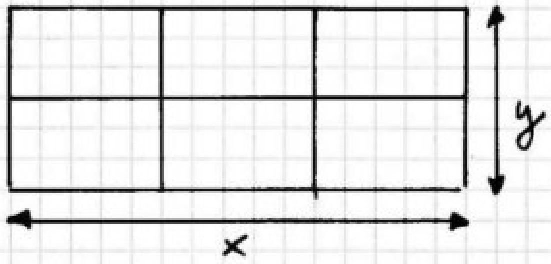
Exercice 26

On a la situation suivante:



a) La longueur totale du grillage nécessaire est $3x+4y$.
Comme il y a 1000m de grillage en tout, on a $3x+4y=1000 \Rightarrow 4y=-3x+1000$
$\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+250$.

b) L'aire totale est $A=x.y=x\cdot(-\frac{3}{4}x+250)=-\frac{3}{4}x^2+250x$.

c) L'aire totale A sera maximale lorsque $-\frac{3}{4}x^2+250x$ atteindra son maximum, autrement dit au sommet de la parabole: $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{250}{2(-3/4)}=-\frac{250}{-3/2}=$
$=\frac{250}{3/2}=250\cdot\frac{2}{3}=\frac{500}{3}=166,\overline{6}\,m$.
Avec $x_S=\frac{500}{3}$ m, on a $y=-\frac{3}{4}\cdot\frac{500}{3}+250=-125+250=125\,m$.
Ainsi, avec $x=166,\overline{6}\,m$ et $y=125\,m$, l'aire clôturée est maximale.

Exercice 27

a) L'aire du rectangle vaut $2x \cdot y = 2x(4-x^2) = -2x^3+8x$.

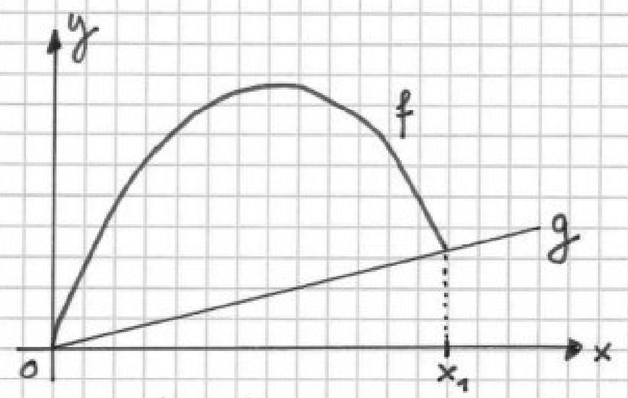
b) Si $x=1$, l'aire du rectangle vaut $2 \cdot 3 = 6$.
On doit trouver un autre x tel que l'aire du rectangle soit égale à 6.
D'après a), l'aire du rectangle est donné par $-2x^3+8x$.
On doit donc avoir $-2x^3+8x=6 \Rightarrow 2x^3-8x+6=0 \Rightarrow x^3-4x+3=0$
On sait que $x=1$ est solution de cette équation. On doit donc pouvoir écrire x^3-4x+3 comme $(x-1) \cdot p(x)$ où $p(x)$ est un polynôme de degré 2.
Pour trouver $p(x)$, on effectue la division euclidienne de x^3-4x+3 par $x-1$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-4x+3 & x-1 \\
\cline{2-2}
\underline{-(x^3-x^2)} & x^2+x-3 \\
x^2-4x+3 & \\
\underline{-(x^2-x)} & \\
-3x+3 & \\
\underline{-(-3x+3)} & \\
0 &
\end{array}
$$

Ainsi, on a $p(x)=x^2+x-3$ et on peut écrire $x^3-4x+3=(x-1)\cdot(x^2+x-3)$.
Les solutions de $x^3-4x+3=0$ sont les solutions de $(x-1)(x^2+x-3)=0$.
Ainsi soit $x-1=0 \Rightarrow x=1$ (solution déjà connue), soit $x^2+x-3=0$.
$x^2+x-3=0$ est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=1$ et $c=-3$; on a $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\cdot1\cdot(-3) = 1+12 = 13$;
les solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{13}}{2\cdot1} = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.
On doit avoir $x>0$. Comme $x_2<0$, cette solution est à exclure.
On obtient donc $x_1 = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.
Par conséquent, la base du second triangle d'aire 6 est $2x_1 = \sqrt{13}-1$.

Exercice 18

On a la situation suivante:



On a $f(x) = -0{,}016x^2 + 1{,}6x$ et $g(x) = \frac{1}{5}x$ (g a une pente de $\frac{1}{5}$ et passe par l'origine.

a) Pour trouver à quelle distance du départ la fusée atterrit, on doit trouver x_1 qui correspond à une des intersections de f et g.

On a le système $y = -0{,}016x^2 + 1{,}6x$ et $y = \frac{1}{5}x = 0{,}2x$.

Ainsi $-0{,}016x^2 + 1{,}6x = 0{,}2x \Rightarrow 0{,}016x^2 - 1{,}4x = 0 \Rightarrow x(0{,}016x - 1{,}4) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$ (départ), soit $0{,}016x - 1{,}4 = 0 \Rightarrow 0{,}016x = 1{,}4 \Rightarrow x = 87{,}5$ m.

Avec $x = 87{,}5$, on a $y = 0{,}2 \cdot 87{,}5 = 17{,}5$ m.

La distance effectuée sur la pente est ainsi $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{87{,}5^2 + 17{,}5^2} =$

$= \sqrt{7656{,}25 + 306{,}25} = \sqrt{7962{,}5} \cong 89{,}23$ m.

b) Le sol correspond à la droite g. La hauteur maximale par rapport au sol de la fusée sera la 2e coordonnée du sommet de la parabole $f(x) - g(x)$.

On a $f(x) - g(x) = -0{,}016x^2 + 1{,}6x - 0{,}2x = -0{,}016x^2 + 1{,}4x$.

La 1e coordonnée du sommet est $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}4}{2(-0{,}016)} = \frac{1{,}4}{0{,}032} = 43{,}75$.

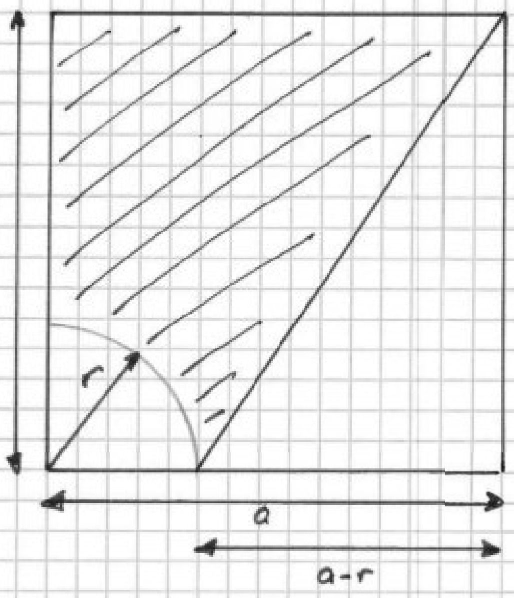
La 2e coordonnée du sommet est, avec $x = 43{,}75$, $f(x) - g(x) = -0{,}016 \cdot 43{,}75^2 + 1{,}4 \cdot 43{,}75 =$

$= 30{,}625$ m.

La hauteur maximale de la fusée au-dessus du sol est $30{,}625$ m.

Exercice 29

On a :



Aire du quart de cercle $= \frac{\pi r^2}{4}$.

Aire du triangle $= \frac{(a-r)a}{2}$

$\Rightarrow$ Aire hachurée $=$

$$= a^2 - \frac{\pi r^2}{4} - \frac{(a-r)a}{2} =$$

$$= a^2 - \frac{\pi r^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{ar}{2} =$$

$$= -\frac{\pi r^2}{4} + \frac{ar}{2} + \frac{a^2}{2} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} r^2 + \frac{a}{2} r + \frac{a^2}{2}.$$

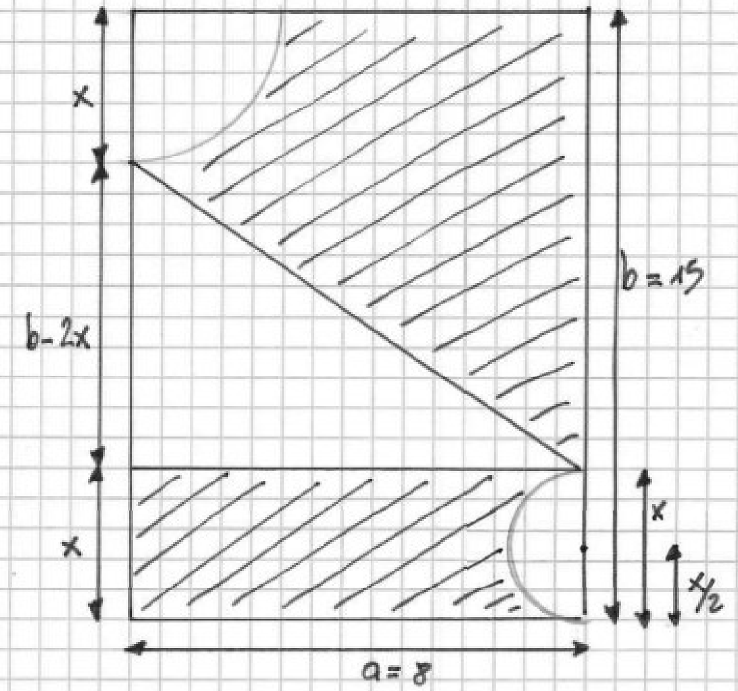
L'aire hachurée est donc une fonction du 2e degré en r.

