébrique de résolutions des équations du premier degré à une inconnue

Les règles d'équivalence décrite ci-dessus permettent de résoudre toute équation du premier degré à une inconnue.

Voici plusieurs exemples qui montrent l'utilisation de cette technique:

### Exemple 1:

Lorsqu'il n'y a ni parenthèses ni fraction(s), le principe est de faire en sorte que tous les termes en x soient du même côté et que tous les termes sans x (les nombres seuls) soient de l'autre côté. Une simple division permet alors de trouver la valeur de x:

$$\begin{array}{rcl|l}
3x - 8 & = & x - 4 & -x \\
2x - 8 & = & -4 & +8 \\
2x & = & 4 & :2 \\
x & = & 2 &
\end{array}$$

Dans la première ligne, on a des *x* de chaque côté de l'égalité. Pour qu'il n'y en ait plus que d'un côté, on doit soustraire le nombre de *x* qu'il y a d'un côté (c'est pourquoi on fait –*x* des deux côtés). Dans la deuxième ligne, on a des nombres seuls de chaque côté de l'égalité. Puisque tous les *x* sont à gauche, il faut enlever les nombres seuls qui sont à gauche (c'est pourquoi on soustrait -8, ce qui revient à additionner 8, des deux côtés). Lorsqu'on est dans un situation comme la troisième ligne, il suffit de diviser le côté où il n'y a que des nombres seuls par le nombre qui est devant le *x* et on a le résultat.
A chaque fois, on note à droite d'une barre verticale les opérations effectuées qui permettent d'obtenir l'équation équivalente de la ligne suivante.

## Exemple 2:

Lorsqu'il y a des parenthèses mais pas de fraction(s), on utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition (et la soustraction) pour éliminer les parenthèses, puis on continue comme dans l'exemple 1:

$$
\begin{array}{l|l}
3(x+2) = -x+6 & \text{distributivité} \\
3x+6 = -x+6 & +x \\
4x+6 = 6 & -6 \\
4x = 0 & :4 \\
x = 0 &
\end{array}
$$

## Exemple 3:

Lorsqu'il y a une fraction mais pas de parenthèses, on multiplie tous les termes de l'équation par le dénominateur de la fraction, ce qui élimine la fraction, puis on continue comme dans l'exemple 1:

$$
\begin{array}{rcl|l}
\frac{x}{4} + 1 & = & x - 2 & \cdot 4 \\
x + 4 & = & 4x - 8 & -4x \\
-3x + 4 & = & -8 & -4 \\
-3x & = & -12 & :(-3) \\
x & = & 4 &
\end{array}
$$

S'il y a plusieurs fractions, on multiplie tous les termes par le dénominateur de la première fraction, puis on multiplie tous les termes par le dénominateur de la fraction, etc.

On peut aussi chercher le plus petit multiple commun de tous les dénominateurs des fractions, puis amplifier tous les termes de l'équation pour qu'ils aient ce ppmc au dénominateur. Il suffit alors de multiplier chaque terme par ce ppmc, puis continuer comme dans l'exemple 1.

## Exemple 4:

Lorsqu'il y a des parenthèses et une ou plusieurs fractions, on commence **toujours** par éliminer les parenthèses comme dans l'exemple 2, puis on élimine les fractions comme dans l'exemple 3, et on termine comme dans l'exemple 1

$$
\begin{array}{rcl|ll}
3\left(\frac{3}{4}x + 1\right) & = & \frac{2x}{3} - 4 & \text{distributivité} & \left(3 = \frac{3}{1}\right) \\
\frac{9}{4}x + 3 & = & \frac{2x}{3} - 4 & \cdot 4 & \left(4 = \frac{4}{1}\right) \\
9x + 12 & = & \frac{8x}{3} - 4 & \cdot 3 & \\
27x + 36 & = & 8x - 12 & -8x & \\
19x + 36 & = & -12 & -36 & \\
19x & = & -48 & :19 & \\
x & = & -\frac{48}{19} & &
\end{array}
$$

Lorsque la réponse finale n'est pas un nombre entier, on laisse généralement la réponse en fraction, mais on la rend irréductible.

