Algèbre et analyse

LES BRANCHES MAÎTRESSES DES MATHÉMATIQUES

« L'algèbre est la partie des mathématiques qui s'intéresse aux égalités exactes, tandis que l'analyse s'intéresse aux égalités approchées. » affirme le mathématicien contemporain Jean-Pierre Marco pour distinguer ces deux domaines qui s'interpénètrent et qui à eux deux couvrent ou fondent quasiment l'ensemble des mathématiques.
Née de l'étude des nombres et de leurs relations, l'algèbre classique en est venue à l'étude et à la résolution des équations (relation entre plusieurs nombres dont l'un au moins est inconnu), en relation avec la géométrie et l'analyse fonctionnelle ; l'algèbre moderne se consacre à l'étude des structures des ensembles, dont les ensembles de nombres sont des exemples, et rejoint par là la topologie analytique.
L'analyse est l'étude des fonctions et des ensembles de nombres, centrée autour des notions de continuité et de limite ; elle est en quelque sorte une extension de l'algèbre pour des objets particuliers, correspondant à ceux que la physique théorique manipule. Elle utilise les structures dégagées par l'algèbre pour mettre au point des méthodes d'approximation de nombres impossibles à connaître exactement.

ALGÈBRE

Origine

On pense que la notion de nombre a dû apparaître dès les premiers langages articulés. Les premiers textes écrits connus, issus de Mésopotamie ou de l'Indus, témoignent de la maîtrise d'un système de numération complexe. Dans un livre des Védas probablement rédigé entre le VIIIe et le IVe siècle avant J.-C. par Baudhayana se trouve une approximation de $\sqrt{2}$:

$$1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{34}\right)\right)=\frac{577}{408}\simeq 1{,}414215...$$

La précision (cinq décimales) de cette valeur approchée était alors suffisante pour la considérer comme exacte.

Notations algébriques modernes

L'approximation de Baudhayana est ainsi rédigée dans le manuscrit original : « mesure [du côté du carré dont on calcule la diagonale] et le tiers augmenté du quart diminué de sa trente-quatrième partie » : on voit que le langage courant trouve vite ses limites pour exprimer des rapports mathématiques…
Les développements actuels de l'algèbre (et de la géométrie) auraient été impossibles sans les notations algébriques modernes, dues à François Viète (1540-1603).

Notation algébrique des opérations arithmétiques

Les quatre opérations usuelles sont notées +, -, ×, ÷. Le résultat d'une addition s'appelle une somme, celui d'une soustraction s'appelle une différence, celui d'une multiplication un produit et celui d'une division un quotient.
Placé devant un nombre, le signe - désigne son opposé.
Les puissances sont construites à partir de la multiplication, comme la multiplication se construit à partir de l'addition. 3+3+3+3 se note 3×4 et 3×3×3×3 se note 3^4 – lire « 3 puissance 4 ». En particulier le produit d'un nombre par lui-même est sa deuxième puissance, appelée carré de ce nombre. La notation marque bien que les deux termes ne sont pas interchangeables.
La racine carrée d'un nombre se note à l'aide du symbole √, appelé radical. C'est le nombre positif dont le carré est égal au nombre de départ. Ainsi $\sqrt{2}$ est le nombre positif tel que $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$. Il existe de même des racines cubiques, quatrième, etc.
Lorsque le quotient de deux nombres n'a pas d'écriture décimale finie, on emploie pour le noter une écriture fractionnaire. Par exemple le quotient de 2 par 3 sera noté $\frac{2}{3}$

Emploi de lettres pour désigner des nombres

Identités

On se sert de lettres pour désigner des nombres afin d'écrire des identités, c'est-à-dire des égalités qui sont vérifiées par un « grand » ensemble de nombres. Ces identités traduisent des propriétés communes à l'ensemble des nombres considérés et sont utilisées par les algébristes pour démontrer d'autres propriétés ou pour simplifier certains calculs.
Par exemple, la somme de deux nombres ne dépend pas de l'ordre dans lequel ils se présentent : cette propriété (commutativité) de l'addition se traduit algébriquement ainsi : « $a+b=b+a$ quels que soient les nombres a et b ».
L'identité remarquable « $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ quels que soient les nombres a et b » permet ainsi, en remplaçant b par $-b$ (qui est toujours un nombre, et donc obéit à la même identité), d'obtenir :
• $(a+(-b))^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2$, d'où
• $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, qui est la seconde identité remarquable, valable quels que soient a et b.
• La troisième identité remarquable ne dérive pas des deux autres ; elle s'écrit : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
Ces trois identités servent à résoudre, en en simplifiant la forme, les équations du second degré.