La 1e coordonnée du sommet de cette fonction est donné par $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{a/2}{2(-\pi/4)} =$

$$= \frac{a/2}{\pi/2} = \frac{a}{\pi}.$$

L'aire hachurée est donc maximale si $r = \frac{a}{\pi}$.

Exercice 30



a) Aire du quart de cercle $= \frac{\pi x^2}{4}$.

Aire du demi-cercle $= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{\pi x^2}{8}$.

Aire du triangle $= \frac{(b-2x) \cdot a}{2} = \frac{(15-2x) \cdot 8}{2} = 4(15-2x) = 60 - 8x$.

$\Rightarrow$ Aire hachurée $= A(x) = 8 \cdot 15 - \frac{\pi x^2}{4} - \frac{\pi x^2}{8} - (60 - 8x) = 120 - \frac{3\pi}{8}x^2 - 60 + 8x =$

$= -\frac{3\pi}{8}x^2 + 8x + 60.$

b) On va chercher les coordonnées du sommet de la parabole $A(x) = -\frac{3\pi}{8}x^2 + 8x + 60$.

La 1e coordonnée est donnée par $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-3\pi/8)} = \frac{8}{3\pi/4} = \frac{32}{3\pi} \cong 3,4$.

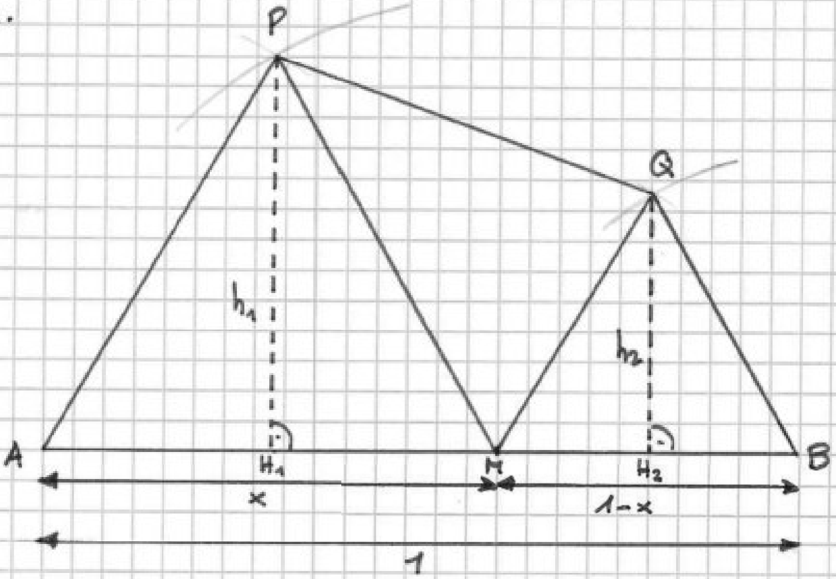
La 2e coordonnée est alors $A(x) = -\frac{3\pi}{8} \cdot \left(\frac{32}{3\pi}\right)^2 + 8 \cdot \frac{32}{3\pi} + 60 =$

$= -\frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1024}{9\pi^2} + \frac{256}{3\pi} + 60 = -\frac{128}{3\pi} + \frac{256}{3\pi} + 60 = \frac{128}{3\pi} + 60 \cong 73,58.$

Ainsi l'aire est maximale si $x = \frac{32}{3\pi} \cong 3,4$ et elle vaut alors $\frac{128}{6\pi} + 60 \cong 73,58$.

Exercice 31

On a la situation suivante.



a)

Le triangle AH_1P est rectangle avec $AP = x$, $AH_1 = \frac{x}{2}$ et $PH_1 = h_1$.

Par le théorème de Pythagore, on a $AP^2 = AH_1^2 + PH_1^2 \Rightarrow x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h_1^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + h_1^2$

$\Rightarrow h_1^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h_1 = \frac{\sqrt{3}x}{2}$.

L'aire du triangle AMP est ainsi $\frac{AM \cdot PH_1}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$.

Le triangle BH_2Q est rectangle avec $BQ = 1-x$, $BH_2 = \frac{1-x}{2}$ et $QH_2 = h_2$.

Par le théorème de Pythagore, on a $BQ^2 = BH_2^2 + QH_2^2 \Rightarrow (1-x)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + h_2^2$

$\Rightarrow (1-x)^2 = \frac{(1-x)^2}{4} + h_2^2 \Rightarrow h_2^2 = \frac{3(1-x)^2}{4} \Rightarrow h_2 = \frac{\sqrt{3}(1-x)}{2}$.

L'aire du triangle MBQ est ainsi $\frac{BM \cdot PH_2}{2} = \frac{(1-x)\cdot\frac{\sqrt{3}(1-x)}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}(1-x)^2}{4}$.

Reste à calculer l'aire du triangle MQP.

L'aire du trapèze PQH_2H_1 est $\frac{h_1+h_2}{2} \cdot H_1H_2$ avec $h_1 = \frac{\sqrt{3}x}{2}$, $h_2 = \frac{\sqrt{3}(1-x)}{2}$ et

$H_1H_2 = H_1M + MH_2 = \frac{x}{2} + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi l'aire du trapèze PQH_2H_1 est

$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{\sqrt{3}(1-x)}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

L'aire du triangle MPH_1 est la moitié de l'aire du triangle AMP $\Rightarrow$ aire du triangle $MPH_1 = \frac{\sqrt{3}x^2}{8}$.

L'aire du triangle MQH_2 est la moitié de l'aire du triangle MQB $\Rightarrow$ aire du triangle $MQH_2 = \frac{\sqrt{3}(1-x)^2}{8}$.

Ainsi aire MQP = aire PQH_1H_2 − aire MPH_1 − aire MQH_2 =

$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}x^2}{8} - \frac{\sqrt{3}(1-x)^2}{8}$.

b) L'aire du quadrilatère ABQP est aire AMP + aire MBQ + aire MQP =

$= \frac{\sqrt{3}x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}(1-x)^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}x^2}{8} - \frac{\sqrt{3}(1-x^2)}{8} = \frac{\sqrt{3}x^2}{8} + \frac{\sqrt{3}(1-x^2)}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} =$

46

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(x^2+(1-x)^2+1\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(x^2+1-2x+x^2+1\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(2x^2-2x+2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2-x+1\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}.$

C'est une parabole qui atteint son sommet (minimum) en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\sqrt{3}/4}{2\sqrt{3}/4} = \frac{1}{2}$.

L'aire du quadrilatère ABQP est alors $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Exercice 32

On a l'équation $mx^2 + 6x + 1 = 0$.

C'est une équation du 2e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = m$, $b = 6$ et $c = 1$.

On sait que, si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation a 2 racines (solutions) distinctes, que, si $\Delta = 0$, l'équation a 2 racines égales (une seule solution) et que, si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de racine.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot m \cdot 1 = 36 - 4m$.

1) $\Delta > 0 \Rightarrow 36 - 4m > 0 \Rightarrow 36 > 4m \Rightarrow 9 > m \Rightarrow$ si $m < 9$, l'équation a 2 racines distinctes.

2) $\Delta = 0 \Rightarrow 36 - 4m = 0 \Rightarrow m = 9 \Rightarrow$ si $m = 9$, l'équation a 2 racines égales.

3) $\Delta < 0 \Rightarrow 36 - 4m < 0 \Rightarrow m > 9 \Rightarrow$ si $m > 9$, l'équation n'a pas de racines.

Considérons maintenant l'équation $x^2 - 2x + m = 0$.

Ici, $a = 1$, $b = -2$ et $c = m$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 4 - 4m$.

1) $\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4m > 0 \Rightarrow 4 > 4m \Rightarrow 1 > m \Rightarrow$ si $m < 1$, l'équation a 2 racines distinctes.

2) $\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4m = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ si $m = 1$, l'équation a 2 racines égales.

3) $\Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1 \Rightarrow$ si $m > 1$, l'équation n'a pas de racine.

Exercice 33

On a la parabole d'équation : $y = x^2 + (m+1)x + m$.

1) parabole tangente à Ox : cela signifie que la parabole ne coupe l'axe Ox qu'en un seul point (son sommet) ; autrement dit, l'équation $x^2 + (m+1)x + m = 0$ ne doit avoir qu'une solution ; cela signifie que son discriminant Δ doit être nul : $\Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = (m+1)^2 - 4m =$
$= m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$;
ainsi, si $m = 1$, la parabole est tangente à Ox.

2) passe par O : en posant $x = y = 0$, on obtient $0 = 0^2 + (m+1) \cdot 0 + m$, d'où $m = 0$;
ainsi, si $m = 0$, la parabole passe par O.

3) ait Oy comme axe de symétrie : cela signifie que le sommet de la parabole est sur l'axe Oy ; la 1^e coordonnée du sommet est $x_S = 0$;
or $x_S = -\frac{(m+1)}{2 \cdot 1} = -\frac{m+1}{2}$; $x_S = 0 \Rightarrow -\frac{m+1}{2} = 0$
$\Rightarrow m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$;
ainsi, si $m = -1$, la parabole a Oy comme axe de symétrie.

Exercice 34

On a l'équation $2x^2+4mx+m^2+4m+3=0$.

On cherche la somme et le produit des racines. On suppose donc que les 2 racines existent, autrement dit que le discriminant Δ de l'équation est positif ou nul.

On a $\Delta=(4m)^2-4\cdot2\cdot(m^2+4m+3)=16m^2-8m^2-16m-24=8m^2-16m-24=$
$=8(m^2-2m-3)=8(m+1)(m-3)$.

Si $m\geqslant3$, on a $\Delta=8(m+1)(m-3)\geqslant0$.

Si $-1<m<3$, $\Delta=8(m+1)(m-3)<0$

Si $m\leqslant-1$, $\Delta=8(m+1)(m-3)\geqslant0$.