## § 4. Equations n'ayant aucune solution ou ayant tous les nombres comme solutions

Il existe deux situations spéciales que l'on rencontre dans la résolution des équations du premier degré à une inconnue:

### Situation 1:

| | |
|---|---|
| $3(x-2)=3x-6$ | distributivité |
| $3x-6=3x-6$ | $-3x$ |
| $-6=-6$ | |

On arrive ici à une équation qui ne contient plus de lettres et qui est toujours vraie. On en conclut alors que l'équation admet tous les nombres réels comme solutions. Elle a donc une infinité de solutions.

### Situation 2:

| | |
|---|---|
| $3(x-2)=3x-5$ | distributivité |
| $3x-6=3x-5$ | $-3x$ |
| $-6=-5$ | |

On arrive ici à une équation qui ne contient plus de lettres, mais qui est manifestement fausse. On en conclut alors que l'équation n'admet aucune solution.

Ainsi, une équation du premier degré à une inconnue peut avoir zéro solution, une solution ou une infinité de solutions.

## § 5. Vérification des solutions trouvées

Après avoir trouvé la ou les solutions d'une équation, on peut toujours vérifier par soi-même si elle(s) est (sont) juste(s).

Il suffit pour cela de remplacer la lettre par une des valeurs trouvées et de voir si l'égalité est vérifiée, puis de procéder de même avec les autres valeurs trouvées si nécessaire.

Dans l'exemple 1 ci-dessus, nous avions trouvé $x = 2$. En remplaçant $x$ par 2 dans l'équation de départ, on obtient $3x - 8 = 3 \cdot 2 - 8 = 6 - 8 = -2$ et $x - 4 = 2 - 4 = -2$, ce qui est le même résultat. On a donc bien que $x = 2$ est la solution de $3x - 8 = x - 4$.

Il faut toujours vérifier si la ou les solutions trouvées sont correctes.

## § 6. Problèmes faisant intervenir des équations du premier degré à une inconnue

Une difficulté majeure en mathématiques est de transformer un problème énoncé en français en un problème énoncé en langage mathématique. Cela s'appelle la **mise en équations**.

Afin de mettre un problème en équations, puis de le résoudre, il y a un certain nombre d'étapes à suivre:

**1. Lire et comprendre l'énoncé du problème.**

**2. Faire la liste des quantités inconnues et leur donner un nom (x, y, z,...).**

**3. Traduire les informations qui sont données dans l'énoncé par des égalités qui utilisent les inconnues. Normalement, il doit y avoir autant d'équations que d'inconnues.**

**4. Résoudre la ou les équations obtenues.**

**5. Vérifier que la ou les solutions trouvées répondent bien à la question.**

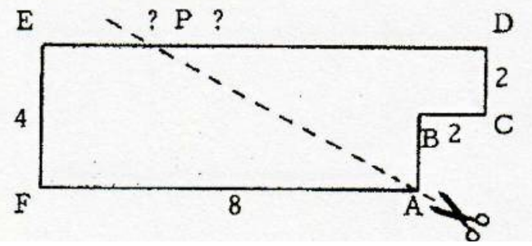
**6. Donner la réponse au problème.**

## § 7. Résolution de problèmes en utilisant des équations du premier degré à une inconnue

Voici un exemple d'application de la mise en équation décrite ci-dessus dans le cas d'un problème faisant intervenir une équation du premier degré à une inconnue. C'est cette marche à suivre qu'il faudra utiliser pour résoudre tout problème nécessitant une équation.

**Problème** : Où placer le point P sur le côté ED pour que la droite AP partage cette figure en deux parties de même aire ?

(mesures en cm)




**Choix de la variable (de l'inconnue)** :

La partie de gauche de la figure est le trapèze APEF, dont l'aire varie en fonction de la mesure de sa petite base, PE. Cette mesure peut être choisie comme variable. On l'appelle x :

x est la mesure du segment PE.

