12

Algèbre linéaire

Sommaire

On nomme **algèbre linéaire** la branche des mathématiques qui se penche sur l'étude des espaces vectoriels (ou espaces linéaires), de leurs éléments les vecteurs, des transformations linéaires et des systèmes d'équations linéaires (théorie des matrices). L'algèbre linéaire permet de résoudre tout un ensemble d'équations dites linéaires utilisées non seulement en mathématiques ou en mécanique, mais dans de nombreuses autres branches comme les statistiques, les sciences naturelles ou les sciences sociales. Les espaces vectoriels forment aussi un outil fondamental pour les sciences de l'ingénieur et servent de base à de nombreux domaines dans la recherche opérationnelle.

12.1 Espace vectoriel

► **Définition**

Un **espace vectoriel** est un ensemble non vide E dans lequel sont définies deux opérations.

a. **Addition** : une loi de composition interne de $E \times E \to E$ qui associe pour chaque élément $(u; v)$ de $E \times E$ un unique élément of E noté $u + v$.

b. **Multiplication par des réels** : une loi de composition externe $\mathbb{R} \times E \to E$ qui associe pour chaque réel α et chaque vecteur v un vecteur noté $\alpha \cdot v$.

Les deux opérations doivent satisfaire, pour tous les vecteurs u, v et $w \in E$ et pour tout les nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les propriétés suivantes :

a. L'addition est associative : $u + (v + w) = (u + v) + w$

b. Il existe un élément neutre 0 dans E tel que $0 + u = u$ pour tout u dans E

c. pour tout v dans E, il existe un élément symétrique $-v$ dans E tel que $v + (-v) = 0$

d. L'addition est commutative : $u + v = v + u$

e. $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$

f. $1 \cdot v = v$

g. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

h. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires**.

On appelle **groupe** un ensemble E muni d'une loi de composition interne associative admettant un élément neutre et, pour chaque élément de l'ensemble, un élément symétrique (propriétés a. à d.).

► **Exemples :**

Dans les exemples qui suivent, il est fait mention de la dimension de l'espace vectoriel. Cette notion sera précisée plus loin.

a. Les vecteurs d'une droite, d'un plan ou de l'espace forment chaque fois un espace vectoriel. Ces espaces nommés V_1, V_2 et V_3 sont de dimension 1,2 et 3.

b. L'ensemble P_3 des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 avec l'addition conventionnelle est un espace vectoriel de dimension 4.

c. L'ensemble des polynômes est un espace vectoriel de dimension infinie.

d. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec l'addition et la multiplication par un nombre habituelles, est aussi un espace vectoriel. Sa dimension est infinie.

12.2 Matrices et calcul matriciel

► **Définition**
Une **matrice** est un tableau de nombres bordé de parenthèses.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} = (a_{i,j})$$

est une matrice de **type** nxm (n lignes et m colonnes).

12.2.1 Opérations sur des matrices

a. **Addition**

Les matrices de même type peuvent être additionnées entre elles : on les additionne élément par élément.

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,m}+b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,m}+b_{n,m} \end{pmatrix}$$

► **Exemple :**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 0 & 8 & 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -6 \\ -6 & 10 & 1,5 \end{pmatrix}$$

b. **Multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$**

Une matrice peut être multipliée par un scalaire .

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{1,1} & \cdots & \alpha \cdot a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{n,1} & \cdots & \alpha \cdot a_{n,m} \end{pmatrix}$$

► **Exemple :**

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 0 & 8 & -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -14 \\ 0 & 16 & -3 \end{pmatrix}$$

c. **Multiplication de deux matrices**

On multiplie deux matrices "lignes par colonnes".

Si A est une matrice de type $n \times m$ et B est une matrice de type $m \times p$ alors on peut définir la matrice produit $A \cdot B = AB$. Cela signifie que le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B . L'élément (i,k) de la matrice AB est la somme des produits des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par les éléments de la $k^{\text{ème}}$ colonne de B. En particulier, une matrice de type $n \times m$ peut multiplier un vecteur de dimension m.

En particulier, si A et B sont des matrices de type $n \times m$, on obtient

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot b_{1,1} + \cdots + a_{1,m} \cdot b_{n,1} & \cdots & a_{1,1} \cdot + b_{1,m} + \cdots + a_{1,m} \cdot b_{n,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} \cdot b_{1,1} + \cdots + a_{n,m} \cdot b_{n,1} & \cdots & a_{n,1} \cdot b_{1,m} + \cdots + a_{n,m} \cdot b_{n,m} \end{pmatrix}$$

De manière générale, si A une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times r$, on obtient

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{\text{type } n\times p} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix}}_{\text{type } p\times r} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix}}_{\text{type } n\times r}$$

avec $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{jk}$

▶ **Exemples :**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 19 & 43 & -19 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & 8 \\ -1,5 & 3 & 13 & -42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -27 \\ -8,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 1 \\ 7 & 10 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 40 & -4 \\ 16 & 17 & 22 & -2 \end{pmatrix}$$

▶ **Remarque :** De ce fait, l'ensemble des matrices de type défini $n \times m$ est un espace vectoriel. Sa dimension est $m \cdot n$.