Ainsi, pour que Δ soit positif ou nul, il faut que $m\in\,]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$ $(m\leqslant-1$ ou $m\geqslant3)$.

Supposons que, pour une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, on ait $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$.
Les solutions de l'équation sont alors $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On a alors $x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$ et

$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

1) On veut que $x_1+x_2=4\Rightarrow-\frac{b}{a}=4\Rightarrow-\frac{4m}{2}=4\Rightarrow-\frac{m}{2}=1\Rightarrow m=-2$.
Comme $-2\in\,]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$, si $m=-2$, la somme des racines est 4.

2) On veut que $x_1\cdot x_2=4\Rightarrow\frac{c}{a}=4\Rightarrow\frac{m^2+4m+3}{2}=4\Rightarrow m^2+4m+3=8$
$\Rightarrow m^2+4m-5=0\Rightarrow(m-1)(m+5)=0\Rightarrow m=1$ ou $m=-5$.
Comme $1\notin\,]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$, si $m=-5$, le produit des racines est 4.

Exercice 35

La droite $y=mx$ sera tangente à la parabole $y=\frac{x^2}{2}+2$ si le système $y=mx$ et $y=\frac{x^2}{2}+2$ n'a qu'une seule solution (les 2 courbes n'ont qu'une intersection).

On doit ainsi avoir que l'équation $\frac{x^2}{2}+2=mx$ n'a qu'une solution.

On a $\frac{x^2}{2}+2=mx \Longrightarrow \frac{x^2}{2}-mx+2=0 \Longrightarrow x^2-2mx+4=0$.

Pour qu'elle n'ait qu'une solution, son discriminant Δ doit être nul.

On a $\Delta=(-2m)^2-4\cdot1\cdot4=4m^2-16=4(m^2-4)$.

Ainsi $\Delta=0 \Longrightarrow 4(m^2-4)=0 \Longrightarrow m^2-4=0 \Longrightarrow m^2=4 \Longrightarrow m=\pm2$.

Par conséquent si $m=-2$ ou $m=2$, la droite $y=mx$ est tangente à la parabole $y=\frac{x^2}{2}+2$.

Exercice 36

On a la parabole $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{2}$ et la droite $y=mx$.

1) Voir ci-dessous.

2) La droite $y=mx$ et la parabole $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{2}$ sont tangentes si le système $y=mx$ et $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{2}$ a une unique solution.

Ainsi, l'équation $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{2}=mx$ doit avoir une unique solution.

On a : $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{2}=mx \implies x^2+2x+9=2mx \implies x^2+(2-2m)x+9=0$.

Cette équation aura une unique solution si son discriminant Δ est nul.

On a $\Delta=b^2-4ac=(2-2m)^2-4\cdot1\cdot9=4-8m+4m^2-36=4m^2-8m-32=4(m^2-2m-8)$.

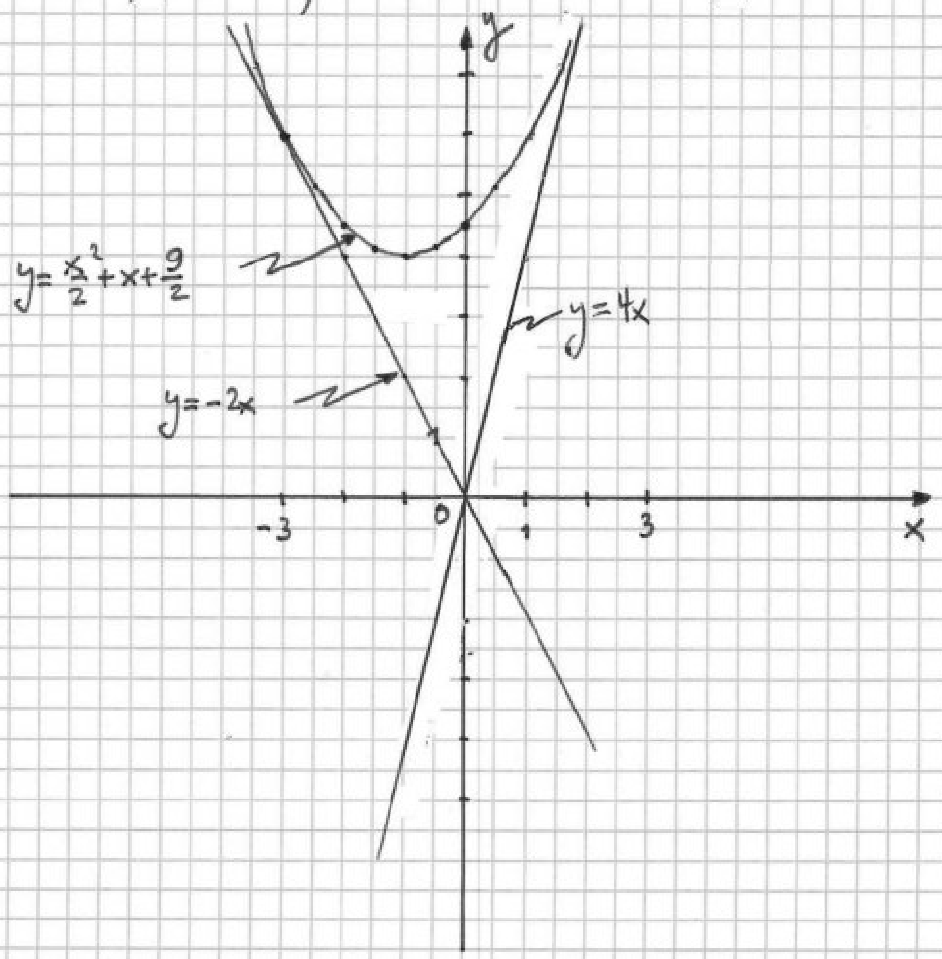
Ainsi $\Delta=0 \implies 4(m^2-2m-8)=0 \implies m^2-2m-8=0 \implies (m+2)(m-4)=0$

$\implies m=-2$ ou $m=4$.

Par conséquent, si $m=-2$ ou $m=4$, la droite $y=mx$ et la parabole $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{2}$.

Si $m=-2$, $\Delta=0$ et la solution de $x^2+(2-2m)x+9=0$ est $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2-2m}{2\cdot1}=$
$=m-1=-2-1=-3$; on a alors $y=mx=-2\cdot(-3)=6$; le point de contact est ainsi $(-3;6)$.

Si $m=4$, $\Delta=0$ et la solution de $x^2+(2-2m)x+9=0$ est $x=m-1=4-1=3$; on a alors $y=mx=4\cdot3=12$; le point de contact est ainsi $(3;12)$.



Exercice 37

On a $4x^2-8kx-9=0$

On considère les racines opposées ou la différence des racines. On suppose donc que les 2 racines existent, autrement dit que le discriminant Δ de l'équation est positif ou nul.

On a $\Delta=(-8k)^2-4.4.(-9)=64k^2+144$. Ainsi, pour toute valeur de k, on a $\Delta>0$.

Supposons que, pour une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, on ait $\Delta=b^2-4ac>0$. Les solutions de l'équation sont alors $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

1) $x_1=-x_2 \Rightarrow x_1+x_2=0 \Rightarrow \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \Rightarrow \frac{-2b}{2a}=0 \Rightarrow b=0;$

ici $b=-8k$; donc $b=0 \Rightarrow k=0$; par conséquent, si $k=0$, une racine est l'opposée de l'autre; l'équation s'écrit alors $4x^2-9=0$.

2) $x_1-x_2=4$ (on a $x_1>x_2$) $\Rightarrow \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=4 \Rightarrow \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}=4 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{a}=4$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=4a \Rightarrow \Delta=16a^2$ (attention: comme on a élevé au carré, il faudra vérifier les solutions, car une solution "parasite" peut avoir été ajoutée);

ici $\Delta=64k^2+144$ et $a=4$; ainsi $\Delta=16a^2 \Rightarrow 64k^2+144=16.4^2$

$\Rightarrow 64k^2+144=256 \Rightarrow 64k^2=112 \Rightarrow k^2=\frac{112}{64}=\frac{7}{4} \Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

Avec $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$, on a $\Delta=16a^2=256$ et $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8k+\sqrt{256}}{2.4}=\frac{1}{8}\left(8\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}+16\right)\right)=$

$=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}+2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8k-\sqrt{256}}{2.4}=\frac{1}{8}\left(8\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}-16\right)\right)=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}-2$; ainsi

$x_1-x_2=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}+2-\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}-2\right)=2+2=4.$

Par conséquent, si $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$, la différence des racines est 4.

L'équation s'écrit alors $4x^2\mp4\sqrt{7}x-9=0$.

Exercice 38

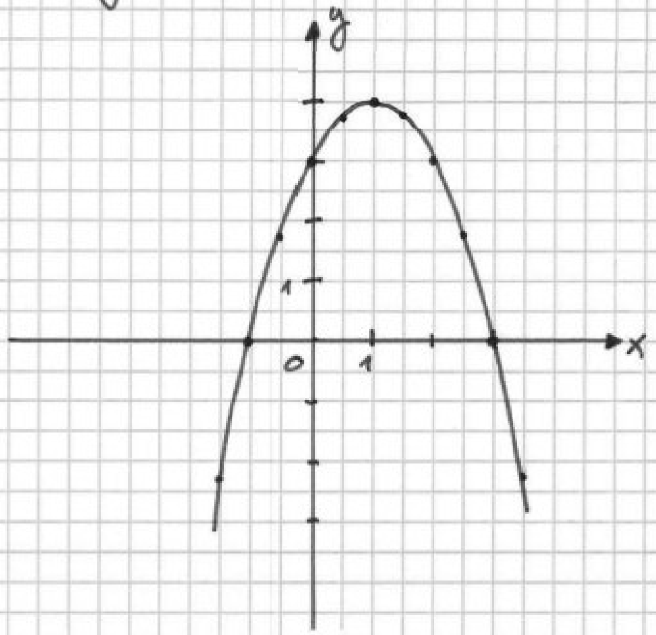
On donne $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) Intersections avec l'axe Ox : on pose $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$
$\Rightarrow$ les intersections avec l'axe Ox sont $(-1;0)$ et $(3;0)$.

Intersection avec l'axe Oy : on pose $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ point $(0;3)$.

Sommet : les coordonnées du sommet sont $(x_S ; y_S)$ avec $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1$;
avec $x_S = 1$, on a $y_S = -1^2 + 2\cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4 \Rightarrow$ le sommet est $(1;4)$.

Graphe :



b) On a le système $y = -x^2 + 2x + 3$ et $y = -2x + h$.
On a alors $-x^2 + 2x + 3 = -2x + h \Rightarrow x^2 - 4x + h - 3 = 0$, équation du 2e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = h - 3$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(h-3) =$
$= 16 - 4h + 12 = 28 - 4h = 4(7-h)$.
Si $\Delta > 0$, l'équation a 2 solutions : $\Delta > 0 \Rightarrow 4(7-h) > 0 \Rightarrow 7 - h > 0 \Rightarrow h < 7$.
Si $\Delta = 0$, l'équation a 1 solution : $\Delta = 0 \Rightarrow 4(7-h) = 0 \Rightarrow h = 7$.
Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution : $\Delta < 0 \Rightarrow 4(7-h) < 0 \Rightarrow h > 7$.
Par conséquent : si $h < 7$, le système a 2 solutions distinctes ; si $h = 7$, le système a une unique solution ; si $h > 7$, le système n'a aucune solution.

c) La droite tangente à f, de pente -2, est la droite $y = -2x + h$ qui a une seule intersection avec f. D'après b), c'est pour $h = 7$.
L'équation de la tangente est donc $y = -2x + 7$.
Les coordonnées du point de tangence est $(x;y)$, où x est l'unique solution de

(54)

$x^2-4x+h-3=0$ (voir b)). Comme $h=7$, x est la solution unique de $x^2-4x+4=0$;
comme $x^2-4x+4=(x-2)^2$, x est la solution de $(x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$.
Avec $x=2$, on a $y=-2x+7=-2\cdot 2+7=-4+7=3$.
Les coordonnées du point de tangence sont donc $(2;3)$.

Exercice 39

On a la parabole $y = x^2 - 4x + 4 + h$ et la droite $2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -2x + 1$.

a) La parabole sera tangente à la droite donné si le système $y = x^2 - 4x + 4 + h$ et $y = -2x + 1$ a une unique solution. Ainsi l'équation $x^2 - 4x + 4 + h = -2x + 1$ doit avoir une solution unique.

On a $x^2 - 4x + 4 + h = -2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 + h = 0$.

Pour que cette équation ait une solution unique, il faut que son discriminant Δ soit nul.

On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3+h) = 4 - 12 - 4h = -8 - 4h = -4(2+h)$.

Ainsi $\Delta = 0 \Rightarrow -4(2+h) = 0 \Rightarrow 2 + h = 0 \Rightarrow h = -2$.

Avec $h = -2$, l'équation $x^2 - 2x + 3 + h = 0$ s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Avec $x = 1$, on a $y = -2x + 1 = -2 + 1 = -1$.

Le point de tangence est donc $(1 ; -1)$.

b) Avec $h = -2$, la parabole s'écrit $y = x^2 - 4x + 2$.

La 1e coordonnée de son sommet est $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$.

Avec $x_S = 2$, on a $y_S = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

Son sommet est donc $(2 ; -2)$.

Exercice 40

On a 2 paraboles: $f(x) = x^2 - 2x + 4$ et $g(x) = -x^2 + h$.

a) Comme f est une parabole tournée vers le haut ($\cup$) et g est une parabole tournée vers le bas ($\cap$), les 2 paraboles seront tangentes si elles ont un unique point d'intersection ( ) (Si les 2 paraboles étaient tournées du même côté, elles pourraient avoir une seule intersection sans être tangentes:).

Ainsi le système $y = x^2 - 2x + 4$ et $y = -x^2 + h$ doit avoir une unique solution.

Donc, l'équation $x^2 - 2x + 4 = -x^2 + h$ doit avoir une unique solution.

On a $x^2 - 2x + 4 = -x^2 + h \Rightarrow 2x^2 - 2x + 4 - h = 0$.

Cette équation a une unique solution si son discriminant Δ est nul.

On a $\Delta = (-2)^2 - 4.2.(4-h) = 4 - 32 + 8h = 8h - 28 = 4(2h-7)$.

Ainsi $\Delta = 0 \Rightarrow 4(2h-7) = 0 \Rightarrow 2h - 7 = 0 \Rightarrow 2h = 7 \Rightarrow h = \frac{7}{2}$.

Par conséquent, si $h = \frac{7}{2}$, les 2 paraboles sont tangentes.

b) Avec $h = \frac{7}{2}$, l'équation $2x^2 - 2x + 4 - h = 0$ s'écrit (voir a)) $2x^2 - 2x + 4 - \frac{7}{2} = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Avec $x = \frac{1}{2}$, on a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2.\frac{1}{2} + 4 = \frac{1}{4} - 1 + 4 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$.

Le point de tangence est donc $\left(\frac{1}{2} ; \frac{13}{4}\right)$.

Exercice 41

On a l'équation $(m+1)x^2 - 4mx - m + 1 = 0$.
Elle n'aura qu'une solution si son discriminant Δ est nul.
On a $\Delta = (-4m)^2 - 4(m+1)(-m+1) = 16m^2 - 4(-m^2+1) = 16m^2 + 4m^2 - 4 = 20m^2 - 4$.
Ainsi $\Delta = 0 \Rightarrow 20m^2 - 4 = 0 \Rightarrow 20m^2 = 4 \Rightarrow 5m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} =$
$= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.
Ainsi, si $m = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ou $m = \frac{\sqrt{5}}{5}$, l'équation $(m+1)x^2 - 4mx - m + 1 = 0$ a une solution unique.

Exercice 42

On a l'équation $mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0$.

Pour qu'elle ait 2 racines réelles distinctes, il faut que son discriminant Δ soit strictement positif.

On a $\Delta = (-2(m+1))^2 - 4 \cdot m \cdot (m-1) = 4(m+1)^2 - 4m^2 + 4m = 4(m^2 + 2m + 1) - 4m^2 + 4m =$

$= 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 4m = 12m + 4 = 4(3m+1)$.

Ainsi $\Delta > 0 \Rightarrow 4(3m+1) > 0 \Rightarrow 3m+1 > 0 \Rightarrow 3m > -1 \Rightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Par conséquent, si $m > -\frac{1}{3}$, l'équation a 2 racines réelles distinctes.

Exercice 43

1) On a $y = x^2 - 2x + 2$ et $x + y - 4 = 0$.

Par substitution, on obtient $x + x^2 - 2x + 2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$
$\Rightarrow x = -1$ ou $x = 2$.

Avec $x = -1$, on a $y = (-1)^2 - 2(-1) + 2 = 1 + 2 + 2 = 5$.

Avec $x = 2$, on a $y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$.

Les solutions sont donc: 1) $x = -1$ et $y = 5$;
2) $x = 2$ et $y = 2$.

2) On a $x^2 + y^2 = 25$ et $-x + y + 4 = 0 \Rightarrow y = x - 4$.

Par substitution, on obtient $x^2 + (x-4)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + x^2 - 8x + 16 = 25$
$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 9 = 0$; on a $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 64 + 72 = 136 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{136} =$
$= 2\sqrt{34}$; les solutions sont $x = \frac{8 + 2\sqrt{34}}{2 \cdot 2} = \frac{4 + \sqrt{34}}{2}$ et $x = \frac{8 - 2\sqrt{34}}{2 \cdot 2} = \frac{4 - \sqrt{34}}{2}$.

Avec $x = \frac{4 + \sqrt{34}}{2}$, on a $y = x - 4 = \frac{4 + \sqrt{34}}{2} - 4 = \frac{-4 + \sqrt{34}}{2}$.

Avec $x = \frac{4 - \sqrt{34}}{2}$, on a $y = x - 4 = \frac{4 - \sqrt{34}}{2} - 4 = \frac{-4 - \sqrt{34}}{2}$.

Les solutions sont donc: 1) $x = \frac{4 + \sqrt{34}}{2} \cong 4,92$ et $y = \frac{-4 + \sqrt{34}}{2} \cong 0,92$;
2) $x = \frac{4 - \sqrt{34}}{2} \cong -0,92$ et $y = \frac{-4 - \sqrt{34}}{2} \cong -4,92$.

3) On a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ et $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -7 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{y} - 7$.

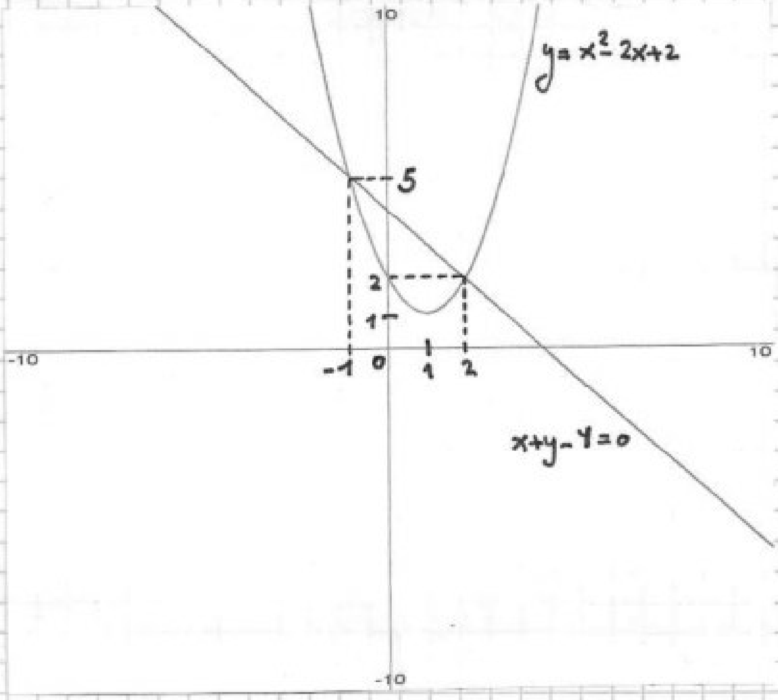
Par substitution, on obtient $\frac{2}{y} - 7 + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{y} - 7 = 2 \Rightarrow \frac{3}{y} = 9$
$\Rightarrow 3 = 9y \Rightarrow y = \frac{1}{3}$.

Avec $y = \frac{1}{3}$, on a $\frac{1}{x} = \frac{2}{1/3} - 7 \Rightarrow \frac{1}{x} = 6 - 7 \Rightarrow \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = -1$.

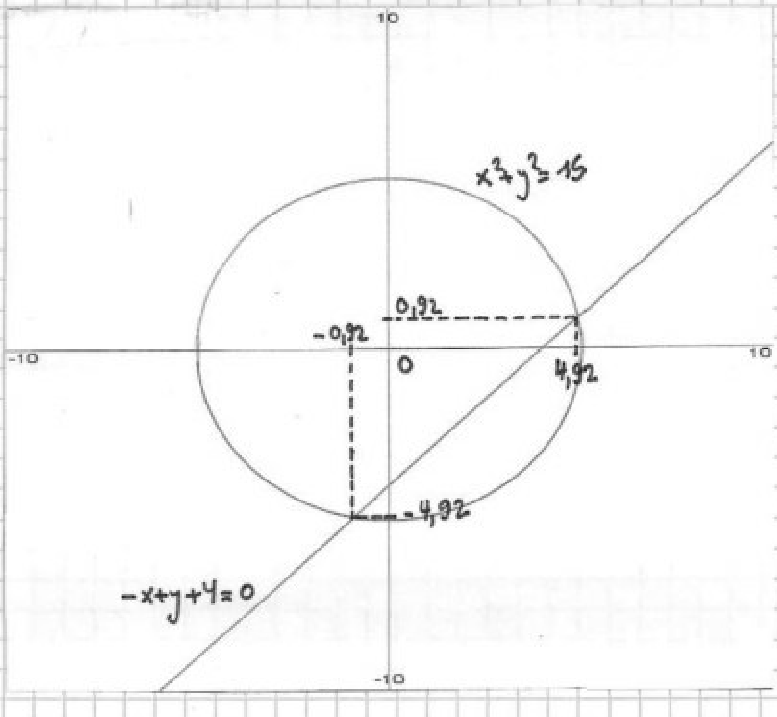
La solution est donc $x = -1$ et $y = \frac{1}{3}$.

Représentations graphiques:

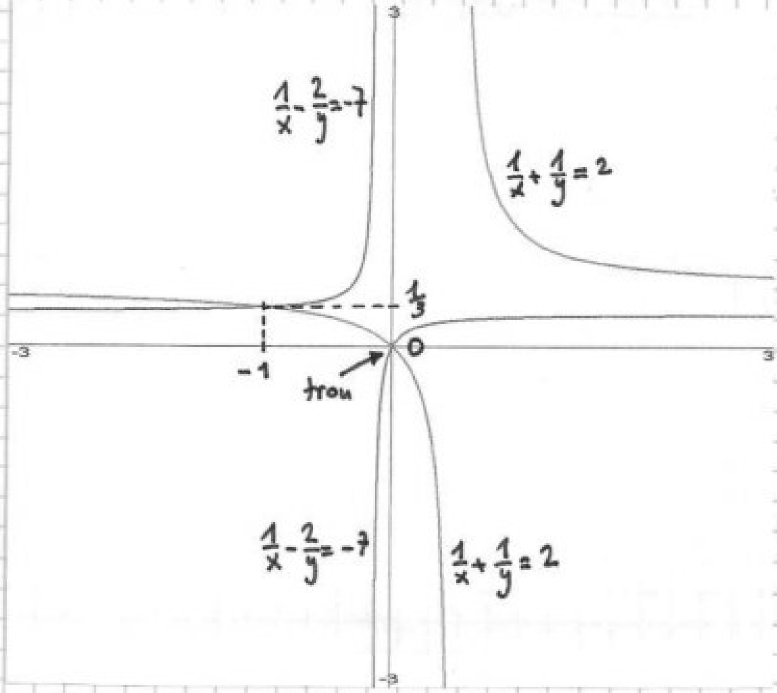
1)


10
$y = x^2 - 2x + 2$
5
2
1
-10
-1
0
1
2
10
$x + y - 4 = 0$
-10

2)


10
$x^2 + y^2 = 15$
0,92
-0,92
-10
0
4,92
10
-4,92
$-x + y + 4 = 0$
-10

3)



$\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=-7$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$
$\frac{1}{3}$
-1
0
trou
$\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=-7$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

Exercice 44

Résolution algébrique:

1) On a $y+x^2-4=0$ et $y+x-2=0 \Rightarrow y=-x+2$.

Par substitution, on obtient $-x+2+x^2-4=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=-1$ ou $x=2$.

Avec $x=-1$, on a $y=-(-1)+2=1+2=3$.

Avec $x=2$, on a $y=-2+2=0$.

Les solutions sont donc: 1) $x=-1$ et $y=3$;

2) $x=2$ et $y=0$.

2) On a $y=-x^2+3x-6$ et $y=2x-8$.

On a ainsi $-x^2+3x-6=2x-8 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=-1$ ou $x=2$.

Avec $x=-1$, on a $y=2(-1)-8=-2-8=-10$.

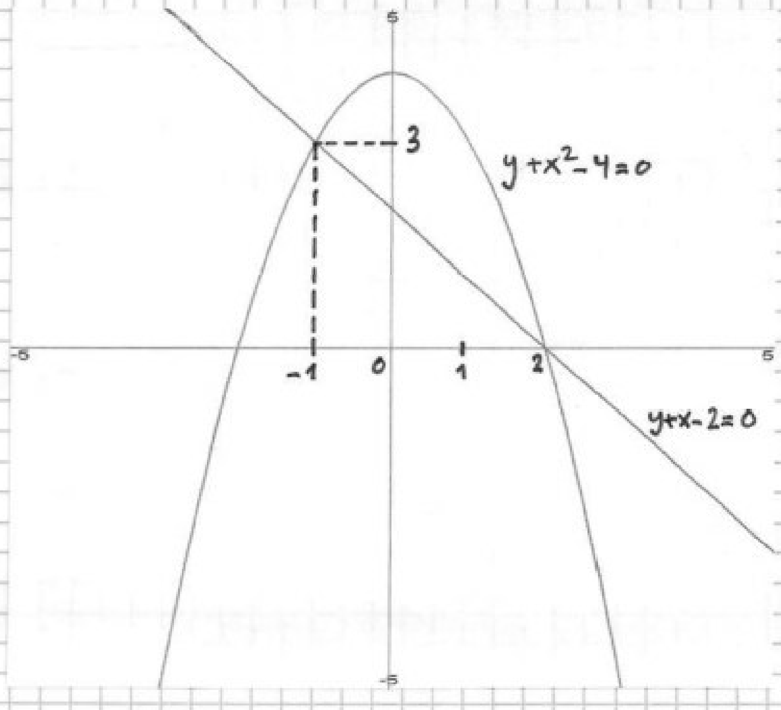
Avec $x=2$, on a $y=2\cdot 2-8=4-8=-4$.

Les solutions sont donc: 1) $x=-1$ et $y=-10$;

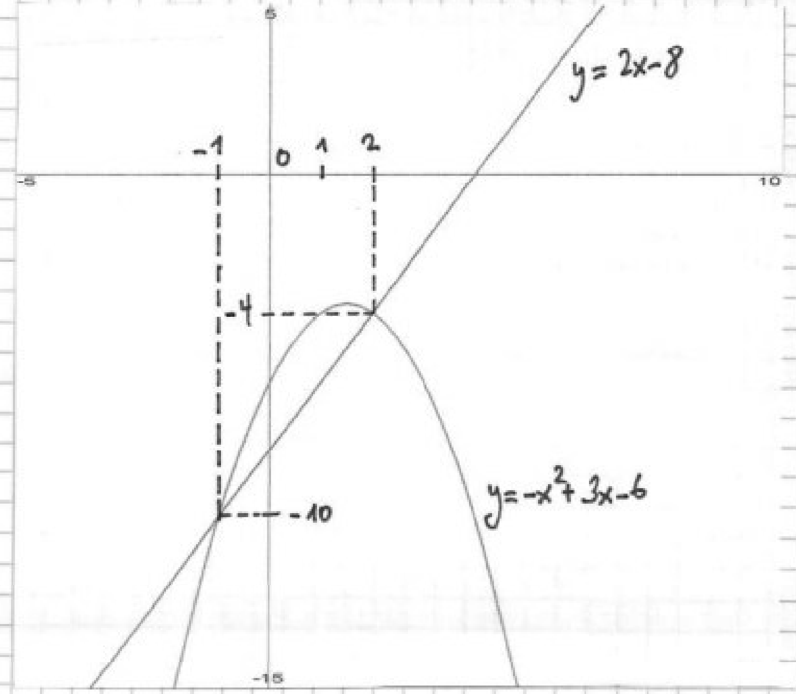
2) $x=2$ et $y=-4$.