Équations

Cette notation facilite la détermination des valeurs possibles d'une grandeur sur laquelle portent certaines contraintes. En désignant par une lettre (souvent x) la grandeur en question (l'inconnue), on traduit les données du problème par une égalité comportant cette lettre.
Cette égalité, appelée équation, permet, à l'issue de calculs plus ou moins compliqués, de trouver les valeurs possibles pour la grandeur (les solutions de l'équation).
Le « degré » de l'équation est la plus grande puissance de l'inconnue en jeu : une équation comprenant x^n est du n-ième degré.
Si le problème met en jeu plusieurs grandeurs, il apparaît des équations à plusieurs inconnues et des systèmes d'équations : un certain nombre d'équations ayant des inconnues en commun, qui ne peuvent donc pas être résolues indépendamment les unes des autres.

Équations quadratiques

Un exemple important est celui des équations du second degré à une inconnue (dites quadratiques), donc de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des coefficients (des nombres non précisés, mais considérés comme fixes) réels.
• Si $b^2-4ac>0$, l'équation a deux solutions (ou racines) distinctes

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

et

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

• Si $b^2-4ac=0$, les deux solutions se confondent en une racine double :

$$x=\frac{-b}{2a}$$

• Si $b^2-4ac<0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Ensembles algébriques

Ensembles de nombres

Les entiers naturels (0, 1, 2…) forment un ensemble noté **N**. Il est inclus dans celui des entiers relatifs (…,-2, -1, 0, 1, 2,…) noté **Z**. Celui-ci est à son tour contenu dans l'ensemble des décimaux, comme 2,5 ou – 0,001, noté **D**. Puis viennent, toujours par ordre d'inclusion, l'ensemble des rationnels (pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers relatifs) noté **Q** et celui des réels, noté **R**, qui enrichit **Q** des nombres irrationnels et est le plus petit corps complet (aucune suite réelle ne peut avoir de limite en dehors de **R**).
Les parties usuelles de ces ensembles sont identifiées par un « suffixe » précisant la restriction apportée : + pour restreindre aux nombres positifs, - pour les négatifs, * pour éliminer le zéro. On écrit ainsi **R**+ l'ensemble des réels positifs, **R*** réels différents de zéro, **R**+* réels strictement positifs…
L'ensemble des couples de réels, noté $\mathbf{R}^2$, est équivalent à l'ensemble des nombres complexes **C**, construit algébriquement autour du nombre « imaginaire » i, défini par l'équation $i^2=-1$.
C est le plus petit corps algébriquement clos (toute équation de degré n y possède n racines).

Notions sur les ensembles algébriques

Les opérations entre les éléments permettent de définir différentes structures d'ensemble, observées d'abord chez les ensembles de nombres mais répandues dans d'autres domaines (fonctions, notamment).

Groupe

C'est un ensemble sur lequel existe une opération notée comme l'addition (groupe additif) ou comme la multiplication (groupe multiplicatif), vérifiant :
• existence d'un élément neutre (noté 0 pour un groupe additif, 1 pour un groupe multiplicatif) : $0+a=a+0=a$ pour tout a (groupe multiplicatif : $1*a=a*1=a$).
• existence pour tout a d'un réciproque (noté $-a$ ou a^{-1}) : $a+(-a)=0$ ($a*a^{-1}=1$).
Si l'opération est commutative ($a+b=b+a$, $ab=ba$), le groupe est dit groupe commutatif, ou abélien.
Z muni de l'addition est un groupe abélien, de même que **Q*** muni de la multiplication.

