Algèbre

Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

§ 1. Systèmes d'équations

Plusieurs équations considérées simultanément forment un **système d'équations**.

Chaque équation exprime une condition d'une situation donnée. Le système d'équations entier impose simultanément toutes les conditions.

On utilise les systèmes d'équations lorsqu'il y a deux ou plusieurs inconnues dans un problème et qu'on cherche à les déterminer.

Voici des exemples de systèmes d'équations:

$$\left[\begin{array}{rcl} 3x - y & = & -10{,}5 \\ x + 4y & = & 16 \end{array}\right.$$

est un système du 1er degré de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est $S = \{ (-2 ; 4{,}5) \}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} 4x + 7y & = & 24 \\ 4x + y^2 & = & 12 \end{array}\right.$$

est un système du 2e degré de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est $S = \{ (-1 ; 4) ; (0{,}75; 3) \}$.

$$\left[\begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & -9 \\ 10x - 4y - z & = & 33 \\ -y + 1{,}2z & = & 8 \end{array}\right.$$

est un système du 1er degré de trois équations à trois inconnues dont l'ensemble des solutions est $S = \{ (3 ; -2 ; 5) \}$

L'**ensemble de solutions d'un système de deux équations à deux inconnues** (par exemple x et y), lorsqu'elles existent, est formé de couples de nombres (un couple étant une valeur pour x et une valeur pour y) qui, mises dans les deux équations du système, vérifient ces équations.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre des systèmes d'équations. Deux sont décrites ci-dessous.

§ 2. Méthode de substitution

La **méthode de substitution** est la suivante:

- on observe les deux équations du premier degré à une inconnue que l'on a;
- on choisit l'équation qui exprime une inconnue en fonction de l'autre ou celle qui est proche de cela (par exemple, si on a une des équations qui est $y = 2x - 5$, on choisira celle-là, car elle exprime *y* en fonction de *x*; si on a une des équations qui est $2x = 3y - 6$, on choisira aussi celle-là, car elle est proche d'exprimer *x* en fonction de *y*);
- si ce n'est pas déjà le cas, on exprime cette équation choisie de façon à avoir explicitement une des inconnues en fonction de l'autre (dans le deuxième exemple ci-dessus, on a choisit $2x = 3y - 6$; en divisant les deux membres de cette équation par 2, on obtient $x = \frac{3y}{2} - 3$, qui exprime *x* en fonction de *y*);
- on procède maintenant à la substitution dans l'autre équation: si on a obtenu par exemple *y* en fonction de *x* dans l'équation choisie au début, on va pouvoir remplacer dans l'autre équation *y* par cette relation contenant *x*; cela nous donnera une équation du premier degré à une inconnue, équation que l'on sait résoudre (si, par exemple, on a le système d'équations suivants: $2x = 3y - 6$ et $x + y = 4$, on a vu ci-dessus que la première équation peut être transformé en $x = \frac{3y}{2} - 3$; dans la deuxième équation, on peut alors remplacer *x* par $\frac{3y}{2} - 3$, puisque que c'est la même chose que *x*; on obtient ainsi: $\frac{3y}{2} - 3 + y = 4$; en résolvant cette équation du premier degré à une inconnue, on trouve $y = \frac{14}{5}$);
- une fois que l'on a trouvé la solution pour une des inconnues (dans l'exemple, y), il suffit de remplacer la valeur trouvée dans la relation liant une inconnue en fonction de l'autre et effectuer le calcul pour trouver la valeur de l'autre inconnue (dans l'exemple, on a trouvé$y = \frac{14}{5}$; comme $x = \frac{3y}{2} - 3$, on a alors $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{5} - 3 = \frac{21}{5} - 3 == \frac{6}{5}$);
- on conclut alors en donnant la solution du système d'équations (ici, $x = \frac{6}{5}$ et $y = \frac{14}{5}$).

§ 3. Exemple d'utilisation de la méthode de substitution

Résoudre le système d'équations:

$$4x + y = 5$$
$$3x + 6y = -12$$

- l'équation qui est le plus proche d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre est la première: de $4x + y = 5$, par soustraction dans les deux membres de $4x$, on trouve $y = 5 - 4x$;
- par substitution dans la deuxième équation, c'est-à-dire en remplaçant le y par $5-4x$ (puisqu'ils sont égaux), on trouve:

$3x + 6(5-4x) = -12$	distributivité
$3x + 30 - 24x = -12$	réduction
$-21x + 30 = -12$	-30
$-21x = -42$	: (-21)
$x = 2$;	

- comme on avait $y = 5 - 4x$ et que $x = 2$, on obtient pour y: $y = 5 - 4 \cdot 2 = 5 - 8 = -3$;
- la solution du système d'équations est donc: $x = 2$ et $y = -3$, que l'on symbolise parfois en $S = \{(2;-3)\}$.