Résolution graphique:

1)

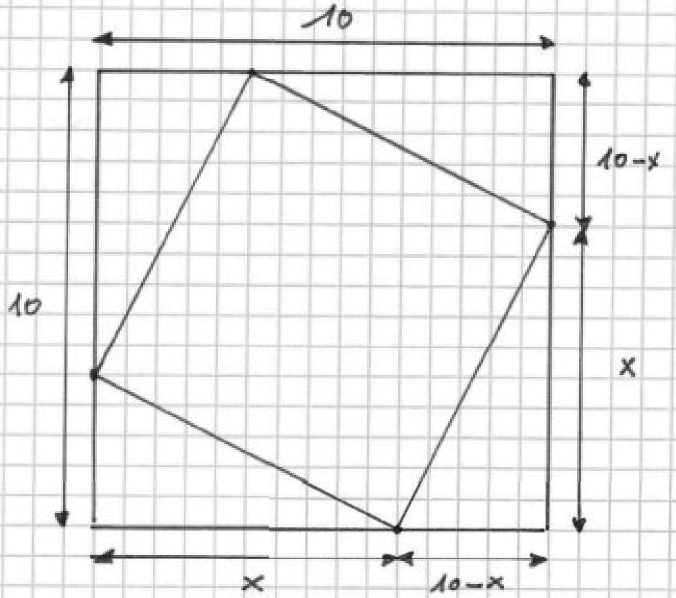


2)



Exercice 45

On a la situation suivante:



L'aire du carré intérieur est l'aire du grand carré moins l'aire des 4 triangles.

L'aire du grand carré est $10^2 = 100$.

L'aire d'un triangle est $\frac{x(10-x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2} = 5x - \frac{x^2}{2}$.

Ainsi l'aire du carré intérieur est $100 - 4\left(5x - \frac{x^2}{2}\right) = 100 - 20x + 2x^2 = 2x^2 - 20x + 100$.

$2x^2 - 20x + 100$ est une parabole tournée vers le haut ($\cup$). Son sommet minimum est en $x = -\frac{-20}{2 \cdot 2} = \frac{20}{4} = 5$.

Si $x = 5$, l'aire du carré intérieur vaut $2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 100 = 50 - 100 + 100 = 50$.

Ainsi l'aire du carré est minimum si $x = 5$ cm et elle vaut 50 cm^2.

Exercice 46

Soient x et y les 2 nombres. On va supposer que $x > y$.

Somme $= 16 \Rightarrow x+y=16 \Rightarrow y=16-x$.

Différence de leurs carrés $= 32 \Rightarrow x^2-y^2=32$.

Par substitution, on obtient $x^2-(16-x)^2=32 \Rightarrow x^2-(256-32x+x^2)=32$

$\Rightarrow x^2-256+32x-x^2=32 \Rightarrow -256+32x=32 \Rightarrow 32x=288 \Rightarrow x=9$.

Avec $x=9$, on a $y=16-x=16-9=7$.

Les nombres sont donc 9 et 7.

Exercice 47

Soient x et y les dimensions du rectangle.

Aire $= 120\ cm^2 \Rightarrow x \cdot y = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{x}$ (on peut clairement supposer $x \neq 0$).

Aire du rectangle de dimension $x+3$ sur $y-2 = 120 cm^2 \Rightarrow (x+3)(y-2) = 120\ cm^2$.

Par substitution, on obtient $(x+3)\left(\frac{120}{x} - 2\right) = 120 \Rightarrow 120 - 2x + \frac{360}{x} - 6 = 120$

$\Rightarrow -2x + \frac{360}{x} - 6 = 0 \Rightarrow -2x^2 + 360 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 180 + 3x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 180 = 0 \Rightarrow (x+15)(x-12) = 0 \Rightarrow x = -15$ ou $x = 12$.

Comme x est une dimension, on a $x > 0$. Ainsi la solution $x = -15$ est exclue.

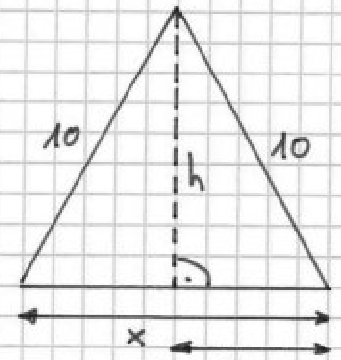
Par conséquent, $x = 12$ cm.

Avec $x = 12$, on a $y = \frac{120}{x} = \frac{120}{12} = 10$ cm.

Ainsi, les dimensions du rectangle sont : 12 cm pour le côté qui sera augmenté de 3 cm et 10 cm pour le côté qui sera diminué de 2 cm.

Exercice 48

On a la situation suivante :



$\frac{x}{2}$ (car le triangle est isocèle)

Aire triangle isocèle $= 48 \Rightarrow \frac{x \cdot h}{2} = 48 \Rightarrow x \cdot h = 96 \Rightarrow h = \frac{96}{x}$ $(x > 0)$.

Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle moitié du triangle isocèle $\Rightarrow 10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2$.

Par substitution, on obtient $10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{96}{x}\right)^2 \Rightarrow 100 = \frac{x^2}{4} + \frac{9216}{x^2}$

$\Rightarrow 400 = x^2 + \frac{36'864}{x^2} \Rightarrow 400x^2 = x^4 + 36'864 \Rightarrow x^4 - 400x^2 + 36'864 = 0$.

Posons $y = x^2$. L'équation s'écrit alors $y^2 - 400y + 36'864 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -400$ et $c = 36'864$; on a $\Delta = b^2 - 4ac =$
$= (-400)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36'864 = 160'000 - 147'456 = 12544 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 112$; les solutions sont
$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{400 + 112}{2 \cdot 1} = \frac{512}{2} = 256$ et $y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{400 - 112}{2 \cdot 1} = \frac{288}{2} = 144$.

Avec $y_1 = 256$ et $y = x^2$, on obtient $x = \pm\sqrt{256} = \pm 16$. Comme $x > 0$, on obtient $x = 16$.
Avec $y_2 = 144$ et $y = x^2$, on obtient $x = \pm\sqrt{144} = \pm 12$. Comme $x > 0$, on obtient $x = 12$.

Avec $x = 16$, on obtient $h = \frac{96}{x} = \frac{96}{16} = 6$.
Avec $x = 12$, on obtient $h = \frac{96}{x} = \frac{96}{12} = 8$.

Ainsi, les dimensions des triangles sont : 1) base $= 16$ cm et hauteur $= 6$ cm ou
2) base $= 12$ cm et hauteur $= 8$ cm.

Exercice 49

On va chercher une équation de la forme $(x-p)(x-q)=0$.

Une des racines vaut le quart de l'autre : $p=\frac{q}{4} \Rightarrow q=4p$.

La somme des carrés des racines vaut 17 : $p^2+q^2=17$.

Par substitution, on obtient $p^2+(4p)^2=17 \Rightarrow p^2+16p^2=17 \Rightarrow 17p^2=17$

$\Rightarrow p^2=1 \Rightarrow p=\pm 1$.

Avec $p=1$, on a $q=4p=4$.

Avec $p=-1$, on a $q=4p=-4$.

On a donc 2 possibilités : $(x+1)(x+4)=0$ et $(x-1)(x-4)=0$.

Exercice 50

Lorsqu'on a une équation contenant une ou des racines, on devra, à un moment donné ou un autre, l'élever une ou plusieurs fois au carré pour pouvoir la résoudre. Comme élever au carré peut ajouter une ou des solutions "parasites", il faudra dans tous les cas vérifier la validité de chaque solution afin de ne garder que celles qui sont valides.

1)

$\sqrt{3x+1} = 1-x$	$(\ \ )^2$
$3x+1 = (1-x)^2$	Identité remarquable
$3x+1 = 1-2x+x^2$	$-3x-1$
$x^2-5x=0$	Factorisation
$x(x-5)=0$	
$\Rightarrow x=0$ ou $x=5$	

Vérification: $x=0 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{1} = 1$ et $1-x = 1-0 = 1 \rightarrow$ ok.

$x=5 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{15+1} = \sqrt{16} = 4$ et $1-x = 1-5 = -4 \rightarrow$ not ok.

$\Rightarrow$ la solution est $x=0$.

2)

$\sqrt{25-x^2} = x-1$	$(\ \ )^2$
$25-x^2 = (x-1)^2$	Identité remarquable
$25-x^2 = x^2-2x+1$	$-25+x^2$
$2x^2-2x-24=0$	$:2$
$x^2-x-12=0$	Factorisation
$(x+3)(x-4)=0$	
$\Rightarrow x=-3$ ou $x=4$	

Vérification: $x=3 \Rightarrow \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ et $x-1 = 3-1 = 2 \rightarrow$ not ok.

$x=4 \Rightarrow \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ et $x-1 = 4-1 = 3 \rightarrow$ ok.

$\Rightarrow$ la solution est $x=4$.

3)

$\sqrt{36+x} = 2+\sqrt{x}$	$(\ \ )^2$
$36+x = (2+\sqrt{x})^2$	Identité remarquable
$36+x = 4+4\sqrt{x}+x$	$-4-x$
$32 = 4\sqrt{x}$	$:4$
$\sqrt{x} = 8$	$(\ \ )^2$
$x = 64$	

Vérification: $x=64 \Rightarrow \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ et $2+\sqrt{64} = 2+8 = 10 \rightarrow$ ok.

$\Rightarrow$ la solution est $x=64$

4)

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=1$	$(\quad)^2$
$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4})^2=1$	Identité remarquable
$x+3-2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}+x-4=1$	Réduction
$2x-1-2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}=1$	$+2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}$
$2x-1=1+2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}$	-1
$2x-2=2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}$	$:2$
$x-1=\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}$	Propriété des racines
$x-1=\sqrt{(x+3)(x-4)}$	$(\quad)^2$
$(x-1)^2=(x+3)(x-4)$	Identité remarquable et distributivité
$x^2-2x+1=x^2-x-12$	$-x^2$
$-2x+1=-x-12$	$+x$
$-x+1=-12$	-1
$-x=-13$	$\cdot(-1)$
$x=13$	

Vérification : $x=13 \Rightarrow \sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=\sqrt{13+3}-\sqrt{13-4}=\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1 \rightarrow$ OK.

$\Rightarrow$ La solution est $x=13$.

5)

$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1}=\sqrt{7x+4}$	$(\quad)^2$
$(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1})^2=7x+4$	Identité remarquable
$x+6+2\sqrt{x+6}\sqrt{x-1}+x-1=7x+4$	Réduction
$2x+5+2\sqrt{x+6}\sqrt{x-1}=7x+4$	$-2x-5$
$2\sqrt{x+6}\sqrt{x-1}=5x-1$	Propriété des racines
$2\sqrt{(x+6)(x-1)}=5x-1$	$(\quad)^2$
$4(x+6)(x-1)=(5x-1)^2$	Identité remarquable et distributivité
$4(x^2+5x-6)=25x^2-10x+1$	Distributivité
$4x^2+20x-24=25x^2-10x+1$	$-4x^2-20x+24$
$21x^2-30x+25=0$	Equation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=21$, $b=-30$ et $c=25$
$\Delta=b^2-4ac=(-30)^2-4\cdot21\cdot25=$	
$=900-2100=-1200<0$	

$\Rightarrow$ l'équation n'a pas de solution.

6) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-5}=\sqrt{4x+1}$	$(\quad)^2$
$(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-5})^2=4x+1$	Identité remarquable
$3x-2+2\sqrt{3x-2}\sqrt{x-5}+x-5=4x+1$	Réduction
$2\sqrt{3x-2}\sqrt{x-5}+4x-7=4x+1$	$-4x+8$
$2\sqrt{3x-2}\sqrt{x-5}=8$	$:2$
$\sqrt{3x-2}\sqrt{x-5}=4$	Propriétés des racines
$\sqrt{(3x-2)(x-5)}=4$	$(\quad)^2$
$(3x-2)(x-5)=16$	Distributivité
$3x^2-17x+10=16$	-16
$3x^2-17x-6=0$	Equation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=3$, $b=-17$ et $c=-6$

$\Delta=b^2-4ac=(-17)^2-4.3.(-6)=$

$=289+72=361 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=19$

$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{17+19}{2\cdot3}=\frac{36}{6}=6$ et

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{17-19}{2\cdot3}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$

Vérification: $x=6 \Rightarrow \sqrt{3x-2}+\sqrt{x-5}=\sqrt{3.6-2}+\sqrt{6-5}=\sqrt{16}+\sqrt{1}=4+1=5$ et

$\sqrt{4x+1}=\sqrt{4.6+1}=\sqrt{25}=5 \Rightarrow$ OK.

$x=-\frac{1}{3} \Rightarrow$ on a $3x-2=3\cdot(-\frac{1}{3})-2=-1-2=-3$ et on ne peut pas calculer $\sqrt{-3}$.

$\Rightarrow$ la solution est $x=6$.

7) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$	$(\quad)^2$
$(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8})^2=49$	Identité remarquable
$x+5+2\sqrt{x+5}\sqrt{2x+8}+2x+8=49$	Réduction
$2\sqrt{x+5}\sqrt{2x+8}+3x+13=49$	$-3x-13$
$2\sqrt{x+5}\sqrt{2x+8}=-3x+36$	Propriétés des racines
$2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=-3x+36$	$(\quad)^2$
$4(x+5)(2x+8)=(-3x+36)^2$	Distributivité et identité remarquable
$4(2x^2+18x+40)=9x^2-216x+1296$	Distributivité
$8x^2+72x+160=9x^2-216x+1296$	$-8x^2-72x-160$
$x^2-288x+1136=0$	Equation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-288$ et $c=1136$

$\Delta=b^2-4ac=(-288)^2-4.1.1136=$

$=82'944-4544=78400$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=280$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{288+280}{2.1} = \frac{568}{2} = 284$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{288-280}{2.1} = \frac{8}{2} = 4.$

Vérification: $x = 284 \Rightarrow \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = \sqrt{284+5} + \sqrt{2\cdot 284+8} = \sqrt{289} + \sqrt{576} =$

$= 17 + 24 = 41 \neq 7 \Rightarrow$ not ok.

$x = 4 \Rightarrow \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = \sqrt{4+5} + \sqrt{2\cdot 4+8} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \rightarrow$ ok.

$\Rightarrow$ la solution est $x = 4$.

Exercice 51

Lorsqu'on a une équation contenant une ou des racines, on devra, à un moment donné ou un autre, l'élever une ou plusieurs fois au carré pour pouvoir la résoudre. Comme élever au carré peut ajouter une ou des solutions "parasites", il faudra dans tous les cas vérifier la validité de chaque solution afin de ne garder que celles qui sont valides.

1)

$\sqrt{25-x^2} = x-1$	$(\ )^2$
$25-x^2 = (x-1)^2$	Identité remarquable
$25-x^2 = x^2-2x+1$	$-25+x^2$
$2x^2-2x-24=0$	$:2$
$x^2-x-12=0$	Factorisation
$(x+3)(x-4)=0$	
$\Rightarrow x=-3$ ou $x=4$	

Vérification: $x=-3 \Rightarrow \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ et $x-1=-3-1=-4 \rightarrow$ not ok.

$x=4 \Rightarrow \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ et $x-1=4-1=3 \rightarrow$ ok.

La solution est $x=4$.

2)

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=1$	$(\ )^2$
$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4})^2=1$	Identité remarquable
$x+3-2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}+x-4=1$	Réduction
$-2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}+2x-1=1$	$-2x+1$
$-2\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}=-2x+2$	$:(-2)$
$\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}=x-1$	Propriété des racines
$\sqrt{(x+3)(x-4)}=x-1$	$(\ )^2$
$(x+3)(x-4)=(x-1)^2$	Distributivité et identité remarquable
$x^2-x-12=x^2-2x+1$	$-x^2$
$-x-12=-2x+1$	$+2x$
$x-12=1$	$+12$
$x=13$	

Vérification: $x=13 \Rightarrow \sqrt{x+3}-\sqrt{x-4} = \sqrt{13+3}-\sqrt{13-4} = \sqrt{16}-\sqrt{9} = 4-3=1 \rightarrow$ ok.

La solution est $x=13$.

3) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1}=\sqrt{7x+4}$ | $(\quad)^2$

$(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1})^2=7x+4$ | Identité remarquable

$x+6+2\sqrt{x+6}\sqrt{x-1}+x-1=7x+4$ | Réduction

$2\sqrt{x+6}\sqrt{x-1}+2x+5=7x+4$ | $-2x-5$

$2\sqrt{x+6}\sqrt{x-1}=5x-1$ | Propriété des racines

$2\sqrt{(x+6)(x-1)}=5x-1$ | $(\quad)^2$

$4(x+6)(x-1)=(5x-1)^2$ | Distributivité et identité remarquable

$4(x^2+5x-6)=25x^2-10x+1$ | Distributivité

$4x^2+20x-24=25x^2-10x+1$ | $-4x^2-20x+24$

$21x^2-30x+25=0$ | Equation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=21$, $b=-30$ et $c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-30)^2-4\cdot 21\cdot 25=$

$=900-2100=-1200<0$

$\Rightarrow$ l'équation n'a pas de solution.

4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$ | $(\quad)^2$

$(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8})^2=49$ | Identité remarquable

$x+5+2\sqrt{x+5}\sqrt{2x+8}+2x+8=49$ | Réduction

$2\sqrt{x+5}\sqrt{2x+8}+3x+13=49$ | $-3x-13$

$2\sqrt{x+5}\sqrt{2x+8}=-3x+36$ | Propriété des racines

$2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=-3x+36$ | $(\quad)^2$

$4(x+5)(2x+8)=(-3x+36)^2$ | Distributivité et identité remarquable

$4(2x^2+18x+40)=9x^2-216x+1296$ | Distributivité

$8x^2+72x+160=9x^2-216x+1296$ | $-8x^2-72x-160$

$x^2-288x+1136=0$ | Equation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-288$ et $c=1136$

$\Delta=b^2-4ac=(-288)^2-4\cdot 1\cdot 1136=$

$=82'944-4544=78400\Rightarrow\sqrt{\Delta}=280$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{288+280}{2\cdot 1}=\dfrac{568}{2}=284$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{288-280}{2\cdot 1}=\dfrac{8}{2}=4.$

Vérification: $x_1=284\Rightarrow\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=\sqrt{284+5}+\sqrt{2\cdot 284+8}=\sqrt{289}+\sqrt{576}=17+24=41\neq 7$

$\Rightarrow$ not ok.

$x_2=4\Rightarrow\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=\sqrt{4+5}+\sqrt{2\cdot 4+8}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7\rightarrow$ ok.

$\Rightarrow$ la solution est $x=4$.