Anneau

C'est un groupe commutatif noté additivement sur lequel est définie une multiplication vérifiant :
• associativité : $(a*b)*c=a*(b*c)$ pour tout a, b, c
• distributivité par rapport à l'addition : $a*(b+c)=a*b+a*c$ et $(a+b)*c=a*c+b*c$).
L'élément neutre de l'addition est absorbant pour la multiplication ($a*0=0*a=0$).
(**Z**, +, ×) est un anneau.

Corps

C'est un anneau dont tous les éléments non nuls (c'est-à-dire différents de l'élément neutre de l'addition) ont un élément réciproque pour la multiplication. Si de plus la multiplication est commutative, on parle de corps commutatif.
Q et **R** sont des corps commutatifs.

Espace vectoriel sur un corps commutatif donné

C'est un groupe abélien additif muni d'une loi externe multiplicative, associant les éléments du corps commutatif avec ceux du groupe commutatif.

Algèbre sur un corps commutatif

C'est un espace vectoriel sur un corps commutatif qui est muni d'une multiplication interne, c'est-à-dire qui permet de multiplier entre eux deux éléments du groupe additif. L'ensemble des polynômes à une inconnue à coefficients réels (somme de puissances de x affectées chacune d'un coefficient, de la forme $a+bx+cx^2+\ldots+zx^n$) est une algèbre sur **R**, commutative puisque le produit de deux polynômes est commutatif.

ANALYSE

Origine

L'analyse est apparue plus tardivement que l'algèbre. La notion de fonction est utilisée implicitement depuis les Babyloniens, mais c'est le Russe Leonhard Euler (1707-1783) qui, le premier, explicite ce concept.

Notion de fonction

Le concept de fonction ou application se définit dans le cadre formel de la théorie des ensembles. La notion se perçoit intuitivement à l'aide des notions de relation, d'action, d'espace et de temps qui y sont attachées.

Vocabulaire et notations

• Une fonction f est une mise en relation de deux ensembles **E** et **F**. À chaque élément x de **E** (ensemble de départ) correspond un et un seul élément y de **F** (ensemble d'arrivée). f est dite définie sur **E** et à valeurs dans **F**, ce qui se note $f: E \rightarrow F$.
• L'élément y correspondant à x s'appelle transformé, ou image, de x par f et se note $f(x)$ – lire « f de x ».
On dit que f associe à tout x l'élément $f(x)$ et on note $x \rightarrow f(x)$.
• Réciproquement, un élément x de **E** qui a pour image un élément y de **F** est un antécédent de y. De manière générale, tous les éléments de **F** n'ont pas d'antécédents, et ceux qui en ont peuvent en avoir plusieurs (si plusieurs éléments de **E** ont la même image).
• Si tous les éléments de **F** ont un antécédent, f est dite surjective.
• Si chaque élément de **F** admet au plus un antécédent, f est dite injective.
• Une bijection est une application injective et surjective : tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un antécédent et un seul. On peut alors définir l'application réciproque de f, notée f^{-1} : c'est la fonction qui à chaque élément de l'ensemble d'arrivée fait correspondre son antécédent, qui existe toujours et qui est unique puisque f est bijective.
Une bijection $f: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ est appelée permutation de l'ensemble E.

Plus de 2000 ans de recherches

Aristote

(384-322 av. J.-C.) *montre l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$ et des rationnels.*

François Viète

(1540-1603) *invente la notation algébrique.*

René Descartes

(1596-1650) *invente la géométrie analytique.*

Une rivalité **implacable**

Isaac Newton

(1642-1727) *et Gottfried Wilhelm Leibniz*

(1646-1716) *mettent au point simultanément mais indépendamment le calcul différentiel. Ils s'accuseront mutuellement de plagiat jusqu'à leur mort.*

• x, représentant n'importe quel élément de E, est appelé variable de f.

Les suites

Une suite est une fonction dont l'ensemble de départ est une partie I de l'ensemble N des entiers naturels. L'ensemble d'arrivée peut être R (on parle alors de suite réelle), un ensemble de fonctions (suite de fonctions), etc. Bien que les suites soient des fonctions, on use à leur propos d'un vocabulaire et de notations spécifiques.

• À la phrase « u est une fonction définie sur I et à valeurs dans R qui à un entier naturel n associe le nombre réel $u(n)$ » on préfère « u est une suite réelle indexée sur I de terme général u_n ».