§ 4. Méthode de combinaison linéaire ou d'addition

Une deuxième méthode de résolution des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues est la **méthode de combinaison linéaire** ou **méthode d'addition**. Elle est la suivante:

- la première étape est de mettre, si ce n'est pas déjà le cas, les deux équations sous la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont des nombres connus (par exemple, si on part du système d'équations $4x + y = 27 + 2x - 2y$ et $4x - 2y = 1 - x$, on les transforme en $2x + 3y = 27$ et $5x - 2y = 1$ par addition et soustraction à l'intérieur de chaque équation);
- on va maintenant multiplier chacune des équations par des nombres de telle manière que, lorsqu'on additionnera les équations obtenues, il ne restera plus qu'une

inconnue dans la somme (dans l'exemple, si on multiplie l'équation $2x+3y=27$ par 2 et l'équation $5x-2y=1$ par 3, on obtient respectivement les équations $4x+6y=54$ et $15x-6y=3$; on voit que, en additionnant les deux équations, c'est-à-dire en additionnant les membres de gauche d'un côté et les membres de droite de l'autre côté, il n'y aura plus de y);

- on additionne les deux équations obtenues (ici, on obtient $19x=57$) et on résout l'équation obtenue qui est une équation du premier degré à une inconnue (on trouve $x=3$);
- on reprend alors une des équations de départ (ici par exemple $2x+3y=27$) et on remplace l'inconnue par la valeur trouvée (ici $x=3$); cela nous donne une équation du premier degré pour l'autre inconnue (ici, on trouve $2\cdot 3+3y=27$, c'est-à-dire $6+3y=27$);
- on résout cette dernière équation du premier degré à une inconnue (ici, on obtient, par soustraction de 6, $3y=21$, c'est-à-dire $y=7$);
- on conclut alors en donnant la solution du système d'équations (ici, $x=3$ et $y=7$).

§ 5. Exemple d'utilisation de la méthode de combinaison linéaire ou d'addition

Résoudre le système d'équations:

$$4x+y=5$$
$$3x+6y=-12$$

(c'est le même que dans l'exemple d'utilisation de la méthode de substitution, ce qui montre que l'on peut utiliser l'une des deux méthodes, à choix):

- les équations sont bien de la forme $ax+by=c$;
- on multiplie la première équation par 6 et la seconde par -1, ceci afin d'obtenir une fois 6y et une fois -6y: $24x+6y=30$; $-3x-6y=12$;
- on additionne ces deux équations: $21x=42$;
- par division par 2, on trouve: $x=2$;
- en mettant $x=2$ dans la première équation (par exemple), on obtient:

$$4 \cdot 2 + y = 5$$
$$8 + y = 5$$
$$y = -3;$$

- la solution du système d'équations est donc: $x = 2$ et $y = -3$, que l'on symbolise parfois en $S = \{(2; -3)\}$ (qui est bien la même solution que dans l'exemple d'utilisation de la méthode de substitution).

§ 6. Problèmes faisant intervenir des systèmes d'équations du premier degré à une inconnue

On doit résoudre le problème suivant:

Sachant que 3 croissants et 4 pains au chocolat coûtent 13,30 frs et que 2 croissants et 3 pains au chocolat coûtent 9,60 frs, trouver le prix d'un croissant et le prix d'un pain au chocolat.

Les inconnues sont le prix d'un croissant et le prix d'un pain au chocolat.

On appelle x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain au chocolat.

3 croissants et 4 pains au chocolat coûtent 13,30 frs ==> $3x + 4y = 13,3$.

2 croissants et 3 pains au chocolat coûtent 9,60 frs ==> $2x + 3y = 9,6$.

On doit donc résoudre le système:

$$3x + 4y = 13,3$$
$$2x + 3y = 9,6.$$

On va utiliser la technique de combinaison linéaire ou d'addition (la méthode de substitution marcherait aussi).

Multiplions la première équation par 3: on obtient: $9x + 12y = 39,9$

Multiplions la deuxième équation par -4: on obtient: $-8x - 12y = -38,4$.

En additionnant ces deux dernières relations, on trouve: $x = 1,5$.

En remplaçant x par $1,5$ dans la première équation du système de départ, on obtient:

$3 \cdot 1,5 + 4y = 13,3$ ==> $4,5 + 4y = 13,3$ ==> $4y = 8,8$ ==> $y = 2,2$.

On en conclut que le prix d'un croissant est de 1,50 frs et que celui d'un pain au chocolat est de 2,20 frs.

On peut aisément vérifier que cette solution satisfait au problème de départ.