5)

$\sqrt{7-2x}-\sqrt{5+x}-\sqrt{4+3x}=0$	$+\sqrt{5+x}+\sqrt{4+3x}$
$\sqrt{7-2x}=\sqrt{5+x}+\sqrt{4+3x}$	$(\quad)^2$
$7-2x=\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{4+3x}\right)^2$	Identité remarquable
$7-2x=5+x+2\sqrt{5+x}\sqrt{4+3x}+4+3x$	Réduction
$7-2x=4x+9+2\sqrt{5+x}\sqrt{4+3x}$	$-4x-9$
$-6x-2=2\sqrt{5+x}\sqrt{4+3x}$	$:2$
$-3x-1=\sqrt{5+x}\sqrt{4+3x}$	Propriétés des racines
$-3x-1=\sqrt{(5+x)(4+3x)}$	$(\quad)^2$
$(-3x-1)^2=(5+x)(4+3x)$	Distributivité et identité remarquable
$9x^2+6x+1=3x^2+19x+20$	$-3x^2-19x-20$
$6x^2-13x-19=0$	Equation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$
$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\cdot6\cdot(-19)=$	avec $a=6$, $b=-13$ et $c=-19$
$=169+456=625 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=25$	

$\Rightarrow x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{13+25}{2\cdot6}=\dfrac{38}{12}=\dfrac{19}{6}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{13-25}{2\cdot6}=\dfrac{-12}{12}=-1.$

Vérification: $x=\dfrac{19}{6} \Rightarrow \sqrt{7-2\cdot\frac{19}{6}}-\sqrt{5+\frac{19}{6}}-\sqrt{4+3\cdot\frac{19}{6}}\cong 0{,}8165-2{,}8577-3{,}6742<0 \rightarrow$ not ok.

$x=-1 \Rightarrow \sqrt{7-2(-1)}-\sqrt{5+(-1)}-\sqrt{4+3(-1)}=3-2-1=0 \rightarrow$ ok

$\Rightarrow$ la solution est $x=-1$.

6)

$\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x-5}$	$(\quad)^2$
$2\sqrt{x+1}=3x-5$	$(\quad)^2$
$4(x+1)=(3x-5)^2$	Distributivité et identité remarquable
$4x+4=9x^2-30x+25$	$-4x-4$
$9x^2-34x+21=0$	Equation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$
$\Delta=b^2-4ac=34^2-4\cdot9\cdot21=$	avec $a=9$, $b=-34$ et $c=21$
$=1156-756=400 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=20$	

$\Rightarrow x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{34+20}{2\cdot9}=\dfrac{54}{18}=3$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{34-20}{2\cdot9}=\dfrac{14}{18}=\dfrac{7}{9}.$

Vérification: $x=3 \Rightarrow \sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{2\cdot2}=2$ et $\sqrt{3x-5}=\sqrt{4}=2 \rightarrow$ ok.

$x=\dfrac{7}{9} \Rightarrow \sqrt{2\sqrt{x+1}}\cong 1{,}633$ et $\sqrt{3x-5}$ n'existe pas car $3\cdot\frac{7}{9}-5<0$.

$\Rightarrow$ la solution est $x=3$.

Exercice 52

Lorsqu'on a une équation avec une ou des valeurs absolues, on doit séparer sa résolution en 2 parties ou plus en fonction du signe de ce qui est à l'intérieur de la ou des valeurs absolues.

1) $|x-9|=1 \Rightarrow$ soit $x-9=1 \Rightarrow x=10$,
soit $-(x-9)=1 \Rightarrow -x+9=1 \Rightarrow x=8$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=8$ et $x=10$.

2) $|x+6|=2 \Rightarrow$ soit $x+6=2 \Rightarrow x=-4$,
soit $-(x+6)=2 \Rightarrow x+6=-2 \Rightarrow x=-8$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=-8$ et $x=-4$.

3) $|x-3|=0{,}5 \Rightarrow$ soit $x-3=0{,}5 \Rightarrow x=3{,}5$,
soit $-(x-3)=0{,}5 \Rightarrow x-3=-0{,}5 \Rightarrow x=2{,}5$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=2{,}5$ et $x=3{,}5$.

4) $|x-1|=|x-5| \Rightarrow$ soit $x-1=x-5 \Rightarrow -1=-5 \Rightarrow$ impossible,
soit $x-1=-(x-5) \Rightarrow x-1=-x+5 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$
(les autres possibilités $(-(x-1)=x-5$ et $-(x-1)=-(x-5))$ sont incluses dans les 2 ci-dessus)
$\Rightarrow$ la solution est $x=3$.

5) $|x+3|=5 \Rightarrow$ soit $x+3=5 \Rightarrow x=2$,
soit $-(x+3)=5 \Rightarrow x+3=-5 \Rightarrow x=-8$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=-8$ et $x=2$.

6) $\frac{1}{|x-2|}=3$: on remarque tout d'abord qu'on doit avoir $x\neq 2$ (sinon on divise par 0);
$\frac{1}{|x-2|}=3 \Rightarrow 1=3|x-2| \Rightarrow |x-2|=\frac{1}{3}$
$\Rightarrow$ soit $x-3=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{10}{3}$,
soit $-(x-3)=\frac{1}{3} \Rightarrow x-3=-\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{8}{3}$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=\frac{8}{3}$ et $x=\frac{10}{3}$.

7) $|x^2-1|=8 \Rightarrow$ soit $x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$,
soit $-(x^2-1)=8 \Rightarrow x^2-1=-8 \Rightarrow x^2=-7$, ce qui est impossible
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=-3$ et $x=3$.

8) $|x-3|-0{,}3=0{,}1 \Rightarrow |x-3|=0{,}4 \Rightarrow$ soit $x-3=0{,}4 \Rightarrow x=3{,}4$,
soit $-(x-3)=0{,}4 \Rightarrow x-3=-0{,}4 \Rightarrow x=2{,}6$
$\Rightarrow$ les solutions sont $x=2{,}6$ et $x=3{,}4$.

9) $2|-11-7x|-2=10 \Rightarrow 2|-11-7x|=12 \Rightarrow |-11-7x|=6$

$\Rightarrow$ soit $-11-7x=6 \Rightarrow -7x=17 \Rightarrow x=-\frac{17}{7}$,

soit $-(-11-7x)=6 \Rightarrow 11+7x=6 \Rightarrow 7x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{7}$

$\Rightarrow$ les solutions sont $x=-\frac{17}{7}$ et $x=-\frac{5}{7}$.

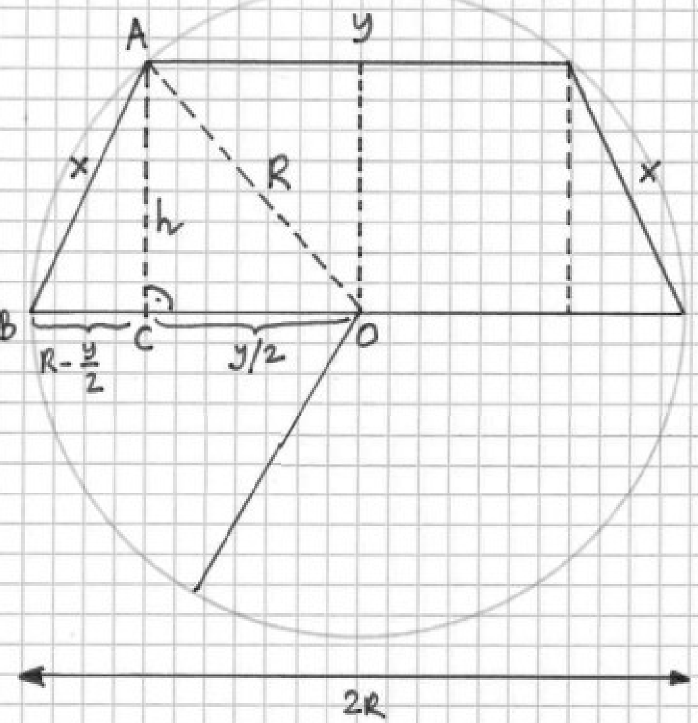
10) $\left|\frac{2-3x}{5}\right|=2 \Rightarrow$ soit $\frac{2-3x}{5}=2 \Rightarrow 2-3x=10 \Rightarrow -3x=8 \Rightarrow x=-\frac{8}{3}$,

soit $-\frac{2-3x}{5}=2 \Rightarrow \frac{3x-2}{5}=2 \Rightarrow 3x-2=10 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$

$\Rightarrow$ les solutions sont $x=-\frac{8}{3}$ et $x=4$.

Exercice 53

On a la situation suivante :



Dans le triangle rectangle OAC, on a, par le théorème de Pythagore, $R^2 = h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$
$\Rightarrow R^2 = h^2 + \frac{y^2}{4} \Rightarrow h^2 = R^2 - \frac{y^2}{4}$ (1).
Dans le triangle rectangle ABC, on a, par le théorème de Pythagore, $x^2 = h^2 + \left(R - \frac{y}{2}\right)^2$
$\Rightarrow x^2 = h^2 + R^2 - Ry + \frac{y^2}{4} \Rightarrow h^2 = x^2 - R^2 + Ry - \frac{y^2}{4}$ (2).
En combinant (1) et (2), on obtient $R^2 - \frac{y^2}{4} = x^2 - R^2 + Ry - \frac{y^2}{4}$
$\Rightarrow R^2 = x^2 - R^2 + Ry \Rightarrow Ry = 2R^2 - x^2 \Rightarrow y = 2R - \frac{x^2}{R}$.

Le périmètre du trapèze isocèle s'écrit alors $y + 2x + 2R = 2R - \frac{x^2}{R} + 2x + 2R =$
$= -\frac{x^2}{R} + 2x + 4R$.

C'est une parabole de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = -\frac{1}{R}$, $b = 2$ et $c = 4R$.
Elle atteint son maximum en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-\frac{1}{R})} = \frac{1}{1/R} = R$.

Avec $x = R$, le périmètre vaut alors $-\frac{R^2}{R} + 2R + 4R = -R + 6R = 5R$.