• Les notations $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, n \to u_n$ sont remplacées par

$$u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

• Lorsque n désigne un entier naturel fixé, u_n est appelé terme de rang n ou n-ième terme de la suite u.

Composition de fonctions

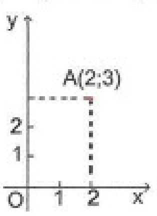
Étant données deux fonctions $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ et $g : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ telles que l'ensemble d'arrivée F de f soit inclus dans l'ensemble de départ G de g (ce qui se note $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$), la composée de f et g, notée $f\circ g$, est la fonction qui, à tout élément x de E, associe l'image par g de l'image par f de x :
$f\circ g\ (x) = g\ (f\ (x))$.
La condition $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ est nécessaire pour que tout élément de E ait une image par la composée.

Fonctions monotones

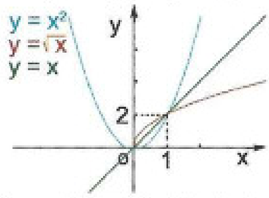
Si les ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction sont munis d'une relation d'ordre (généralement notée ≤ ou ≥ pour un ensemble de nombres, on peut définir les fonctions monotones, croissantes ou décroissantes.
Une fonction est dite croissante si les images d'éléments de l'ensemble de départ sont dans le même ordre que leurs antécédents. Elle est dite décroissante dans le cas où elle renverse cet ordre. Dans ces deux cas, elle est dite monotone.

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

L'ensemble R est usuellement représenté sous la forme d'une droite horizontale (« droite des réels ») sur laquelle sont placés un point O correspondant au nombre 0 et à sa droite un point I correspondant au nombre 1. Ensuite, tous les points de la droite correspondent à des nombres réels (le point situé au milieu de O et I correspond à 0,5, le symétrique de I par rapport à O à – 1, etc.).



La donnée de deux droites perpendiculaires similaires à la « droite des réels » (horizontale : axe des abscisses ; verticale : axe des ordonnées) permet de repérer chaque point du plan par un couple de réels. C'est le système des coordonnées cartésiennes.
On peut associer (bijectivement) à chaque point du plan un couple de nombres, abscisse et ordonnée, correspondant respectivement à la projection sur leur axe éponyme. Ce couple est appelé coordonnées du point. Le point d'intersection des deux axes, généralement nommé O, correspond au couple (0 ; 0), il est appelé origine du repère. L'ensemble du dispositif s'appelle repère du plan.



Dans un plan muni d'un tel repère la représentation graphique ou graphe d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ tels que $y = f(x)$. On a représenté ici les graphes des fonctions de base $x \to x$, $x \to x^2$ et $x \to \sqrt{x}$.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Le calcul différentiel et intégral, ou calcul infinitésimal, permet l'étude des variations des fonctions. Son importance en physique est primordiale.

Notion de limite

Limite d'une suite

Une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite convergente s'il existe un réel l tel que les termes u_n de la suite « s'approchent autant qu'on veut » de l pourvu que n soit « assez grand ». En traduisant en français la définition formelle logique, on obtient : « Étant donnée une distance, aussi petite soit-elle, il existe un rang à partir duquel les termes u_n se trouvent tous à une distance de l inférieure à la distance fixée ».
La suite est dite convergente vers l et le nombre l est appelé limite de la suite u ; on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

– lire « u converge vers l quand n tend vers plus l'infini ». Si la suite n'est pas convergente, elle est dite divergente.

Définition et convergence d'une série

Étant donnée une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on appelle série de terme général u la suite indexée sur N de terme général

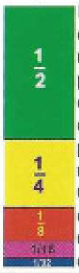
$$Sn = \sum_{i=0}^{i=n} u_i, \text{ où}$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + \ldots + u_n$$

désigne la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite u (somme partielle, somme à l'ordre n). La série est dite convergente si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ; sa limite est alors appelée somme de la série et se note

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$$

Un exemple de série convergente est la série de terme général $1/2n$ dont la somme est égale à 1 comme on peut le voir grâce à la figure suivante :



En plaçant dans un rectangle de surface égale à 1 des rectangles d'aires moitié, puis moitié de moitié, etc., on voit qu'« à la limite », tous les petits rectangles d'aires $1/2n$ recomposent le grand.
Ce résultat s'étend aux séries de terme général a^i où a est un réel différent de zéro tel que $-1 < a < 1$; ces séries convergent vers $\frac{1}{(1-a)}$.

Limite en un point d'une fonction

Une fonction $f : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ admet une limite en un point $x_0 \in \mathbf{E}$ si les images $f(x)$ de x par f se « rapprochent » d'un certain nombre l lorsque x se « rapproche » de $x0$, ce qui se note

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

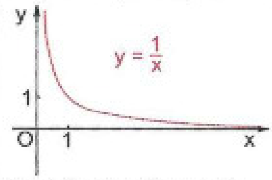
lire « f tend vers l quand x tend vers x indice zéro ».

Comportement asymptotique d'une fonction

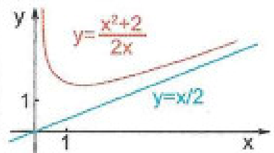
On dit qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admet une limite finie en $+\infty$ – lire « plus l'infini » – s'il existe un nombre réel l dont les images $f(x)$ de x par f se « rapprochent » de plus en plus lorsque x « grandit », ce qu'on note

$$\lim_{+\infty} f(x) = l$$

lire « f tend vers l en plus l'infini ».
On définit de même la limite de f en -∞.
Graphiquement, la courbe représentative de la fonction s'approche sans cesse d'une droite horizontale ($y = l$) à mesure que l'on s'éloigne de l'origine du repère.



Cette droite est appelée asymptote horizontale de la fonction. Ainsi la fonction inverse, définie sur l'ensemble R* des nombres réels non nuls par $x \to 1/x$, admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.



Dans le cas où les images $f(x)$ de x par f prennent des valeurs aussi « grandes » que l'on veut lorsque x « augmente » on dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Dans ce cas il arrive que f admette une asymptote oblique (si sa courbe s'approche sans cesse d'une droite oblique sans jamais l'atteindre), ou une courbe asymptote.

Calcul différentiel

Continuité d'une fonction

Une fonction $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ est dite continue en un point $x_0 \in \mathbf{I}$ si elle admet une limite en x_0 et que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

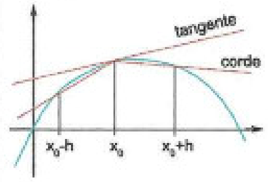
Une fonction est dite continue tout court quand elle est continue en tout point de son ensemble de départ. La courbe d'une telle fonction est une ligne continue au sens usuel.

Dérivabilité d'une fonction

Nous nous limiterons au cas où f est définie sur un intervalle de R (un ensemble de nombres réels x tels que $a < x < b$, où a et b sont des réels) noté $]\,a, b\,[$.
Le taux de variation d'une fonction $f :]\,a, b\,[\to \mathbf{R}$ en un point x_0 de $]\,a, b\,[$ est la fonction définie sur l'ensemble R* des nombres réels non nuls par

$$h \to \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

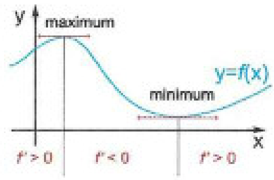
Graphiquement, c'est la pente d'une corde joignant les points $(x_0 ; f(x_0))$ et $(x_0 + h ; f(x_0 + h))$.
La fonction f est dite dérivable en x_0 si son taux de variation en x_0 admet une limite en zéro, cette limite est appelée dérivée de la fonction $(x_0 ; f(x_0))$ en x_0 et est notée $f'(x_0)$ – lire « f prime de x indice zéro ».



Graphiquement cela signifie que la courbe représentative de f admet une tangente au point $(x_0 ; f(x_0))$, de pente $f'(x_0)$.
Une fonction définie sur $]\,a, b\,[$ est dérivable si elle est dérivable en tout point de $]\,a, b\,[$; on appelle alors fonction dérivée de f la fonction f' définie sur $]\,a, b\,[$ par $x \to f'(x)$.
Dans la pratique, le calcul d'une fonction dérivée s'obtient en décomposant la fonction en sommes et produits de fonctions connues, dites fonctions de référence.

Application à l'étude d'une fonction

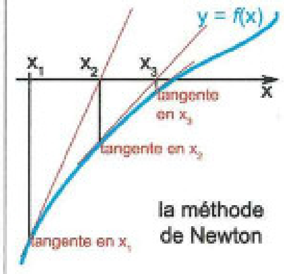
L'utilisation de la fonction dérivée, lorsqu'elle existe, permet de connaître les variations d'une fonction. Celle-ci est croissante sur les intervalles où sa dérivée est positive, et décroissante sinon. Les valeurs où la dérivée s'annule sont les abscisses de points de la courbe où la tangente est horizontale.



Lorsque la dérivée s'annule en changeant de signe, la variation de la fonction change de nature : si elle devient croissante après avoir été décroissante on dit qu'elle atteint un minimum local, et un maximum local en cas contraire.

Méthodes d'approximation

En algèbre, la résolution d'une équation donnée consiste à prouver l'existence de solution et à en déterminer le nombre ou la forme générale. Mais du point de vue analytique, cela ne suffit pas : on souhaite utiliser ce nombre, et pour cela obtenir une méthode permettant d'approcher le nombre d'aussi près qu'on le désire, le plus rapidement possible.
Le problème consiste donc, pour une équation donnée $f(x) = 0$, à trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant rapidement vers la solution.
Une première étape consiste à trouver deux nombres a_0 et b_0 tels que $f(a_0).f(b_0) < 0$ (l'une des images est négative et l'autre positive). Si la fonction est continue, cela assure l'existence de solution (car la courbe ne peut « sauter » l'axe des x) ; si elle est monotone, l'unicité et un premier encadrement de la solution entre a_0 et b_0.
La méthode la plus simple consiste, à chaque étape, à calculer l'image du milieu c_n de $[a_n ; b_n]$: si elle est du même signe que $f(a_n)$, la fonction s'annule donc entre c_n et b_n. On pose donc $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$ (si la fonction change de signe entre a_n et c_n, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$) et on itère l'opération jusqu'à obtenir la précision (différence entre a_n et b_n) désirée.
Cette méthode, appelée dichotomie (du grec *dikhotomia* couper en deux), est simple mais très lente. Quand la fonction est dérivable, il en existe de plus efficaces.



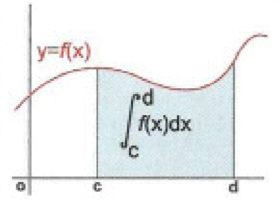
La méthode de Newton, ou méthode des tangentes, est l'une d'elles : partant d'un point arbitraire x_0, on calcule à chaque étape l'intersection de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_n avec l'axe des abscisses.
La tangente étant proche de la courbe, cette intersection est proche de celle de la courbe. En itérant ce procédé, on converge très vite vers la solution.
La différence des deux méthodes est appréciable : pour approcher $\sqrt{2}$ (avec la fonction $x \to x^2 - 2$), la méthode de Newton donne au quatrième pas

$$x_3 = \frac{577}{408}$$

(c'est l'approximation de Baudhayana) soit 5 décimales exactes ; la dichotomie au même stade ne fournit que l'encadrement : $1{,}375 < \sqrt{2} < 1{,}4375$: la première décimale n'est pas encore connue.

Calcul intégral

Intégrale d'une fonction



L'intégrale d'une fonction $f :]\,a, b\,[\to \mathbf{R}$ entre deux éléments c et d de $]\,a, b\,[$ correspond graphiquement à l'aire limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'abscisses c et d, avec la convention de signe suivante : si $c < d$, on compte positivement l'aire située au-dessus de l'axe des abscisses, négativement celle au-dessous (et l'inverse si $c > d$).
On la note

$$\int_c^d f(x)\,dx.$$

Primitive d'une fonction

Étant donnée une fonction $f : I \to \mathbf{R}$, on appelle primitive de f toute fonction $\mathbf{F} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ telle que $\mathbf{F}' = f$.
Les primitives d'une fonction sont identiques à une constante près.
Lorsqu'une fonction f admet une primitive F on a

$$\int_c^d f(x)\,dx = \mathbf{F}(d) - \mathbf{F}(c).$$