**Traduction de la situation par une équation** :

L'aire du trapèze de gauche doit être égale à celle de la partie de droite ou à la moitié de l'aire totale. Cette condition se traduit ainsi :

| aire du trapèze de gauche | égale à | la moitié de l'aire de la figure totale |
|---|---|---|
| $\frac{4(x+8)}{2}$ | $=$ | $\frac{1}{2}(4\cdot 8+2\cdot 2)$ |

**Résolution de l'équation** :

| | |
|---|---|
| $\frac{4(x+8)}{2} = \frac{1}{2}(4\cdot 8+2\cdot 2)$ | simplifications et réduction de chaque membre |
| $2(x+8) = \frac{1}{2}(32+4)$ | |
| $2x+16 = 18$ | $-16$ |
| $2x = 2$ | $\cdot\frac{1}{2}$ (ou $:2$) |
| $x = 1$ | 1 est la solution, unique, de l'équation. |

**Réponse et vérification** :

Le point P doit se situer à 1 cm de E, sur le côté ED. Le trapèze ainsi déterminé a bien la même aire que la partie de droite :

$$\frac{4(1+8)}{2} = 2\cdot 9 = 18 \qquad \frac{7\cdot 4}{2} + 2^2 = 14+4 = 18$$

## § 8. Equations sous forme de produit de polynômes du premier degré

Il arrive parfois que l'on doive **résoudre une équation dont le premier membre est un produit de polynômes du premier degré et le deuxième membre est nul**.

Dans ce cas, il suffit de résoudre l'une après l'autre chacune des équations formées par un de ces polynômes égal à zéro. Cela nous donnera toutes les solutions possibles de l'équation.

En effet, lorsque le produit de deux éléments est nuls, l'un de ces deux éléments doit être nul (si les deux éléments sont différents de zéro, le produit ne peut pas être zéro).

Une telle équation sous forme de produit de polynômes peut être donnée directement à résoudre ou elle peut provenir d'une factorisation d'une équation plus compliquée.

### Exemple:

Résoudre l'équation $(x-2)^2(3x-4)(2x+5)=0$.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, les solutions de cette équation sont les solutions de $(x-2)^2=0$, $3x-4=0$ et $2x+5=0$.

On a: $(x-2)^2=0$ ==> $x-2=0$ ==> $x=2$;

$3x-4=0$ ==> $3x=4$ ==> $x=0,75$;

$2x+5=0$ ==> $2x=-5$ ==> $x=-2,5$.

Par conséquent, les solutions de $(x-2)^2(3x-4)(2x+5)=0$ sont $x=2$, $x=0,75$ et $x=-2,5$.

## § 9. Transformations de formules en utilisant la technique des équations

Il arrive parfois que l'on doive, à partir d'une formule donnée, **isoler une des lettres**. Cela signifie qu'il faut transformer la formule en la considérant comme une équation, l'inconnue étant la lettre à isoler et les autres lettres étant considérée comme ayant une valeur connue, bien qu'elles restent sous forme de lettres.

### Exemples:

Isoler $r$ dans la formule du périmètre du cercle $p=2\pi r$.

On a $p = 2\pi r$ ==> $p = (2\pi)r$ ==> $\frac{p}{2\pi} = r$. Ainsi, on a isolé $r$: $r = \frac{p}{2\pi}$.

Isoler $a$ dans la formule du périmètre du rectangle $p = 2a + 2b$.

On a $p = 2a + 2b$ ==> $p - 2b = 2a$ ==> $\frac{p-2b}{2} = a$. Ainsi, on a isolé $a$: $a = \frac{p-2b}{2}$.

Isoler $r$ dans la formule du volume de la sphère $V = \frac{4\pi r^3}{4}$.

On a $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ ==> $3V = 4\pi r^3$ ==> $3V = (4\pi)r^3$ ==> $\frac{3V}{4\pi} = r^3$ ==> $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = r$.

Ainsi, on a isolé $r$: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ .