Exercice 1

On doit décomposer en facteurs avec les formules de Viète : $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$.
Cela signifie que, pour une fonction du 2e degré de la forme x^2+bx+c, on doit trouver p et q tels que $p+q=b$ et $p\cdot q=c$.

1) x^2-6x+8 : on a $b=-6$ et $c=8 \Rightarrow p+q=-6$ et $pq=8 \Rightarrow p=-2$ et $q=-4$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$.

2) $6-7x+x^2=x^2-7x+6$: on a $b=-7$ et $c=6 \Rightarrow p+q=-7$ et $pq=6 \Rightarrow p=-1$ et $q=-6$ (ou le contraire) $\Rightarrow 6-7x+x^2=(x-1)(x-6)$.

3) $-x+x^2-12=x^2-x-12$: on a $b=-1$ et $c=-12 \Rightarrow p+q=-1$ et $pq=-12 \Rightarrow p=3$ et $q=-4$ (ou le contraire) $\Rightarrow -x+x^2-12=(x+3)(x-4)$.

4) $x^2+12-8x=x^2-8x+12$: On a $b=-8$ et $c=12 \Rightarrow p+q=-8$ et $pq=12 \Rightarrow p=-2$ et $q=-6$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2+12-8x=(x-2)(x-6)$.

5) $x^2-2x-15$: on a $b=-2$ et $c=-15 \Rightarrow p+q=-2$ et $pq=-15 \Rightarrow p=3$ et $q=-5$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$.

6) x^2-6x-7 : on a $b=-6$ et $c=-7 \Rightarrow p+q=-6$ et $pq=-7 \Rightarrow p=1$ et $q=-7$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2-6x-7=(x+1)(x-7)$.

7) x^4-4x^2-5 : posons $y=x^2$; on obtient $x^4-4x^2-5=y^2-4x-5$; on a $b=-4$ et $c=-5$
$\Rightarrow p+q=-4$ et $pq=-5 \Rightarrow p=1$ et $q=-5$ (ou le contraire)
$\Rightarrow y^2-4x-5=(y+1)(y-5) \Rightarrow x^4-4x^2-5=(x^2+1)(x^2-5)$;
x^2+1 n'est pas factorisable : on a ici $b=0$ et $c=1 \Rightarrow p+q=0$ et $pq=1$
$\Rightarrow q=-p$ et $pq=p(-p)=-p^2=1 \Rightarrow p^2=-1$, ce qui est impossible ;
$x^2-5=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$: on a ici $b=0$ et $c=-5 \Rightarrow p+q=0$ et $pq=-5$
$\Rightarrow q=-p$ et $pq=p(-p)=-p^2=-5 \Rightarrow p^2=5 \Rightarrow p=\sqrt{5}$ et $q=-\sqrt{5}$;
ainsi $x^4-4x^2-5=(x^2+1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.

8) y^6-9y^3+8 : posons $z=y^3$; on obtient z^2-9z+8 ; on a $b=-9$ et $c=8 \Rightarrow p+q=-9$ et $pq=8$
$\Rightarrow p=-1$ et $q=-8$ (ou le contraire) $\Rightarrow z^2-9z+8=(z-1)(z-8)$
$\Rightarrow y^6-9y^3+8=(y^3-1)(y^3-8)$ (peut-être peut-on encore factoriser y^3-1 et y^3-8, mais cela ne concerne plus les formules de Viète, qui sont uniquement pour les fonctions du 2e degré).

9) $x^5-5x^3+4x=x(x^4-5x^2+4)$: on doit factoriser x^4-5x^2+4 ; posons $y=x^2$, on obtient
$x^4-5x^2+4=y^2-5y+4$; on a $b=-5$ et $c=4 \Rightarrow p+q=-5$ et $pq=4$
$\Rightarrow p=-1$ et $q=-4$ (ou le contraire) $\Rightarrow y^2-5y+4=(y-1)(y-4)$
$\Rightarrow x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)$;

$x^2-1=(x+1)(x-1)$: on a ici $b=0$ et $c=-1 \Rightarrow p+q=0 \Rightarrow pq=-1$

$\Rightarrow q=-p$ et $pq=p(-p)=-p^2=-1 \Rightarrow p^2=1 \Rightarrow p=1$ et $q=-1$;

$x^2-4=(x+2)(x-2)$: on a ici $b=0$ et $c=-4 \Rightarrow p+q=0$ et $pq=-4$

$\Rightarrow q=-p$ et $pq=p(-p)=-p^2=-4 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=2$ et $q=-2$;

ainsi $x^4-5x^2+4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ et

$x^5-5x^3+4x=x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$.

10) $2x^2+10x+12=2(x^2+5x+6)$: on doit factoriser x^2+5x+6 ; on a $b=5$ et $c=6$

$\Rightarrow p+q=5$ et $pq=6 \Rightarrow p=2$ et $q=3$ (ou le contraire)

$\Rightarrow x^2+5x+6=(x+2)(x+3) \Rightarrow 2x^2+10x+12=2(x+2)(x+3)$.

11) $3x^2-9x-12=3(x^2-3x-4)$: on doit factoriser x^2-3x-4 ; on a $b=-3$ et $c=-4$

$\Rightarrow p+q=-3$ et $pq=-4 \Rightarrow p=1$ et $q=-4$ (ou le contraire)

$\Rightarrow x^2-3x-4=(x+1)(x-4) \Rightarrow 3x^2-9x-12=3(x+1)(x-4)$.

12) $(a+b)^2+(a+b)-30$: on pose $y=a+b \Rightarrow (a+b)^2+(a+b)-30=y^2+y-30$; on a $b=1$

et $c=-30 \Rightarrow p+q=1$ et $pq=-30 \Rightarrow p=6$ et $q=-5$ (ou le contraire)

$\Rightarrow y^2+y-30=(y+6)(y-5) \Rightarrow (a+b)^2+(a+b)-30=$

$=(a+b+6)(a+b-5)$.

13) $(2x+y)^2+3(2x+y)-28$: on pose $z=2x+y \Rightarrow (2x+y)^2+3(2x+y)-28=z^2+3z-28$;

on a $a=3$ et $b=-28 \Rightarrow p+q=3$ et $pq=-28 \Rightarrow p=7$ et $q=-4$ (ou le contraire) $\Rightarrow z^2+3z-28=(z+7)(z-4)$

$\Rightarrow (2x+y)^2+3(2x+y)-28=(2x+y+7)(2x+y-4)$.

14) $x^2-11x+30$: on a $b=-11$ et $c=30 \Rightarrow p+q=-11$ et $pq=30 \Rightarrow p=-5$ et $q=-6$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2-11x+30=(x-5)(x-6)$.

15) $x^2+5x-14$: on a $b=5$ et $c=-14 \Rightarrow p+q=5$ et $pq=-14 \Rightarrow p=7$ et $q=-2$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2+5x-14=(x+7)(x-2)$.

16) $x^2+5x-24$: on a $b=5$ et $c=-24 \Rightarrow p+q=5$ et $pq=-24 \Rightarrow p=8$ et $q=-3$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2+5x-24=(x+8)(x-3)$.

17) $2x^2-6x-8=2(x^2-3x-4)$: on doit factoriser x^2-3x-4 ; on a $b=-3$ et $c=-4$

$\Rightarrow p+q=-3$ et $pq=-4 \Rightarrow p=1$ et $q=-4$ (ou le contraire)

$\Rightarrow x^2-3x-4=(x+1)(x-4) \Rightarrow 2x^2-6x-8=2(x+1)(x-4)$.

18) $-3x^2-6x+9=-3(x^2+2x-3)$: on doit factoriser x^2+2x-3 ; on a $b=2$ et $c=-3$

$\Rightarrow p+q=2$ et $pq=-3 \Rightarrow p=1$ et $q=-3$ (ou le contraire)

$\Rightarrow x^2+2x-3=(x+1)(x-3) \Rightarrow -3x^2-6x+9=-3(x+1)(x-3)$.

19) $-2y^2+18y-40=-2(y^2-9y+20)$: on doit factoriser $y^2-9y+20$; on a $b=-9$ et $c=20 \Rightarrow p+q=-9$ et $pq=20 \Rightarrow p=-4$ et $q=-5$ (ou le contraire) $\Rightarrow y^2-9y+20=(y-4)(y-5) \Rightarrow -2y^2+18y-40=-2(y-4)(y-5)$.

20) $x^3+4x^2-5x=x(x^2+4x-5)$: on doit factoriser x^2+4x-5 ; on a $b=4$ et $c=-5 \Rightarrow p+q=4$ et $pq=-5 \Rightarrow p=1$ et $q=-5$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2+4x-5=(x+1)(x-5) \Rightarrow x^3+4x^2-5x=x(x+1)(x-5)$.

21) $(x+y)^2-3(x+y)-10$: on pose $z=x+y \Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)-10=z^2-3z-10$; on a $b=-3$ et $c=-10 \Rightarrow p+q=-3$ et $pq=-10 \Rightarrow p=2$ et $q=-5$ (ou le contraire) $\Rightarrow z^2-3z-10=(z+2)(z-5)$
$\Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)-10=(x+y+2)(x+y-5)$.

22) $(x-y)^3+2(x-y)^2+3(x-y)=(x-y)\left((x-y)^2+2(x-y)+3\right)$: on doit factoriser $(x-y)^2+2(x-y)+3$; on pose $z=x-y \Rightarrow (x-y)^2+2(x-y)+3=z^2+2z+3$; on a $b=2$ et $c=3 \Rightarrow p+q=2$ et $pq=3$, ce qui est exclu (on ne peut pas trouver p et q tel que $p+q=2$ et $pq=3$)
$\Rightarrow (x-y)^3+2(x-y)^2+3(x-y)=(x-y)\left((x-y)^2+2(x-y)+3\right)$.

Exercice 2.

Lorsqu'on doit résoudre une équation du 2^e degré ou plus, une manière est de l'écrire comme "polynôme $=0$", de factoriser le polynôme en "$a \cdot b$", puis, pour avoir $a \cdot b = 0$, de dire que soit $a=0$, soit $b=0$ (si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a \cdot b \neq 0$). On résout alors $a=0$ et $b=0$, ce qui nous donne les solutions de "polynôme $=0$".

1) $x(x+3)=0$ (déjà factorisé) $\Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x+3=0 \Rightarrow x=-3$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=0$ et $x=-3$.

2) $x^3-x^2=0$: on a $x^3-x^2=x^2(x-1) \Rightarrow x^3-x^2=0$ équivaut à $x^2(x-1)=0$
$\Rightarrow$ soit $x^2=0$, soit $x-1=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x=1$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=0$ et $x=1$.

3) $4x^2-1=0$: on doit factoriser $4x^2-1$ en utilisant les formules de Viète (si on a x^2+bx+c, on aura $x^2+bx+c=(x+p)(x+q)$ avec p et q solutions de $p+q=b$ et $pq=c$) ; ici, on a $4x^2-1=$
$=4(x^2-\frac{1}{4})$; pour $x^2-\frac{1}{4}$, on a $b=0$ et $c=-\frac{1}{4} \Rightarrow p+q=0$
et $pq=-\frac{1}{4} \Rightarrow q=-p$ et $pq=p(-p)=-p^2=-\frac{1}{4} \Rightarrow p^2=\frac{1}{4}$
$\Rightarrow p=\frac{1}{2}$ et $q=-\frac{1}{2}$; ainsi $x^2-\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$ et
$4x^2-1=4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})=2(x+\frac{1}{2})\cdot 2(x-\frac{1}{2})=(2x+1)(2x-1)$;
ainsi $4x^2-1=0$ équivaut à $(2x+1)(2x-1)=0 \Rightarrow$ soit $2x+1=0$, soit $2x-1=0 \Rightarrow$ soit $x=-\frac{1}{2}$ et $x=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=-\frac{1}{2}$ et $x=\frac{1}{2}$.

4) $4x^3-36x=0 \Rightarrow 4x(x^2-9)=0$: on doit factoriser x^2-9 ; on a $b=0$ et $c=-9$
$\Rightarrow p+q=0$ et $pq=-9 \Rightarrow q=-p$ et $pq=p(-p)=-p^2=-9$
$\Rightarrow p^2=9 \Rightarrow p=3$ et $q=-3 \Rightarrow x^2-9=(x+3)(x-3)$;
ainsi $4x(x^2-9)=0 \Rightarrow$ soit $4x=0$, soit $x^2-9=0$
$\Rightarrow$ soit $x=0$, soit $(x+3)(x-3)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x+3=0$, soit $x-3=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x=-3$, soit $x=3$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=0$, $x=-3$ et $x=3$.

5) $x^2+5x+6=0$: on doit factoriser x^2+5x+6 ; on a $b=5$ et $c=6 \Rightarrow p+q=5$ et $pq=6 \Rightarrow p=2$ et $q=3$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2+5x+6=$
$=(x+2)(x+3)$;
ainsi $x^2+5x+6=0$ équivaut à $(x+2)(x+3)=0 \Rightarrow$ soit $x+2=0$, soit $x+3=0 \Rightarrow$ soit $x=-2$, soit $x=-3$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=-2$ et $x=-3$.

6) $4(x-3) = x^2-9 \Rightarrow 4x-12 = x^2-9 \Rightarrow x^2-4x+3=0$: on doit factoriser x^2-4x+3 ; on a $b=-4$ et $c=3 \Rightarrow p+q=-4$ et $pq=3$ $\Rightarrow p=-1$ et $q=-3$ (ou le contraire) $\Rightarrow x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$;
ainsi $4(x-3)=x^2-9$ est équivalente à $(x-1)(x-3)=0$
$\Rightarrow$ soit $x-1=0$, soit $x-3=0 \Rightarrow$ soit $x=1$, soit $x=3$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=1$ et $x=3$.

Exercice 3.

La méthode générale pour résoudre une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ est la suivante:

- On calcule $\Delta = b^2-4ac$;
- si $\Delta<0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution;
- si $\Delta=0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une solution unique donnée par $x=-\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta>0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

1) $3x^2+4x-5=0$: on a $a=3$, $b=4$ et $c=-5 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=4^2-4.3.(-5)=16+60=76>0$
$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{76}=2\sqrt{19} \Rightarrow$ les deux solutions sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+2\sqrt{19}}{2\cdot 3}=$
$=\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-2\sqrt{19}}{2\cdot 3}=\frac{-2-\sqrt{19}}{3}$.

2) $x^2-2x-10=0$: on a $a=1$, $b=-2$ et $c=-10 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4.1.(-10)=4+40=$
$=44>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{44}=2\sqrt{11} \Rightarrow$ les deux solutions sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=$
$=\frac{2+2\sqrt{11}}{2.1}=1+\sqrt{11}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-2\sqrt{11}}{2.1}=1-\sqrt{11}$.

3) $5x^2-20x+20=0$: on a $a=5$, $b=-20$ et $c=20 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-20)^2-4.5.20=400-400=0$
$\Rightarrow$ l'unique solution est $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-20}{2.5}=\frac{20}{10}=2$.

4) $2x^2-x+2=0$: on a $a=2$, $b=-1$ et $c=2 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4.2.2=1-16=-15<0$
$\Rightarrow$ l'équation n'a pas de solution.

5) $3x^2-5x=10 \Rightarrow 3x^2-5x-10=0$: on a $a=3$, $b=-5$ et $c=-10 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=$
$=(-5)^2-4.3.(-10)=25+120=145>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{145} \Rightarrow$ les 2 solutions sont
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+\sqrt{145}}{2\cdot 3}=\frac{5+\sqrt{145}}{6}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-\sqrt{145}}{2\cdot 3}=\frac{5-\sqrt{145}}{6}$.

6) $2x^2-6x-20=0$: on a $a=2$, $b=-6$ et $c=-20 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4.2.(-20)=$
$=36+160=196 \Rightarrow \sqrt{196}=14 \Rightarrow$ les 2 solutions sont
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+14}{2.2}=\frac{20}{4}=5$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-14}{2.2}=\frac{-8}{4}=-2$.

7) $18=2x^2 \Rightarrow 2x^2-18=0$: on a $a=2$, $b=0$, $c=-18 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=0^2-4.2.(-18)=144>0$
$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=12 \Rightarrow$ les 2 solutions sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0+12}{2.2}=\frac{12}{4}=3$ et
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0-12}{2.2}=-\frac{12}{4}=-3$.

8) $24-2x=2x^2 \Rightarrow 2x^2+2x-24=0$: on a $a=2$, $b=2$ et $c=-24 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=2^2-4.2.(-24)=$
$=4+192=196>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=14 \Rightarrow$ les 2 solutions sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=$
$=\frac{-2+14}{2.2}=\frac{12}{4}=3$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-14}{2.2}=-\frac{16}{4}=-4$.

9) $x(8-2x)=6 \Rightarrow 8x-2x^2=6 \Rightarrow 2x^2-8x+6=0$: on a $a=2$, $b=-8$ et $c=6 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=$
$=(-8)^2-4.2.6=64-48=16>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4 \Rightarrow$ les 2 solutions sont:
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+4}{2.2}=\frac{12}{4}=3$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-4}{2.2}=\frac{4}{4}=1$.

10) $7(x^2-9)=x(x-3) \Rightarrow 7x^2-63=x^2-3x \Rightarrow 6x^2+3x-63=0$: on a $a=6$, $b=3$ et $c=-63$

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot6\cdot(-63)=9+1512=1521>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=39$

$\Rightarrow$ les 2 solutions sont $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+39}{2\cdot6}=\dfrac{36}{12}=3$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=$

$=\dfrac{-3-39}{2\cdot6}=\dfrac{-42}{12}=-\dfrac{7}{2}$.

11) $\dfrac{10}{x}+1=3x$ $(x\neq0) \Rightarrow 10+x=3x^2 \Rightarrow 3x^2-x-10=0$: on a $a=3$, $b=-1$ et $c=-10$

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot3\cdot(-10)=1+120=121>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=11$

$\Rightarrow$ les 2 solutions sont $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+11}{2\cdot3}=2$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=$

$=\dfrac{1-11}{2\cdot3}=-\dfrac{5}{3}$.

12) $\sqrt{x^2-5x}=3x \Rightarrow x^2-5x=9x^2 \Rightarrow 8x^2+5x=0$: on a $a=8$, $b=5$ et $c=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=$

$=5^2-4\cdot8\cdot0=25>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5 \Rightarrow$ les 2 solutions de $8x^2+5x=0$ sont

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+5}{2\cdot8}=0$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-5}{2\cdot8}=-\dfrac{5}{8}$; comme on a élevé l'équation de départ au carré, on doit vérifier les solutions dans l'équation de départ : avec $x=0$, on a $\sqrt{x^2-5x}=0$ et $3x=0$; avec $x=-\dfrac{5}{8}$, on a $\sqrt{\left(-\dfrac{5}{8}\right)^2-5\cdot\left(-\dfrac{5}{8}\right)}=\sqrt{\dfrac{25}{64}+\dfrac{25}{8}}=\sqrt{\dfrac{225}{64}}=\dfrac{15}{8}$ et $3x=3\left(-\dfrac{5}{8}\right)=-\dfrac{15}{8}\neq\dfrac{15}{8}$;

ainsi l'unique solution de $\sqrt{x^2-5x}=3x$ est $x=0$.

Exercice 4

Pour factoriser une expression du 2e degré de la forme ax^2+bx+c, on cherche, si elles existent, les solutions de $ax^2+bx+c=0$ (x_1 et x_2) et on a alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

1) $2x^2+5x-3$: $2x^2+5x-3=0 \Rightarrow a=2, b=5$ et $c=-3 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=5^2-4.2.(-3)=$
$=25+24=49 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7 \Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+7}{2.2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-7}{2.2}=\frac{-12}{4}=-3$; on a alors $2x^2+5x-3=2(x-\frac{1}{2})(x+3)=$
$=(2x-1)(x+3)$.

2) $4x^2-11x+6$: $4x^2-11x+6=0 \Rightarrow a=4, b=-11$ et $c=6 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-11)^2-4.4.6=$
$=121-96=25 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5 \Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{11+5}{2.4}=\frac{16}{8}=2$ et
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{11-5}{2.4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$; on a alors $4x^2-11x+6=4(x-2)(x-\frac{3}{4})=$
$=(x-2)(4x-3)$.

3) $-2x^2+11x-12$: $-2x^2+11x-12=0 \Rightarrow a=-2, b=11$ et $c=-12 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=11^2-4.(-2)(-12)=$
$=121-96=25 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5 \Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-11+5}{2.(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$ et
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-11-5}{2.(-2)}=\frac{-16}{-4}=4$; on a alors $-2x^2+11x-12=-2(x-\frac{3}{2})(x-4)=$
$=-(2x-3)(x-4)$.

4) $x^2+x-156$: $x^2+x-156=0 \Rightarrow a=1, b=1$ et $c=-156 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1^2-4.1.(-156)=$
$=1+624=625 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=25 \Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+25}{2.1}=12$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=$
$=\frac{-1-25}{2.1}=-13 \Rightarrow x^2+x-156=(x-12)(x+13)$.

5) $3x^2+5x+8$: $3x^2+5x+8=0 \Rightarrow a=3, b=5$ et $c=8 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=5^2-4.3.8=$
$=25-96=-71<0 \Rightarrow 3x^2+5x+8=0$ n'a pas de solution
$\Rightarrow 3x^2+5x+8$ n'est pas factorisable.

6) $5x^2+16x+3$: $5x^2+16x+3=0 \Rightarrow a=5, b=16$ et $c=3 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=16^2-4.5.3=$
$=256-60=196 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=14 \Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-16+14}{2.5}=-\frac{1}{5}$ et
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-16-14}{2.5}=-3 \Rightarrow 5x^2+16x+3=5(x+\frac{1}{5})(x+3)=$
$=(5x+1)(x+3)$.

7) $-3x^2-14x+5$: $-3x^2-14x+5=0 \Rightarrow a=-3, b=-14$ et $c=5 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4(-3).5=$
$=196+60=256 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=16 \Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{14+16}{2.(-3)}=-5$ et
$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{14-16}{2.(-3)}=\frac{1}{3} \Rightarrow -3x^2-14x+5=-3(x+5)(x-\frac{1}{3})=$
$=-(x+5)(3x-1)$.

8) $6x^2+4x-\frac{5}{6}$: $6x^2+4x-\frac{5}{6}=0 \Rightarrow 36x^2+24x-5=0 \Rightarrow a=36, b=24$ et $c=-5$
$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=24^2-4.36.(-5)=576+720=1296 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=36$
$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-24+36}{2.36}=\frac{12}{72}=\frac{1}{6}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-24-36}{2.36}=\frac{-60}{72}=-\frac{5}{6}$
$\Rightarrow 6x^2+4x-\frac{5}{6}=6(x-\frac{1}{6})(x+\frac{5}{6})=\frac{1}{6}.6(x-\frac{1}{6}).6(x+\frac{5}{6})=\frac{1}{6}(6x-1)(6x+5)$.

9) $-6x^2-18x+60$: $-6x^2-18x+60=0 \Rightarrow x^2+3x-10=0 \Rightarrow a=1, b=3, c=-10$

$\Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 3^2-4\cdot 1\cdot(-10) = 9+40 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+7}{2\cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-7}{2\cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$

$\Rightarrow -6x^2-18x+60 = -6(x-2)(x+5)$.

10) $3x^2-15x+\frac{75}{4}$: $3x^2-15x+\frac{75}{4}=0 \Rightarrow 12x^2-60x+75=0 \Rightarrow 4x^2-20x+25=0$

$\Rightarrow a=4, b=-20$ et $c=25 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = (-20)^2-4\cdot 4\cdot 25 =$

$= 400-400 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2\cdot 4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ (solution double)

$\Rightarrow 3x^2-15x+\frac{75}{4} = 3\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}(2x-5)^2$.

11) $7x^2+14x-105$: $a=7, b=14, c=-105 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 14^2-4\cdot 7\cdot(-105) = 196+2940 =$

$= 3136 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 56 \Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14+56}{2\cdot 7} = \frac{42}{14} = 3$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14-56}{2\cdot 7} = \frac{-70}{14} = -5 \Rightarrow 7x^2+14x-105 =$

$= 7(x-3)(x+5)$.

12) $-5x^2+4x-1$: $a=-5, b=4$ et $c=-1 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 4^2-4\cdot(-5)\cdot(-1) = 16-20 =$

$= -4 < 0 \Rightarrow -5x^2+4x-1=0$ n'a pas de solution

$\Rightarrow -5x^2+4x-1$ n'est pas factorisable.

Exercice 5

a) $\frac{2}{x-2} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{3}{x+1}$: on doit avoir $x \neq 2, x \neq 1, x \neq -1$ (sinon on a une division par zéro) ;

$\frac{2}{x-2} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{3}{x+1} \Rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{3}{x+1} = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{x}{(1+x)(1-x)} - \frac{3}{1+x} = 0$

$\Rightarrow \frac{2(1+x)(1-x) - x(x-2) - 3(x-2)(1-x)}{(x-2)(1+x)(1-x)} = 0$

$\Rightarrow 2(1+x)(1-x) - x(x-2) - 3(x-2)(1-x) = 0$

$\Rightarrow 2(1-x^2) - x^2 + 2x - 3(x - x^2 - 2 + 2x) = 0$

$\Rightarrow 2 - 2x^2 - x^2 + 2x - 3x + 3x^2 + 6 - 6x = 0$

$\Rightarrow -7x + 8 = 0 \Rightarrow 7x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{7}$.

b) $\frac{2x}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} - \frac{1-x}{2-x}$: on doit avoir $x \neq 2$ et $x \neq -2$ (sinon on divise par zéro) ;

$\frac{2x}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} - \frac{1-x}{2-x} \Rightarrow \frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{1-x}{2-x} = 0$

$\Rightarrow \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1-x}{x-2} = 0$

$\Rightarrow \frac{2x - (x-2) - (1-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = 0$

$\Rightarrow 2x - (x-2) - (1-x)(x+2) = 0$

$\Rightarrow 2x - x + 2 - x - 2 + x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$;

or, $x = -2$ est exclu (voir ci-dessus)

$\Rightarrow$ la solution est $x = 0$.

c) $\frac{x+1}{2(x+2)} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+3x+2}$: comme $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$, on doit avoir $x \neq -1$ et $x \neq -2$ (sinon on divise par zéro) ;

$\frac{x+1}{2(x+2)} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+3x+2} \Rightarrow \frac{x+1}{2(x+2)} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+3x+2} = 0$

$\Rightarrow \frac{x+1}{2(x+2)} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} = 0$

$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+1) + 2(x+2) - 2}{2(x+1)(x+2)} = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x+1) + 2(x+2) - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 2x + 4 - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2+4x+3=0$: on a $a=1, b=4$ et $c=3 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=$
$=4^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2 \Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+2}{2\cdot1}=\frac{-2}{2}=-1$
et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-2}{2\cdot1}=\frac{-6}{2}=-3$;
or, $x=-1$ est exclu (voir ci-dessus)
$\Rightarrow$ la solution est $x=-3$.

d) $m^2x-m^2-m=x \Rightarrow m^2x-x=m^2+m \Rightarrow (m^2-1)x=m(m+1)$
$\Rightarrow (m+1)(m-1)x=m(m+1)$;
si $m=-1$, on obtient $0=0$ et tous les nombres réels sont solutions;
si $m=1$, on obtient $0=m(m+1) \Rightarrow 0=1\cdot2$, ce qui est impossible, d'où il n'y a aucune solution;
si $m\neq-1$ et $m=1$, on obtient $(m-1)x=m \Rightarrow x=\frac{m}{m-1}$.

e) $ax+2(x+1)=b-a \Rightarrow ax+2x+2=b-a \Rightarrow ax+2x=b-a-2$
$\Rightarrow (a+2)x=b-a-2$; si $a=-2$, on obtient $0=b-a-2 \Rightarrow$
$b=a+2=-2+2=0$;
si $a=-2$ et $b=0$, on obtient $0=0$ et tous les nombres réels sont solutions;
si $a=-2$ et $b\neq0$, on obtient $0=b-a-2$ avec $b-a-2\neq0$ et l'équation n'a pas de solution;
si $a\neq-2$, on obtient $x=\frac{b-a-2}{a+2}$

f) $x(m^2+x+1)=(x+1)^2+m(m-2) \Rightarrow m^2x+x^2+x=x^2+2x+1+m^2-2m$
$\Rightarrow m^2x+x=2x+1+m^2-2m \Rightarrow m^2x-x=m^2-2m+1$
$\Rightarrow (m^2-1)x=(m-1)^2 \Rightarrow (m+1)(m-1)x=(m-1)^2$;
si $m=1$, on obtient $0=0$ et tous les nombres réels sont solutions;
si $m=-1$, on obtient $0=(m-1)^2$ avec $(m-1)^2\neq0$ et l'équation n'a aucune solution;
si $m\neq1$ et $m\neq-1$, on obtient $(m+1)x=m-1 \Rightarrow x=\frac{m-1}{m+1}$.

g) $\frac{mx-1}{3}+\frac{3-x}{2}=\frac{2m^2-1}{3} \Rightarrow \frac{2mx-2}{6}+\frac{9-3x}{6}=\frac{4m^2-2}{6} \Rightarrow 2mx-2+9-3x=4m^2-2$
$\Rightarrow 2mx-3x=4m^2-9 \Rightarrow (2m-3)x=(2m+3)(2m-3)$;
si $m=\frac{3}{2}$, on obtient $0=0$ et tous les nombres réels sont solutions;
si $m\neq\frac{3}{2}$, on obtient $x=2m+3$.

Exercice 6

1) $\dfrac{2}{2x+5}+\dfrac{3}{2x-5}=\dfrac{10x+5}{4x^2-25}$: Comme $4x^2-25=(2x+5)(2x-5)$, on doit avoir $2x+5\neq 0$ et $2x-5\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq -\dfrac{5}{2}$ et $x\neq \dfrac{5}{2}$;

$$\frac{2}{2x+5}+\frac{3}{2x-5}=\frac{10x+5}{4x^2-25} \Rightarrow \frac{2}{2x+5}+\frac{3}{2x-5}-\frac{10x+5}{4x^2-25}=0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2x+5}+\frac{3}{2x-5}-\frac{10x+5}{(2x+5)(2x-5)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{2(2x-5)+3(2x+5)-(10x+5)}{(2x+5)(2x-5)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{4x-10+6x+15-10x-5}{(2x+5)(2x-5)}=0$$

$$\Rightarrow 4x-10+6x+15-10x-5=0 \Rightarrow 0=0$$

$\Rightarrow$ tous les nombres réels, sauf $\dfrac{5}{2}$ et $-\dfrac{5}{2}$, sont solutions.

2) $\dfrac{-3}{x+4}+\dfrac{7}{x-4}=\dfrac{-5x+4}{x^2-16}$: Comme $x^2-16=(x+4)(x-4)$, on doit avoir $x+4\neq 0$ et $x-4\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq -4$ et $x\neq 4$;

$$\frac{-3}{x+4}+\frac{7}{x-4}=\frac{-5x+4}{x^2-16} \Rightarrow \frac{-3}{x+4}+\frac{7}{x-4}-\frac{-5x+4}{x^2-16}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{x+4}+\frac{7}{x-4}-\frac{-5x+4}{(x+4)(x-4)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-3(x-4)+7(x+4)-(-5x+4)}{(x+4)(x-4)}=0$$

$$\Rightarrow -3(x-4)+7(x+4)-(-5x+4)=0$$

$$\Rightarrow -3x+12+7x+28+5x-4=0$$

$$\Rightarrow 9x+36=0 \Rightarrow 9x=-36 \Rightarrow x=-4;$$

Or, $x=-4$ est exclu (voir ci-dessus)

$\Rightarrow$ l'équation n'a pas de solution.

3) $\dfrac{7x}{x-6}=\dfrac{42}{x-6}$: on doit avoir $x-6\neq 0 \Rightarrow x\neq 6$;

$$\frac{7x}{x-6}=\frac{42}{x-6} \Rightarrow 7x=42 \Rightarrow x=6;$$

Or, $x=6$ est exclu $\Rightarrow$ l'équation n'a pas de solution.

Exercice 7

1) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{4x+1}{x-1}$: on doit avoir $x \neq 1$ et $x \neq -1$ (sinon on divise par 0);

$\frac{x-1}{x+1} = \frac{4x+1}{x-1} \Rightarrow (x-1)^2 = (4x+1)(x+1)$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x^2 + 4x + x + 1$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x^2 + 5x + 1$

$\Rightarrow 3x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(3x+7) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $3x+7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$.

2) $(a-b)^2 x^2 = a^2 - b^2$: si $a = b$, on a $(a-b)^2 = 0$ et $a^2 - b^2 = 0$ et l'équation s'écrit $0 = 0 \Rightarrow$ si $a = b$, tous les nombres sont solutions;

si $a \neq b$, $(a-b)^2 x^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$;

si $a < b$, $a^2 - b^2 < 0$ et $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} < 0$, ce qui est impossible puisque $x^2 \geq 0 \Rightarrow$ si $a < b$, l'équation n'a pas de solution;

si $a > b$, la solution est $x = \pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}}$.

3) $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$: on a $a = 1$, $b = -\sqrt{2}$ et $c = -4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4.1.(-4) =$
$= 2 + 16 = 18 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$ les solutions sont
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2.1} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2.1} =$
$= \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

4) $-x^2 + 9x - 19 = 0$: on a $a = -1$, $b = 9$ et $c = -19 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4.(-1).(-19) =$
$= 81 - 76 = 5 \Rightarrow$ les solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9+\sqrt{5}}{2.(-1)} =$
$= \frac{-9+\sqrt{5}}{-2} = \frac{9-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-\sqrt{5}}{2.(-1)} = \frac{-9-\sqrt{5}}{-2} = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$.

5) $\frac{x^2}{20} + \frac{x}{4} + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow$ soit $x+1 = 0$,
soit $x+4 = 0 \Rightarrow x = -1$ et $x = -4$.

6) $3x + x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 5 = 0$: on a $a = 1$, $b = 3$ et $c = 5 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac =$
$= 3^2 - 4.1.5 = 9 - 20 = -11 < 0 \Rightarrow$ l'équation n'a pas de solution.

7) $-x^2 - 0{,}3x + 0{,}4 = 0 \Rightarrow 10x^2 + 3x - 4 = 0$: on a $a = 10$, $b = 3$ et $c = -4$
$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.10.(-4) = 9 + 160 = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13 \Rightarrow$ les
solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+13}{2.10} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-13}{2.10} = -\frac{4}{5}$.

8) $(x-1)(x^2+2x+3) = x^2 - x$: essayons de factoriser $x^2 + 2x + 3$: $x^2 + 2x + 3 = 0$
$\Rightarrow a = 1$, $b = 2$ et $c = 3 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.1.3 = 4 - 12 = -8 < 0$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$ n'a pas de solution $\Rightarrow x^2 + 2x + 3$ n'est pas factorisable;

$(x-1)(x^2+2x+3)=x^2-x \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+3)=x(x-1)$;

Si $x-1=0$ $(x=1)$, on obtient $0=0 \Rightarrow x=1$ est solution ;

Si $x-1\neq 0$ $(x\neq 1)$, on obtient $x^2+2x+3=x \Rightarrow x^2+x+3=0$

$\Rightarrow a=1,\ b=1$ et $c=3 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot3=1-12=-11<0$

$\Rightarrow x^2+2x+3=x$ n'a pas de solution

$\Rightarrow$ l'unique solution de l'équation est $x=1$.

9) $14x^2-(2x-1)(5x+4)=33x+22 \Rightarrow 14x^2-(10x^2+8x-5x-4)=33x+22$

$\Rightarrow 14x^2-(10x^2+3x-4)=33x+22$

$\Rightarrow 14x^2-10x^2-3x+4=33x+22$

$\Rightarrow 4x^2-3x+4=33x+22 \Rightarrow 4x^2-36x-18=0$

$\Rightarrow 2x^2-18x-9=0 \Rightarrow a=2,\ b=-18$ et $c=-9$

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-18)^2-4\cdot2\cdot(-9)=324+72=396 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{396}=$

$=6\sqrt{11} \Rightarrow$ les solutions sont $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{18+6\sqrt{11}}{2\cdot2}=\dfrac{9+3\sqrt{11}}{2}$ et

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{18-6\sqrt{11}}{2\cdot2}=\dfrac{9-3\sqrt{11}}{2}$.

10) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{(x-2)^2}{5}=0 \Rightarrow 5x^2-3(x-2)^2=0 \Rightarrow 5x^2-3(x^2-4x+4)=0$

$\Rightarrow 5x^2-3x^2+12x-12=0 \Rightarrow 2x^2+12x-12=0 \Rightarrow x^2+6x-6=0$

$\Rightarrow a=1,\ b=6$ et $c=-6 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=6^2-4\cdot1\cdot(-6)=36+24=60$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{60}=2\sqrt{15} \Rightarrow$ les solutions sont $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+2\sqrt{15}}{2\cdot1}=$

$=-3+\sqrt{15}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-2\sqrt{15}}{2\cdot1}=-3-\sqrt{15}$.

11) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{2x^2-4x+1}{15}=\dfrac{3x^2-4}{20} \Rightarrow 5x^2+4(2x^2-4x+1)=3(3x^2-4)$

$\Rightarrow 5x^2+8x^2-16x+4=9x^2-12 \Rightarrow 13x^2-16x+4=9x^2-12$

$\Rightarrow 4x^2-16x+16 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0$

$\Rightarrow x=2$.

12) $\dfrac{4}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{x+2}{x} \Rightarrow \dfrac{4}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{x+2}{x}=0 \Rightarrow \dfrac{4}{x(x+2)}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{x+2}{x}=0$

$\Rightarrow \dfrac{4+3x-(x+2)^2}{x(x+2)}=0$ avec $x\neq 0$ et $x\neq -2$

$\Rightarrow 4+3x-(x+2)^2=0 \Rightarrow 4+3x-x^2-4x-4=0 \Rightarrow -x^2-x=0$

$\Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $x=-1$;

Comme $x=0$ est exclu, la solution est $x=-1$.

13) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}=0$: on doit avoir $x\neq\pm1$ et $x\neq\pm2$;

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=0$

$$\Rightarrow \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{2x}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x\left(\frac{1}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{(x+2)(x-2)}\right) = 0 \Rightarrow \text{soit } x=0, \text{ soit}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{(x+2)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2)+(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-2)+(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x^2-4+x^2-1 \Rightarrow 2x^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

les solutions sont donc $x=0$, $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$ et $x=-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

14) $\frac{3x^2-13}{x-3} - \frac{3x^2+3}{x+1} = \frac{8x^2-12x+4}{x^2-2x-3}$: on a $(x-3)(x+1) = x^2-2x-3$;

$$\frac{3x^2-13}{x-3} - \frac{3x^2+3}{x+1} = \frac{8x^2-12x+4}{x^2-2x-3} \Rightarrow \frac{3x^2-13}{x-3} - \frac{3x^2+3}{x+1} - \frac{8x^2-12x+4}{(x-3)(x+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(3x^2-13)(x+1)-(3x^2+3)(x-3)-(8x^2-12x+4)}{(x-3)(x+1)} = 0 \text{ avec } x\neq 3 \text{ et } x\neq -1;$$

$$\Rightarrow (3x^2-13)(x+1)-(3x^2+3)(x-3)-(8x^2-12x+4) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^3+3x^2-13x-13-3x^3+9x^2-3x+9-8x^2+12x-4 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2-4x-8=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)=0$$

$\Rightarrow x=-1$ ou $x=2$; comme $x=-1$ est exclu, la solution est $x=2$.

15) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{6(x-2)}{x+2} = 5$: on a $x\neq 2$ et $x\neq -2$;

$$\frac{x+2}{x-2} + \frac{6(x-2)}{x+2} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^2+6(x-2)^2-5(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+6(x-2)^2-5(x+2)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4+6(x^2-4x+4)-5(x^2-4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4+6x^2-24x+24-5x^2+20 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2-20x+48=0 \Rightarrow x^2-10x+24=0 \Rightarrow (x-4)(x-6)=0$$

$\Rightarrow$ soit $x=4$, soit $x=6$.

Exercice 8

1) $x^2+6ax+8a^2=0$: c'est une équation du 2e degré de la forme $Ax^2+Bx+C=0$, avec $A=1$, $B=6a$ et $C=8a^2$; on a $\Delta=B^2-4AC=(6a)^2-4\cdot1\cdot8a^2=36a^2-32a^2=4a^2$ $\Rightarrow \sqrt{\Delta}=2a$; les solutions sont $x_1=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-6a+2a}{2\cdot1}=\frac{-4a}{2}=-2a$ et $x_2=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6a-2a}{2\cdot1}=\frac{-8a}{2}=-4a$.

2) $4a^2x^2-12abx+9b^2=0$: si $a=0$, l'équation s'écrit $9b^2=0$, d'où $b=0$;
si $a\neq0$, l'équation est une équation du 2e degré de la forme $Ax^2+Bx+C=0$, avec $A=4a^2$, $B=-12ab$ et $C=9b^2$; on a $\Delta=B^2-4AC=$
$=(-12ab)^2-4\cdot4a^2\cdot9b^2=144a^2b^2-144a^2b^2=0$; ainsi, si $a\neq0$, la solution unique est $x=-\frac{B}{2A}=-\frac{-12ab}{4a^2}=\frac{12ab}{4a^2}=\frac{3b}{4a}$.

3) $x^2-\frac{a+b}{2}x+\frac{ab}{4}=0$: c'est une équation du 2e degré de la forme $Ax^2+Bx+C=0$, avec $A=1$, $B=-\frac{a+b}{2}$ et $C=\frac{ab}{4}$; on a $\Delta=B^2-4AC=\left(-\frac{a+b}{2}\right)^2-4\cdot1\cdot\frac{ab}{4}=$
$=\frac{(a+b)^2}{4}-ab=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}$
$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\frac{a-b}{2}$; les solutions sont $x_1=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)=$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{2}=\frac{a}{2}$ et $x_2=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b}{2}=\frac{b}{2}$.

Exercice 9

Lorsqu'on les racines x_1 et x_2 d'une équation du 2^e degré, alors cette équation peut s'écrire $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, où a est le coefficient dominant.

1) $x_1=-1$ et $x_2=4 \Rightarrow a(x+1)(x-4)=0 \quad (a\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

2) $x_1=5$, $x_2=-\frac{1}{5}$ et $a=5 \Rightarrow 5(x-5)(x+\frac{1}{5})=0 \Rightarrow (x-5)(5x+5)=0$.

3) $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$ et $a=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=0$.

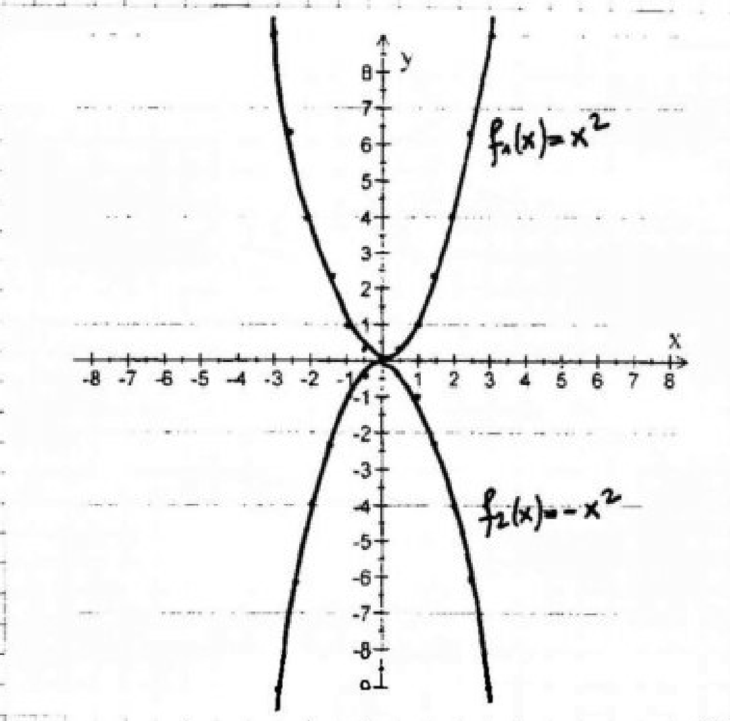
4) $x_1=a+b$, $x_2=a-b$ et $a=-1 \Rightarrow -(x-a-b)(x-a+b)=0$.

Exercice 10

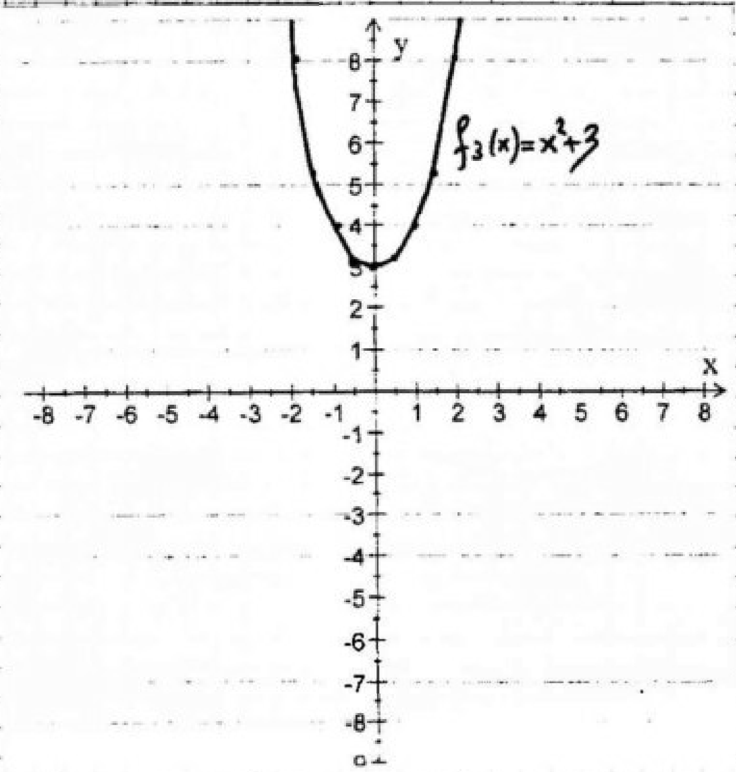
Le sommet d'une courbe du 2e degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ a comme coordonnées $(x_s;f(x_s))$, où $x_s=-\frac{b}{2a}$.
Le sommet d'une courbe du 2e degré de la forme $f(x)=a(x-m)^2+p$ a comme coordonnées $(m;p)$.

1) $f_1(x)=x^2$ est de la forme $a(x-m)^2+p$ avec $a=1, m=0$ et $p=0$ $\Rightarrow$ son sommet est $(0;0)$.
Intersections avec l'axe x : on pose $y=f_1(x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ point $(0;0)$.
Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow f_1(x)=0^2=0 \Rightarrow$ point $(0;0)$.

2) $f_2(x)=-x^2$ est de la forme $a(x-m)^2+p$ avec $a=-1, m=0$ et $p=0$ $\Rightarrow$ son sommet est $(0;0)$.
Intersections avec l'axe x : on pose $y=f_2(x)=0 \Rightarrow -x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ point $(0;0)$.
Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow f_2(x)=-0^2=0 \Rightarrow$ point $(0;0)$.
Graphes de f_1 et f_2 :



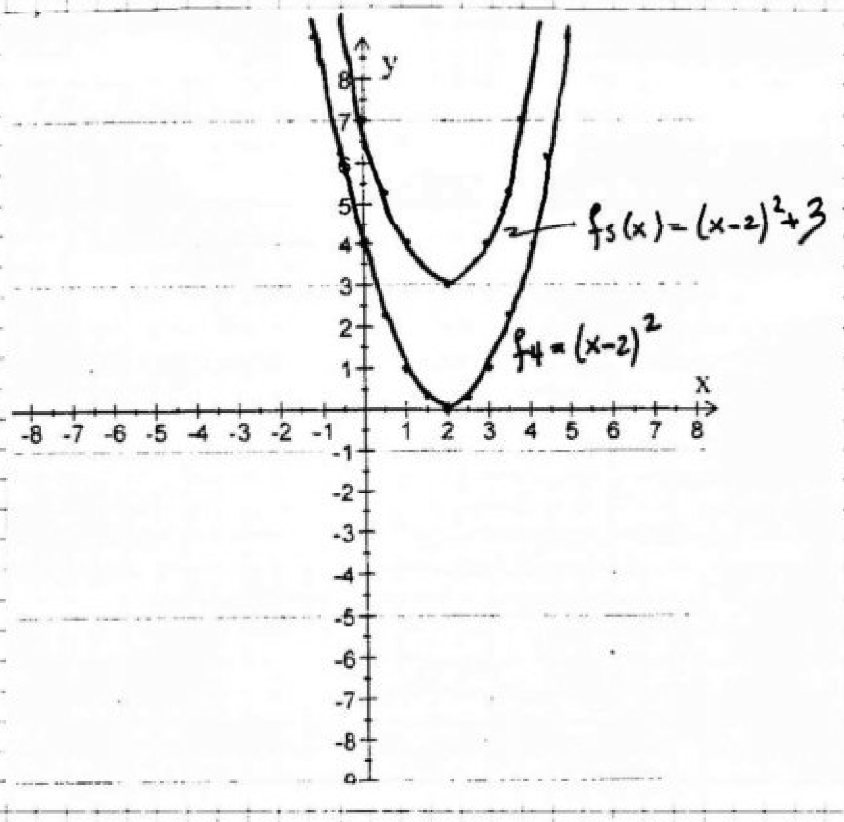
3) $f_3(x)=x^2+3$ est de la forme $a(x-m)^2+p$ avec $a=1, m=0$ et $p=3$ $\Rightarrow$ son sommet est $(0;3)$.
Intersections avec l'axe x : on pose $y=f_3(x)=0 \Rightarrow x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3$, ce qui est impossible
$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec l'axe x.
Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow f_3(x)=0^2+3=0 \Rightarrow$ point $(0;3)$.
Graphe :



4) $f_4(x) = (x-2)^2$ est de la forme $a(x-m)^2+p$ avec $a=1$, $m=2$ et $p=0$ $\Rightarrow$ son sommet est $(2;0)$.
Intersection avec l'axe x : on pose $y = f_4(x) = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow$ point $(2;0)$.
Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow f_4(x) = (0-2)^2 = 4 \Rightarrow$ point $(0;4)$.

5) $f_5(x) = (x-2)^2+3$ est de la forme $a(x-2)^2+3$ avec $a=1$, $m=2$ et $p=3$ $\Rightarrow$ son sommet est $(2;3)$.
Intersections avec l'axe x : on pose $y = f_5(x) = 0 \Rightarrow (x-2)^2+3=0 \Rightarrow (x-2)^2 = -3$, ce qui est impossible
$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec l'axe x.
Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow f_5(x) = (0-2)^2+3 = 4+3 = 7 \Rightarrow$ point $(0;7)$.

Graphes de f_4 et f_5 :

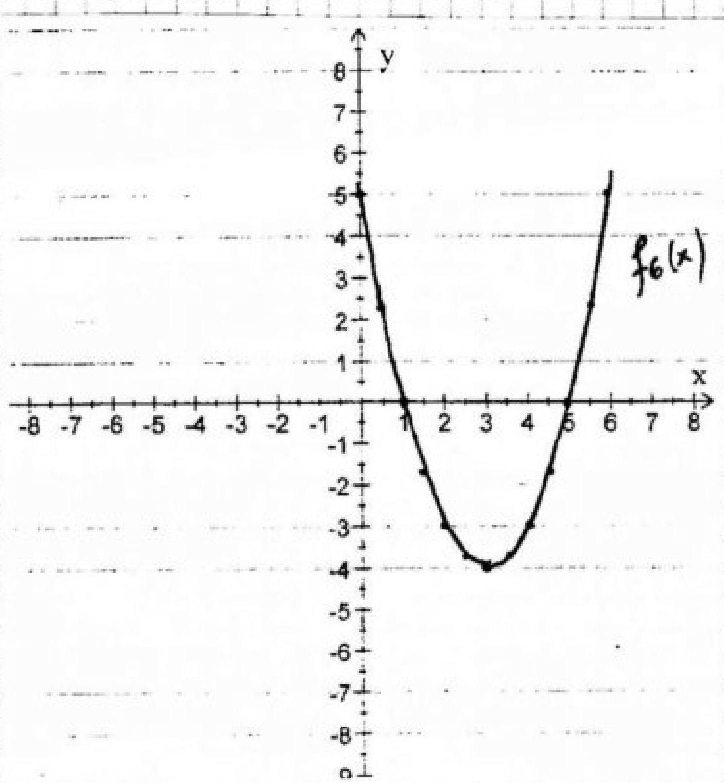


6) $f_6(x)=x^2-6x+5$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$, $b=-6$ et $c=5$ $\Rightarrow$ son sommet est $(x_S;f(x_S))$ avec $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\cdot 1}=\frac{6}{2}=3$ et $f(x_S)=f(3)=$
$=3^2-6\cdot 3+5=9-18+5=-4$ $\Rightarrow$ son sommet est $(3;-4)$.

Intersections avec l'axe x: on pose $f_6(x)=0$ $\Rightarrow$ $x^2-6x+5=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-6$ et $c=5$; on a $\Delta=b^2-4ac=$
$=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4$; les solutions sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+4}{2\cdot 1}=\frac{10}{2}=$
$=5$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-4}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1$ $\Rightarrow$ les points d'intersection avec l'axe x sont: $(1;0)$ et $(5;0)$.

Intersection avec l'axe y: on pose $x=0$ $\Rightarrow$ $f_6(x)=0^2-6\cdot 0+5=5$ $\Rightarrow$ point $(0;5)$.

Graphe:

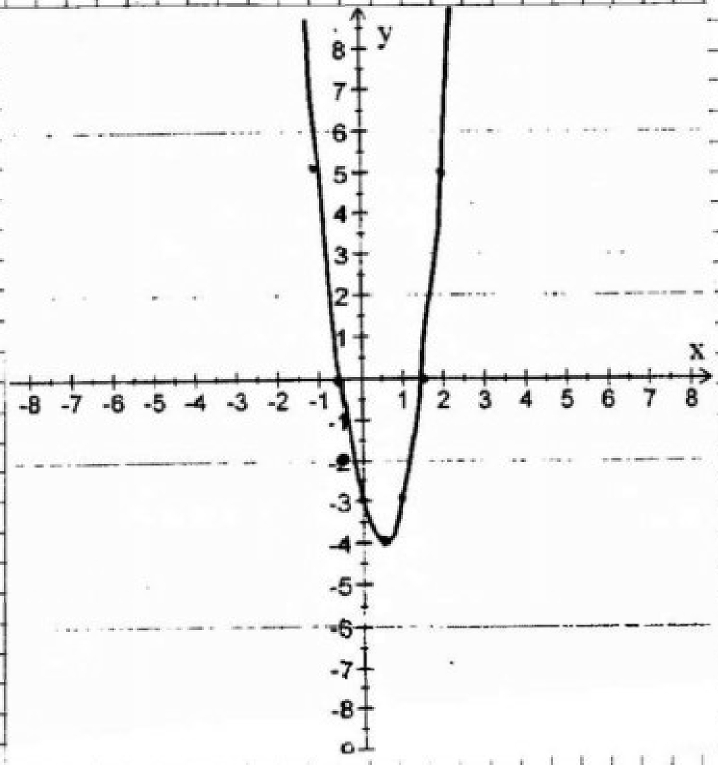


7) $f_7(x)=4x^2-4x-3$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=4$, $b=-4$ et $c=-3$ $\Rightarrow$ son sommet est $(x_S;f(x_S))$ avec $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot 4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ et $f(x_S)=f(+\frac{1}{2})=$
$=4\cdot(+\frac{1}{2})^2-4\cdot(+\frac{1}{2})-3=4\cdot(+\frac{1}{4})-2-3=+1-2-3=-4$ $\Rightarrow$ son sommet est $(\frac{1}{2};-4)$.

Intersections avec l'axe x: on pose $f_7(x)=0$ $\Rightarrow$ $4x^2-4x-3=0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=4$, $b=-4$ et $c=3$; on a $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 4\cdot(-3)=16+48=64 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=8$; les solutions sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+8}{2\cdot 4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-8}{2\cdot 4}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ les points d'intersection avec l'axe x sont $(\frac{3}{2};0)$ et $(-\frac{1}{2};0)$.

Intersection avec l'axe y: on pose $x=0$ $\Rightarrow$ $f_7(x)=4\cdot 0^2-4\cdot 0-3=-3$ $\Rightarrow$ point $(0;-3)$.

Graphe:


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8

Exercice 11

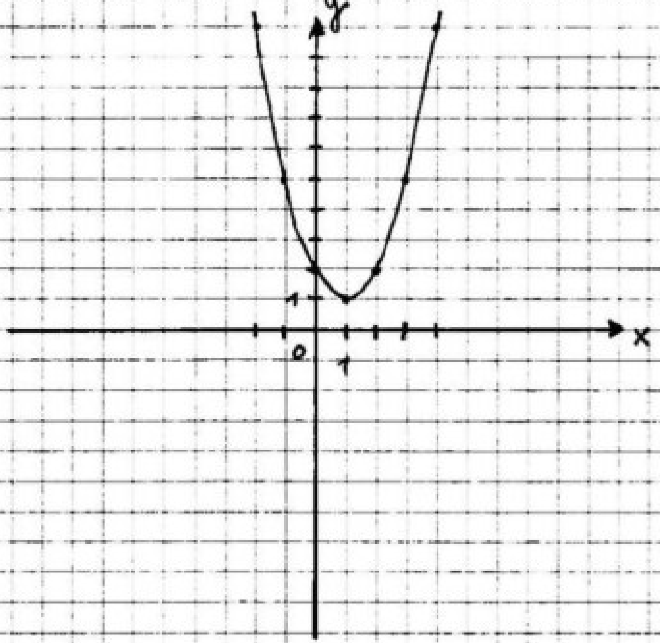
Le sommet d'une courbe du 2^e degré de la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ a comme coordonnées $(x_S ; f(x_S))$, où $x_S = -\frac{b}{2a}$.

1) $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$: intersections avec l'axe Ox : on pose $y = f_1(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-2$ et $c=2$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4-8 = -4 < 0 \Rightarrow$ il n'y a pas de solution $\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec l'axe Ox ;

intersection avec l'axe Oy : on pose $x = 0 \Rightarrow f_1(x) = 2 \Rightarrow$ point $(0;2)$;

coordonnées du sommet : on a $a=1$, $b=-2$ et $c=2 \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$ et $f(x_S) = 1^2 - 2\cdot 1 + 2 = 1-2+2 = 1 \Rightarrow$ sommet $= (1;1)$;

graphe :

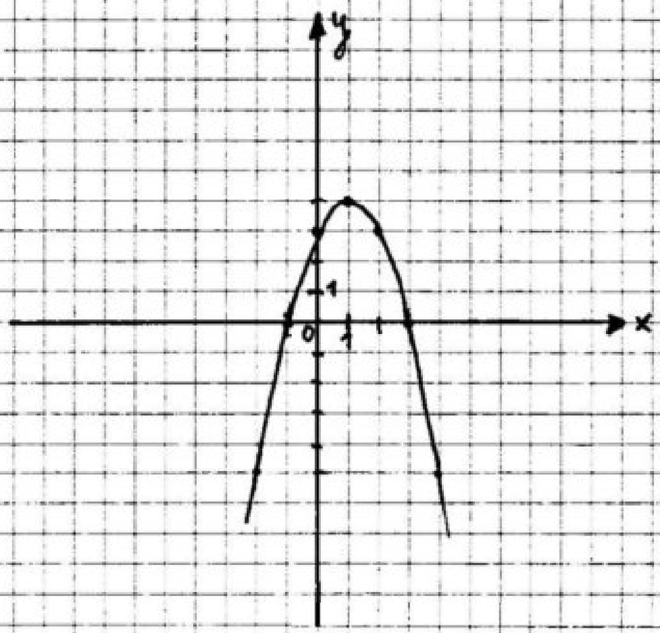


2) $f_2(x) = -x^2 + 2x + 3$: intersections avec l'axe Ox : on pose $y = f_2(x) = 0 \Rightarrow -x^2+2x+3$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=-1$, $b=2$ et $c=3$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3 = 4+12 = 16$ $\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4 \Rightarrow$ les solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2\cdot(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2\cdot(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 \Rightarrow$ points $(-1;0)$ et $(3;0)$;

intersection avec l'axe Oy : on pose $x=0 \Rightarrow f_2(x) = 3 \Rightarrow$ point $(0;3)$;

coordonnées du sommet : on a $a=-1$, $b=2$ et $c=3 \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = -\frac{2}{-2} = 1$ et $f(x_S) = -1^2 + 2\cdot 1 + 3 = -1+2+3 = 4 \Rightarrow$ sommet $= (1;4)$;

graphe :



3) $f_3(x) = x^2 - 3x - 5$: intersections avec l'axe Ox : on pose $y = f_3(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 5 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -3$ et $c = -5$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29 \Rightarrow$ les solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \cong 4,19$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{29}}{2} \cong -1,19$

$\Rightarrow$ points $(4,19 ; 0)$ et $(-1,19 ; 0)$;

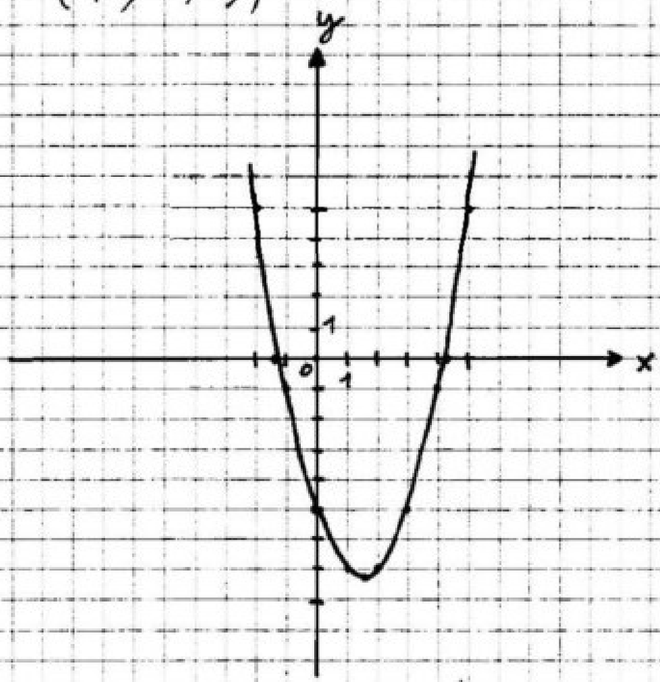
intersection avec l'axe Oy : on pose $x = 0 \Rightarrow f_3(x) = -5 \Rightarrow$ point $(0 ; -5)$;

Coordonnées du sommet : on a $a = 1$, $b = -3$ et $c = -5 \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$

et $f(x_S) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 5 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 5 = -\frac{9}{4} - 5 = -\frac{29}{4} = -7,25$

$\Rightarrow$ sommet $= (1,5 ; -7,25)$;

graphe :



4) $f_4(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$: <u>intersection avec l'axe Ox :</u> on pose $y = f_4(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1$

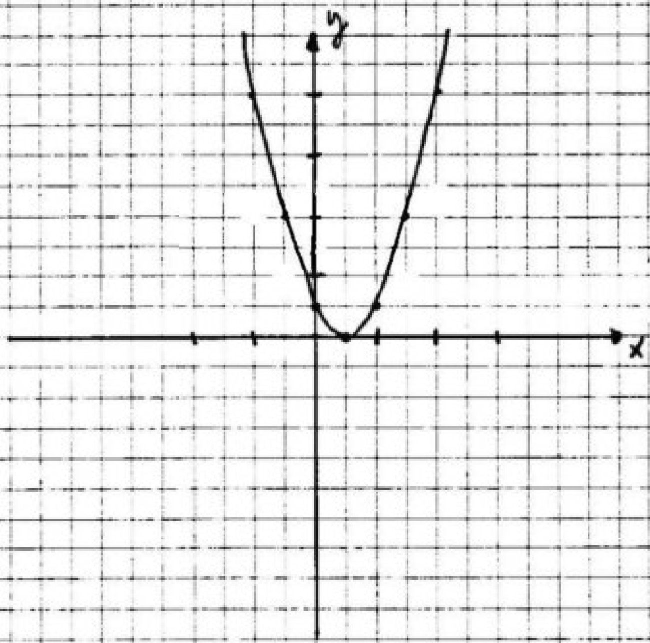
$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ point $(\frac{1}{2}; 0)$ (c'est le seul);

<u>intersection avec l'axe Oy :</u> on pose $x = 0 \Rightarrow f_4(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ point $(0; \frac{1}{2})$;

<u>coordonnées du sommet :</u> on a $a = 2$, $b = -2$ et $c = \frac{1}{2} \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2.2} =$

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_S) = 0$ (voir ci-dessus) $\Rightarrow$ sommet $= (\frac{1}{2}; 0)$;

<u>graphe :</u>



Exercice 12

Si le sommet d'une parabole est $(m;p)$, alors la fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-m)^2+p$. On détermine a en utilisant un point de la courbe différent du sommet.

a) Le sommet est $(0;-3)$ $\Rightarrow$ la fonction est $f(x) = a(x-0)^2-3 = ax^2-3$;
Le graphe passe par $(1;0)$ $\Rightarrow$ par substitution, on a $0 = a\cdot 1^2-3 \Rightarrow 0 = a-3 \Rightarrow a=3$;
La fonction est donc $f(x) = 3x^2-3$.

b) Le sommet est $(2;-4)$ $\Rightarrow$ la fonction est $f(x) = a(x-2)^2-4$;
Le graphe passe par $(6;0)$ $\Rightarrow$ par substitution, on a $0 = a(6-2)^2-4 \Rightarrow 0 = 16a-4$
$\Rightarrow 16a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$;
La fonction est donc $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2-4$.

c) Le sommet est $(-2;-3)$ $\Rightarrow$ la fonction est $f(x) = a(x+2)^2-3$;
Le graphe passe par $(1;0)$ $\Rightarrow$ par substitution, on a $0 = a(1+2)^2-3 \Rightarrow 0 = 9a-3$
$\Rightarrow 9a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$;
La fonction est donc $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^2-3$.

d) Le sommet est $(4;4)$ $\Rightarrow$ la fonction est $f(x) = a(x-4)^2+4$;
Le graphe passe par $(2;0)$ $\Rightarrow$ par substitution, on a $0 = a(2-4)^2+4 \Rightarrow 0 = 4a+4$
$\Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$.
La fonction est donc $f(x) = -(x-4)^2+4$.

Exercice 13

Pour passer de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ à la forme $f(x)=a(x-S_x)^2+S_y$, où $(S_x;S_y)$ sont les coordonnées du sommet de la parabole, on procède comme suit :

1) On transforme $f(x)=ax^2+bx+c$ en $f(x)=a(x^2+dx+e)$;

2) en utilisant l'identité remarquable $(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$, on écrit $\left(x+\frac{d}{2}\right)^2=x^2+dx+\frac{d^2}{4} \Rightarrow x^2+dx=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2-\frac{d^2}{4}$; ainsi $f(x)=ax^2+bx+c$ s'écrit $f(x)=a\left(\left(x+\frac{d}{2}\right)^2-\frac{d^2}{4}+e\right)=a\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+a\left(-\frac{d^2}{4}+e\right)$, qui est bien de la forme $f(x)=a(x-S_x)^2+S_y$.

a) $f(x)=x^2-5x+6$: on a $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=x^2-5x+\frac{25}{4} \Rightarrow x^2-5x=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

$\Rightarrow f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ les coordonnées du sommet sont $\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{4}\right)$.

b) $f(x)=x^2+7x+12$: on a $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=x^2+7x+\frac{49}{4} \Rightarrow x^2+7x=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$

$\Rightarrow f(x)=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+12=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ les coordonnées du sommet sont $\left(-\frac{7}{2};-\frac{1}{4}\right)$.

c) $f(x)=x^2-x-56$: on a $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-56=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{225}{4}$

$\Rightarrow$ les coordonnées du sommet sont $\left(\frac{1}{2};-\frac{225}{4}\right)$.

d) $f(x)=x^2+x-90$: on a $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4} \Rightarrow x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-90=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{361}{4}$

$\Rightarrow$ les coordonnées du sommet sont $\left(-\frac{1}{2};-\frac{361}{4}\right)$.

e) $f(x)=2x^2-6x+4=2(x^2-3x+2)$: on a $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=x^2-3x+\frac{9}{4}$

$\Rightarrow x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

$\Rightarrow f(x)=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ les coordonnées du sommet sont $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 14

Lorsqu'on connaît le sommet $(m;p)$, l'équation de la parabole peut s'écrire $f(x)=a(x-m)^2+p$. On calcule a en utilisant un point autre que le sommet, puis on développe $f(x)$ pour obtenir l'expression fonctionnelle standard $f(x)=ax^2+bx+c$.
Lorsqu'on connaît les 2 points d'intersection avec l'axe Ox ($(x_1;0)$ et $(x_2;0)$), l'équation de la parabole peut s'écrire $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. On calcule a en utilisant un autre point que $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$, puis on développe $f(x)$ pour obtenir l'expression fonctionnelle standard $f(x)=ax^2+bx+c$.

a) Sommet $(0;-2) \Rightarrow f(x)=a(x-0)^2-2=ax^2-2$.
Point $(3;25) \Rightarrow 25=a\cdot3^2-2 \Rightarrow 25=9a-2 \Rightarrow 27=9a \Rightarrow a=3$.
Ainsi $f(x)=3x^2-2$.

b) Sommet $(0;5) \Rightarrow f(x)=a(x-0)^2+5=ax^2+5$.
Point $(2;-3) \Rightarrow -3=a\cdot2^2+5 \Rightarrow -3=4a+5 \Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=-2$.
Ainsi $f(x)=-2x^2+5$.

c) Sommet $(4;-7) \Rightarrow f(x)=a(x-4)^2-7$.
Point $(-4;0) \Rightarrow 0=a(-4-4)^2-7 \Rightarrow 0=64a-7 \Rightarrow 64a=7 \Rightarrow a=\frac{7}{64}$.
Ainsi $f(x)=\frac{7}{64}(x-4)^2-7=\frac{7}{64}(x^2-8x+16)-7=\frac{7}{64}x^2-\frac{7}{8}x+\frac{7}{4}-7=$
$=\frac{7}{64}x^2-\frac{7}{8}x-\frac{21}{4}$.

d) Point $(-3;0)$ et $(5;0) \Rightarrow f(x)=a(x+3)(x-5)$.
Point : si le point le plus haut a 4 pour ordonnée (= 2e coordonnée), c'est le sommet ; comme une parabole a toujours un axe de symétrie vertical et que le sommet appartient à cette axe, la 1e coordonnée du sommet est $\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1$; on a ainsi le point $(1;4)$
$\Rightarrow 4=a(1+3)(1-5) \Rightarrow 4=-16a \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$
$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}(x+3)(x-5)=-\frac{1}{4}(x^2-2x-15)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}$.
En utilisant le sommet trouvé $(1;4)$, on aurait aussi pu écrire
$f(x)=a(x-1)^2+4$; avec $(5;0)$, on aura en $0=a(5-1)^2+4$
$\Rightarrow 0=16a+4 \Rightarrow 16a=-4 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$
$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}(x-1)^2+4=-\frac{1}{4}(x^2-2x+1)+4=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+4=$
$=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}$.

Exercice 15

1) $y = 3x^2$: son sommet est $(0;0)$ et, comme $3 > 0$, elle est tournée vers le haut $\rightarrow$ c).

2) $y = -\frac{1}{3}x^2$: son sommet est $(0;0)$ et, comme $-\frac{1}{3} < 0$, elle est tournée vers le bas $\rightarrow$ e).

3) $y = 3(x+2)^2$: son sommet est $(-2;0)$ et, comme $3 > 0$, elle est tournée vers le haut $\rightarrow$ h).

4) $y = 3(x+2)^2 - 1$: son sommet est $(-2;-1)$ et, comme $3 > 0$, elle est tournée vers le haut $\rightarrow$ b).

5) $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 1$: son sommet est $(-2;1)$ et, comme $\frac{1}{3} > 0$, elle est tournée vers le haut $\rightarrow$ a).

6) $y = -3(x-2)^2 - 1$: son sommet est $(2;-1)$ et, comme $-3 < 0$, elle est tournée vers le bas $\rightarrow$ i).

7) $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2$: son sommet est $(2;0)$ et, comme $-\frac{1}{3} < 0$, elle est tournée vers le bas $\rightarrow$ f).

8) $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$: son sommet est $(2;1)$ et, comme $-\frac{1}{3} < 0$, elle est tournée vers le bas $\rightarrow$ d).

9) $y = -3(x+2)^2 + 1$: son sommet est $(-2;1)$ et, comme $-3 < 0$, elle est tournée vers le bas $\rightarrow$ g).

Exercice 16

On a $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ et $g(x) = -x + 6$.

a) Intersection de f avec O_x : on pose $y = f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -4$ et $x = 2$

$\Rightarrow$ ce sont les points $(-4;0)$ et $(2;0)$.

Intersection de f avec Oy : on pose $x = 0 \Rightarrow f(x) = 8 \Rightarrow$ c'est le point $(0;8)$.

b) Intersection de g avec O_x : on pose $y = g(x) = 0 \Rightarrow -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow$ point $(6;0)$.

Intersection de g avec Oy : on pose $x = 0 \Rightarrow g(x) = 6 \Rightarrow$ point $(0;6)$.

c) Coordonnées du sommet de f : on a $a = -1$, $b = -2$ et $c = 8 \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot(-1)} =$

$= -1$ et $f(x_S) = -(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 8 = -1 + 2 + 8 = 9$

$\Rightarrow$ le sommet de f est $(-1;9)$.

d) Intersections de f et g : on doit avoir $y = -x^2 - 2x + 8$ et $y = -x + 6$

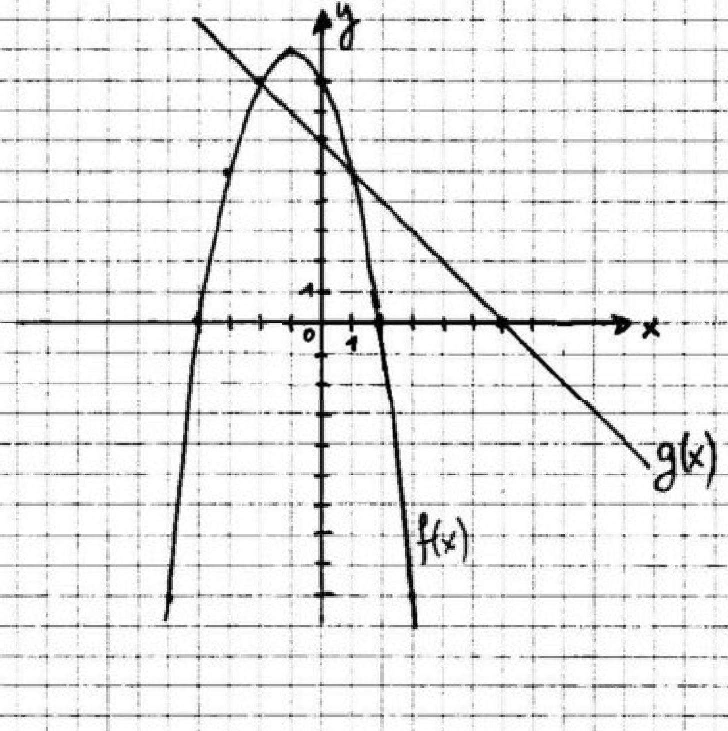
$\Rightarrow -x^2 - 2x + 8 = -x + 6 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -2$ et $x = 1$;

avec $x = -2$, on a $y = 2 + 6 = 8$; avec $x = 1$, on a $y = -1 + 6 = 5$

$\Rightarrow$ les intersections de f et g sont $(-2;8)$ et $(1;5)$.

e) Graphes de f et g :



Exercice 17

On a $f(x) = -2x^2+8x-6$ et $g(x) = -\frac{2x}{3}+2$

a) Intersection de f avec Ox : on pose $y = f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2+8x-6=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$
$\Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1$ et $x=3 \Rightarrow$ points $(1;0)$ et $(3;0)$.

Intersection de f avec Oy : on pose $x=0 \Rightarrow f(x) = -6 \Rightarrow$ point $(0;-6)$.

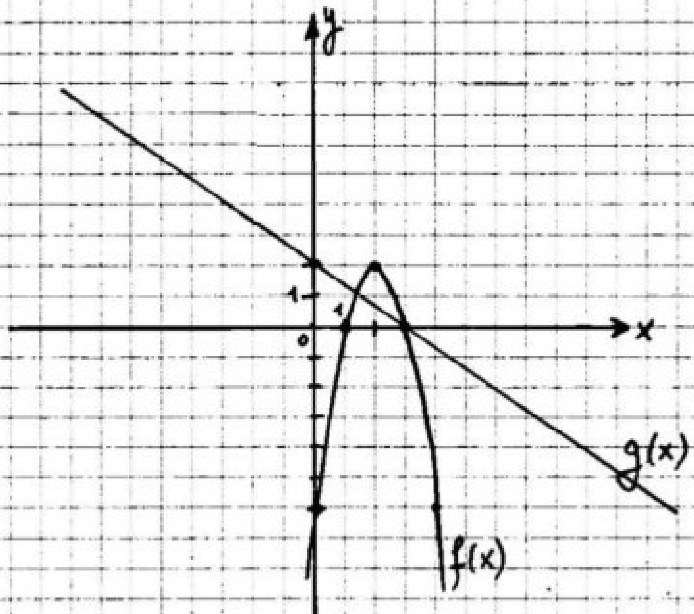
b) Intersection de g avec Ox : on pose $y = g(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{3}+2=0 \Rightarrow \frac{2x}{3}=2 \Rightarrow 2x=6$
$\Rightarrow x=3 \Rightarrow$ point $(3;0)$.

Intersection de g avec Oy : on pose $x=0 \Rightarrow g(x)=2 \Rightarrow$ point $(0;2)$.

c) Coordonnées du sommet de f : on a $a=-2$, $b=8$ et $c=-6 \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\cdot(-2)} =$
$= \frac{8}{4} = 2$ et $f(x_S) = -2\cdot 2^2+8\cdot 2-6 = -8+16-6 = 2$
$\Rightarrow$ le sommet de f est $(2;2)$.

d) Intersections de f et g : on doit avoir $y=-2x^2+8x-6$ et $y=-\frac{2x}{3}+2$
$\Rightarrow -2x^2+8x-6 = -\frac{2x}{3}+2 \Rightarrow -x^2+4x-3 = -\frac{x}{3}+1$
$\Rightarrow -3x^2+12x-9 = -x+3 \Rightarrow 3x^2-13x+12=0$;
on a $a=3$, $b=-13$ et $c=12 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = (-13)^2-4\cdot3\cdot12 =$
$= 169-144 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5$; les solutions sont
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+5}{2\cdot3} = \frac{18}{6} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-5}{2\cdot3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$;
avec $x=3$, on a $y = -\frac{2\cdot3}{3}+2 = -2+2 = 0$;
avec $x=\frac{4}{3}$, on a $y = -\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}+2 = -\frac{8}{9}+2 = \frac{10}{9}$
$\Rightarrow$ les intersections de f et g sont $(3;0)$ et $(\frac{4}{3};\frac{10}{9})$.

e) Graphes de f et g :



f) Toutes les droites parallèles à $g(x) = -\frac{2x}{3}+2$ sont de la forme $h(x) = -\frac{2x}{3}+k$, $k \in \mathbb{R}$
(elles ont toutes la même pente).

Une droite tangente à une parabole a une unique intersection avec elle.
Les intersections de f et h sont les solutions de $y = -2x^2 + 8x - 6$ et $y = -\frac{2x}{3} + k$.
Il faut déterminer k pour que le système n'ait qu'une solution.
On doit avoir $-2x^2 + 8x - 6 = -\frac{2x}{3} + k \Rightarrow -6x^2 + 24x - 18 = -2x + k$
$\Rightarrow 6x^2 - 26x + k + 18 = 0$
Il faut donc trouver k pour que $6x^2 - 26x + k + 18 = 0$ n'ait qu'une solution.
$6x^2 - 26x + k + 18 = 0$ est une équation du 2e degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec
$a = 6$, $b = -26$ et $c = k + 18$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-26)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (k + 18) =$
$= 676 - 24k - 432 = 244 - 24k$.
On sait que, si $\Delta = 0$, $6x^2 - 26x + k + 18 = 0$ a une unique solution.
On doit donc avoir $244 - 24k = 0 \Rightarrow 24k = 244 \Rightarrow k = \frac{244}{24} = \frac{61}{6}$.
L'équation de la droite parallèle à g et tangente à f est donc $y = -\frac{2x}{3} + \frac{61}{6}$.

Exercice 18

On a la parabole $f(x) = x^2 + 4x + 3$ et la droite $g(x) = 4x + b$

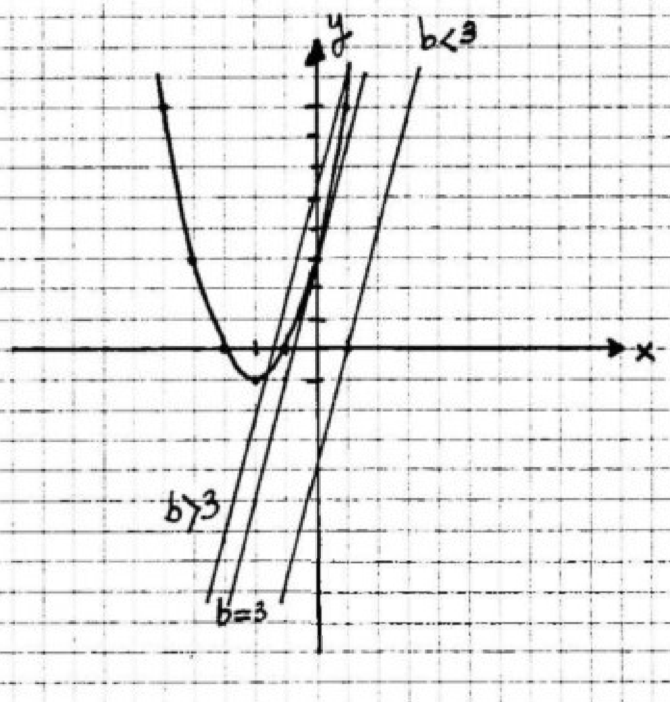
a) f et g se coupent en un seul point si le système $y = x^2 + 4x + 3$ et $y = 4x + b$ a une seule solution : on doit avoir $x^2 + 4x + 3 = 4x + b \Rightarrow x^2 + 3 = b \Rightarrow x^2 = b - 3$ $\Rightarrow x = \pm\sqrt{b-3}$; pour que le système ait une unique solution, on doit avoir que les 2 solutions ($\sqrt{b-3}$ et $-\sqrt{b-3}$) soient confondues, autrement dit qu'elles soit nulles toutes les 2 ; ainsi, on a $\sqrt{b-3} = 0 \Rightarrow b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$

$\Rightarrow$ avec $b = 3$, f et g se coupent en un seul point.

b) f et g se coupent en exactement 2 points $\Rightarrow$ $x_1 = \sqrt{b-3}$ et $x_2 = -\sqrt{b-3}$ (voir a)) sont définis et distincts. On doit alors avoir $b - 3 > 0 \Rightarrow b > 3$.

c) f et g ne se coupent jamais $\Rightarrow$ $x_1 = \sqrt{b-3}$ et $x_2 = -\sqrt{b-3}$ n'existent pas $\Rightarrow b - 3 < 0 \Rightarrow b < 3$.

d)



Exercice 19

Pour calculer la distance maximale entre une parabole et une droite, on définit la fonction qui est la différence des 2 de telle manière qu'elle soit positive sur la région concerné (en fait, elle vaut la fonction de plus haute ordonnée moins l'autre). On cherche alors les coordonnées du sommet de cette nouvelle fonction, la 2^e coordonnée nous donnant la distance maximale cherchée.

a) On a $f(x)=-2x^2+4x+3$ et $g(x)=x-2$.
Dans la région grise, on a $f(x)\geqslant g(x)$.
Soit $h(x)=f(x)-g(x)=-2x^2+4x+3-(x-2)=-2x^2+3x+5$.
Le sommet de h est donné par $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2\cdot(-2)}=\frac{3}{4}$ et $h(x_S)=-2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\frac{3}{4}+5=$
$=-2\cdot\frac{9}{16}+\frac{9}{4}+5=-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+5=\frac{49}{8}=6{,}125$.
Ainsi la distance verticale d maximale est $d=6{,}125$.

b) On a $f(x)=2x^2+8x+4$ et $g(x)=-x+3$.
Dans la région grise, on a $f(x)\leqslant g(x)$.
Soit $h(x)=g(x)-f(x)=-x+3-(2x^2+8x+4)=-2x^2-9x-1$.
Le sommet de h est donné par $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-9}{2\cdot(-2)}=-\frac{9}{4}$ et $h(x_S)=$
$=-2\left(-\frac{9}{4}\right)^2-9\left(-\frac{9}{4}\right)-1=-2\cdot\frac{81}{16}+\frac{81}{4}-1=-\frac{81}{8}+\frac{81}{4}-1=\frac{73}{8}=9{,}125$.
Ainsi la distance verticale d maximale est $d=9{,}125$.

Exercice 20

On a $f(x)=ax^2+(a+2)x+(a+3)$ et $g(x)=(2a)x+1$.

Si les 2 fonctions se coupent en un seul point, cela signifie que le système $y=ax^2+(a+2)x+a+3$ et $y=2ax+1$ a une unique solution.

On a ainsi $ax^2+(a+2)x+a+3=2ax+1 \Rightarrow ax^2+(a+2-2a)x+a+3-1=0$

$\Rightarrow ax^2+(-a+2)x+a+2=0$.

Ainsi $ax^2+(-a+2)x+a+2=0$ ne doit avoir qu'une solution. Il faut donc que son discriminant Δ soit nul.

On a $\Delta=(-a+2)^2-4\cdot a\cdot(a+2)=a^2-4a+4-4a^2-8a=-3a^2-12a+4$.

Ainsi $\Delta=0 \Rightarrow -3a^2-12a+4=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $Aa^2+Ba+C=0$ avec $A=-3$, $B=-12$ et $C=4$; on a ici $\Delta'=B^2-4AC=$

$=(-12)^2-4\cdot(-3)\cdot 4=144+48=192 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$

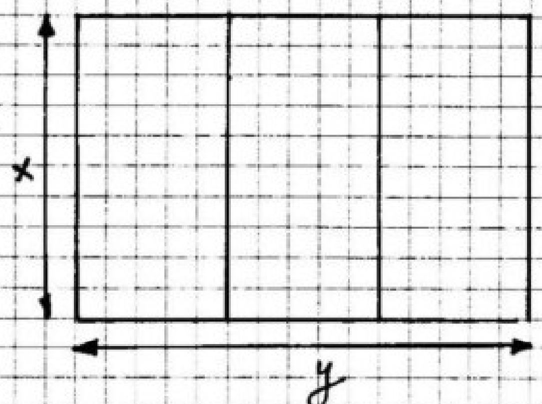
$\Rightarrow$ les solutions sont $a_1=\dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=\dfrac{12+8\sqrt{3}}{2\cdot(-3)}=-\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}\cong-4{,}31$ et $a_2=\dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}=$

$=\dfrac{12-8\sqrt{3}}{2\cdot(-3)}=-\dfrac{6-4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{-6+4\sqrt{3}}{3}\cong 0{,}31$.

Les valeurs possibles de a pour lesquelles f et g sont tangentes sont donc $a=-4{,}31$ et $a\cong 0{,}31$.

<u>Exercice 21</u>

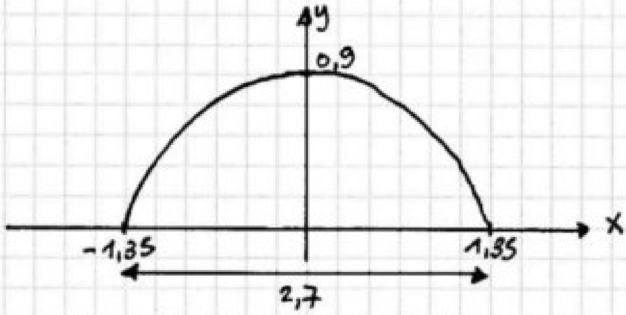
On a la situation suivante:



Soient x et y les dimensions du champ rectangulaire.
La longueur totale de la barrière est $4x+2y$.
La longueur totale de la barrière est de 1000 m.
On doit donc avoir $4x+2y=1000 \Rightarrow 2x+y=500 \Rightarrow y=500-2x$.
L'aire du champ rectangulaire entier est $x \cdot y$.
Avec $y=500-2x$, on obtient $x(500-2x)=500x-2x^2=-2x^2+500x$.
On doit trouver x (et y) tels que l'aire du champ soit maximale.
Autrement dit, on doit trouver x de telle manière que $-2x^2+500x$ soit maximum.
Cela revient à trouver le sommet de la parabole $-2x^2+500x$.
La 1e coordonnée du sommet est $x_s=-\frac{b}{2a}=-\frac{500}{2\cdot(-2)}=\frac{500}{4}=125$.
Ainsi si $x=125$, $-2x^2+500x$ est maximal, autrement dit l'aire du champ est maximale.
Avec $x=125$, on a $y=500-2x=500-2\cdot125=500-250=250$.
Par conséquent, les dimensions du champ pour que l'aire soit maximale sont 125 m sur 250 m (les barrières parallèles intermédiaires valent 125 m).

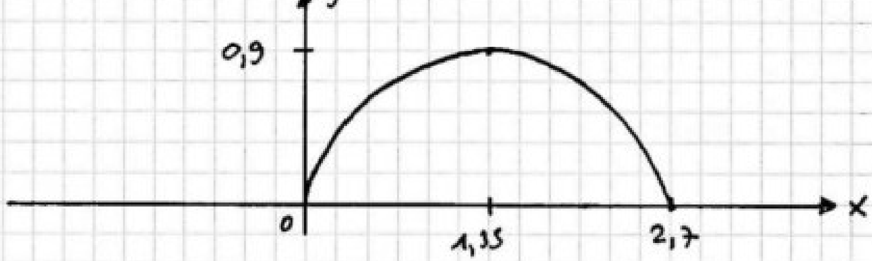
Exercice 22

On peut représenter la situation de la manière suivante :



L'expression de la parabole est de la forme $f(x)=a(x-m)^2+p$ où $(m;p)$ est le sommet.
Ici $m=0$ et $p=0,9$. On a donc $f(x)=ax^2+0,9$.
La parabole passe au point $(1,35;0)$: on a $0=a\cdot 1,35^2+0,9 \Rightarrow 1,8225a+0,9=0$
$\Rightarrow 1,8225a=-0,9 \Rightarrow a=-0,494$.
L'expression de la parabole est donc, ici, $f(x)=-0,494x^2+0,9$.

On peut aussi représenter la parabole de la manière suivante :

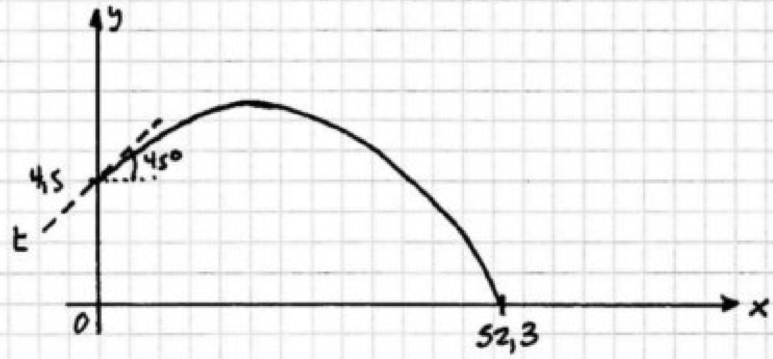


L'expression de la parabole est de la forme $f(x)=a(x-m)^2+p$ où $(m;p)$ est le sommet.
Ici $m=1,35$ et $p=0,9$. On a donc $f(x)=a(x-1,35)^2+0,9$.
La parabole passe au point $(0;0)$: on a $0=a(0-1,35)^2+0,9 \Rightarrow 1,8225a+0,9=0$
$\Rightarrow 1,8225a=-0,9 \Rightarrow a=-0,494$.
L'expression de la parabole est donc, ici, $f(x)=-0,494(x-1,35)^2+0.9$.

On remarque que l'expression fonctionnelle de la parabole dépend du positionnement des axes x et y.

Exercice 23

On a la situation suivante:



a)

L'équation de la trajectoire parabolique est $y = ax^2+bx+c$ et il faut trouver a, b et c.

Si $x=0$, on a $y=4,5 \Rightarrow 4,5 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \Rightarrow c = 4,5$.

Ainsi l'équation s'écrit $y = ax^2+bx+4,5$.

Si $x = 52,3$, on a $y=0 \Rightarrow 0 = a\cdot 52,3^2 + b\cdot 52,3 \Rightarrow 2735,29a + 52,3b = 0$

$\Rightarrow 52,3b = -2735,29a \Rightarrow b = -52,3a$.

Ainsi l'équation s'écrit $y = ax^2 - 52,3ax + 4,5$.

En $x=0$, le canon est orienté à 45°. Cela signifie que, en $x=0$, la tangente au graphe de la parabole est la droite t inclinée à 45° et passant par $(0; 4,5)$.

La pente de t est 1 $\left(\frac{\text{vertical}}{\text{horizontal}} = \frac{1}{1}\right) = 1$ et la hauteur à l'origine est 4,5.

L'équation de t est donc $y = x+4,5$.

Si t est tangente à la parabole en $x=0$, cela signifie que t et la parabole ont une seule intersection. Le système $y = ax^2-52,3ax+4,5$ et $y = x+4,5$ a donc une seule solution en $x=0$.

On doit avoir $ax^2 - 52,3ax + 4,5 = x + 4,5 \Rightarrow ax^2 - 52,3ax = x$

$\Rightarrow ax^2 - 52,3ax - x = 0 \Rightarrow x(ax - 52,3a - 1) = 0 \Rightarrow$ soit $x=0$, soit $ax - 52,3a - 1 = 0$.

On est dans le cas $x=0$. Comme le système doit avoir une unique solution, on doit aussi avoir $ax - 52,3a - 1 = 0$ en $x=0 \Rightarrow -52,3a - 1 = 0 \Rightarrow 52,3a = -1 \Rightarrow a = -0,019$.

Ainsi l'expression de la trajectoire est $y = ax^2 - 52,3ax + 4,5 = (-0,019)x^2 - 52,3\cdot(-0,019)x + 4,5 =$

$= -0,019x^2 + x + 4,5$.

b) La hauteur maximale atteinte correspond à la 2^e coordonnée du sommet.

On a $y = ax^2+bx+c$ avec $a = -0,019$, $b=1$ et $c = 4,5$; ainsi $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-0,019)} =$

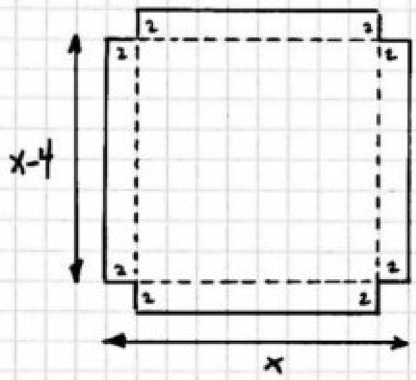
$= -\frac{1}{-0,038} = \frac{1}{0,038} = 26,15$.

En $x_s = 26,15$, on a $f(x_s) = -0,019\cdot 26,15^2 + 26,15 + 4,5 = 17,575$.

Ainsi la hauteur maximale atteinte est 17,575 m.

Exercice 24

Soit x le côté du carré. On a la situation suivante :



Le volume de la boîte obtenue est $(x-4)^2 \cdot 2$.

Il doit valoir $24\,dm^2$. On a donc l'équation $(x-4)^2 \cdot 2 = 24$

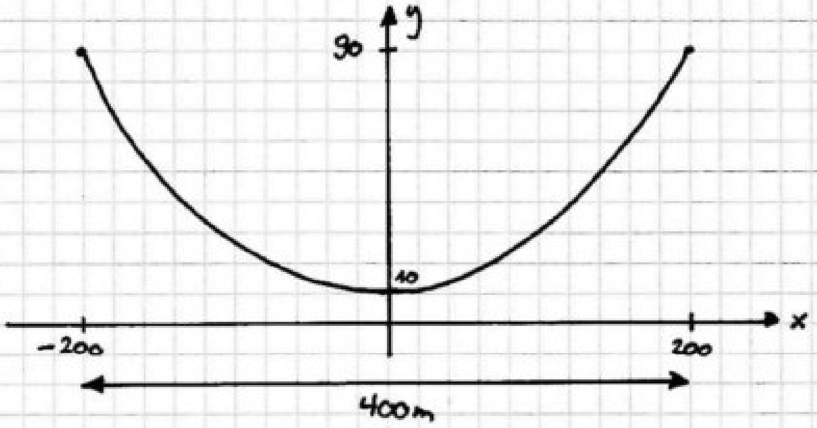
$\Rightarrow (x-4)^2 = 12 \Rightarrow x-4 = \pm\sqrt{12} \Rightarrow x-4 = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{3}$

Si $x = 4-2\sqrt{3}$, on aura $x-4 = -2\sqrt{3} < 0$, ce qui est exclu (on a forcément $x > 4$).

Ainsi la dimension de la feuille est un carré de $4+2\sqrt{3}$ dm de côté.

Exercice 25

On a la situation suivante:



a)

Le sommet de la parabole est $(0;10)$.

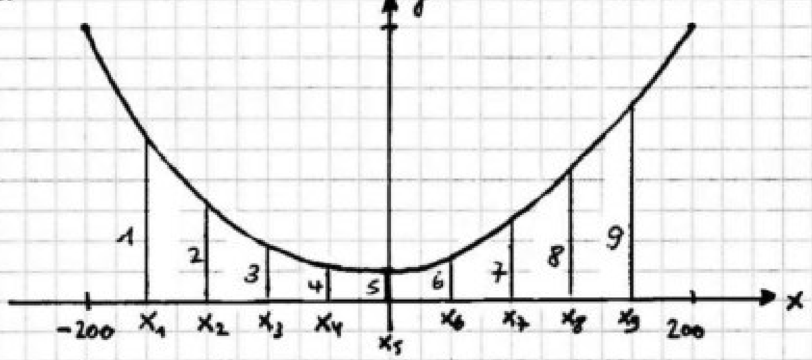
L'équation de la parabole s'écrit donc $f(x)=ax^2+10$.

Elle passe en $(200;90) \Rightarrow 90 = a\cdot 200^2+10 \Rightarrow 90 = 40'000a+10$

$\Rightarrow 40'000a = 80 \Rightarrow a = \frac{80}{40'000} = \frac{1}{500}$.

Ainsi l'équation de la parabole est $f(x) = \frac{1}{500}x^2+10$.

b) On a la situation suivante:



On a $x_5=0$, $x_1=-x_9$, $x_2=-x_8$, $x_3=-x_7$ et $x_4=-x_6$.

L'intervalle entre -200 et 200 est divisé en 10 intervalles.

Ils doivent donc chacun valoir 40m.

Ainsi $x_5=0$, $x_6=40$, $x_4=-40$, $x_7=80$, $x_3=-80$, $x_8=120$, $x_2=-120$, $x_9=160$ et $x_1=-160$.

La longueur totale des supports est donc $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_9)$.

Par symétrie, $f(x_1)=f(x_9)$, $f(x_2)=f(x_8)$, $f(x_3)=f(x_7)$ et $f(x_4)=f(x_6)$.

Ainsi la longueur totale des supports est $f(x_5)+2f(x_6)+2f(x_7)+2f(x_8)+2f(x_9)=$

$= 10+2\cdot\left(\frac{1}{500}\cdot 40^2+10\right)+2\cdot\left(\frac{1}{500}\cdot 80^2+10\right)+2\cdot\left(\frac{1}{500}\cdot 120^2+10\right)+2\left(\frac{1}{500}\cdot 160^2+10\right)=$

$= 10+\frac{1}{250}\cdot 1600+20+\frac{1}{250}\cdot 6400+20+\frac{1}{250}\,14'400+20+\frac{1}{250}\,25'600+20=$

$= 90+\frac{1}{250}(1600+6400+14'400+25'600) = 90+\frac{1}{250}\cdot 48'000 = 90+192 = 282\text{ m}.$