12.2.2 Autres définitions

a. La matrice dont tous les éléments sont nuls est nommée **matrice nulle** et est notée O.

b. On appelle **matrice opposée** de A, que l'on note $-A$, la matrice dont les éléments sont les opposés des éléments de A.

c. La **matrice transposée** dela matrice A est notée ${}^tA$. Elle s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de A. Si A est de type nxm, alors ${}^tA$ est de type mxn.

d. Une matrice est **symétrique** si ${}^tA = A$.

e. Une matrice de type nxn est appelée **matrice carrée.**

f. Une matrice est **diagonale** si seule sa diagonale contient des éléments non nuls.

g. La **matrice unité** (de type nxn), notée I ou I_n, a tous ses éléments nuls à l'exception de sa diagonale qui contient des 1. ▶ **Exemple :** $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

h. La **trace** d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale principale. Si A est de type nxn, alors la trace de A est $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

12.3 Sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un **sous-espace vectoriel** s'il vérifie les propriétés des espaces vectoriels pour les mêmes opérations d'addition et de multiplication que l'espace vectoriel dont il fait partie.
Pour vérifier qu'un sous-ensemble est un sous-espace, il suffit de contrôler que :

a. Le vecteur nul appartient au sous-ensemble
b. La somme de vecteurs du sous-ensemble est dans le sous-ensemble (interne)
c. Les multiples des vecteurs du sous-ensemble sont dans le sous-ensemble

12.3.1 Générateur de sous-espaces vectoriels

A partir d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel, on peut construire le sous-espace constitué de l'ensemble de toutes les **combinaisons linéaires** des vecteurs donnés : il s'agit des sommes finies de multiples de ces vecteurs.

► **Exemple :** Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1(x) = \cos(x)$ et $f_2(x) = \sin(x)$ est formé des fonctions f de la forme $f(x) = a\cos x + b\sin x$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

12.4 Indépendance, base et dimension

Des vecteurs sont dits **indépendants** si aucun d'entre eux n'est combinaison linéaire des autres. Cette notion a déjà été étudiée en géométrie dans l'espace. Une **base** d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs indépendants qui engendre l'espace tout entier. La **dimension** d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs d'une base de cet espace.
Si une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est choisie, les **composantes** d'un vecteur $\vec{v}$ dans cette base sont les nombres $x_1, x_2, ...x_n$ tels que

$$\vec{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}$$

On note $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

12.5 Déterminant et règle de Cramer - Rappels

Dans V_2 muni d'une base orthonormée, la mesure de l'aire (signée) du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est

$$A = \left|\vec{a}\ \vec{b}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Ce calcul s'appelle **déterminant d'ordre 2**. Lorsqu'il vaut 0, on apprend que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles, c'est-à-dire linéairement dépendants.

Dans V_3 muni d'une base orthonormée, la mesure du volume (signé) du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est

$$V = \left|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \bullet \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

Il s'agit du **déterminant d'ordre 3**. Lorsque le déterminant est nul, les trois vecteurs sont dans le même plan (coplanaires), donc qu'ils sont linéairement dépendants. Dans un tel cas, ils ne forment pas une base de V_3.

Les déterminants d'ordre supérieur se calculent de la même manière et ont les mêmes propriétés. Soit A une matrice carrée. Alors le déterminant de A se note $\mathrm{Det}(A)$, ou encore $|A|$. La règle de Cramer permet de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

12.6 Applications linéaires

► **Définition**
Une **application linéaire** f est une application entre deux espaces vectoriels E et F telle que :

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \text{ et } f(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot f(\vec{u}) \ (\vec{u}, \vec{v} \in E, \lambda \in \mathbb{R})$$

► **Propriété :**

$$f(0_E) = 0_F$$

Autrement dit, une application linéaire envoie toujours le neutre de E sur le neutre de F.

► **Exemples :**

a. La dérivation (notée D) est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions réelles dérivables dans l'espace des fonctions réelles. En effet, soient f et g deux fonctions. Alors...

$$D\left(f(x)+g(x)\right) = \left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x) = D\left(f(x)\right) + D\left(g(x)\right) \text{ et}$$
$$D\left(\lambda \cdot f(x)\right) = \left(\lambda f(x)\right)' = \lambda \cdot f'(x) = \lambda \cdot D\left(f(x)\right)$$

b. La symétrie axiale, la rotation, l'homothétie et la projection sont des applications linéaires de V_2 dans V_2.

12.6.1 Matrice d'une transformation linéaire

► **Théorème :**
Par la définition des applications linéaires, la connaissance de l'image des vecteurs de base de E permet de trouver l'image de tout vecteur de E.

Preuve :

Soit $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ les n vecteurs de base de l'espace vectoriel E. On suppose connus les images de ces vecteurs par l'application linéaire $f : E \to F$.
Ainsi $f(\vec{e_1}), .., f(\vec{e_n})$ sont connus.
Considérons $\vec{v} = x_1\vec{e_1} + ... + x_n\vec{e_n}$ un vecteur de E.
Son image par f est

$$f(\vec{v}) = f(x_1\vec{e_1} + ... + x_n\vec{e_n}) = f(x_1\vec{e_1}) + ... + f(x_n\vec{e_n}) = x_1 f(\vec{e_1}) + ... + x_n f(\vec{e_n})$$

Ainsi $f(\vec{v})$ est calculable à partir des images des vecteurs de base, quel que soit $\vec{v} \in E$. □

► **Exemple :** Rotation d'un angle α dans V_2. On considère la base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
L'image de $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par cette rotation est $\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$. L'image de $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par cette rotation est $\vec{e_2}' = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$.

L'image du vecteur $\vec{v} = x\cdot\overrightarrow{e_1}+y\cdot\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est alors $\overrightarrow{v'} = x\cdot\overrightarrow{e_1}'+y\cdot\overrightarrow{e_2}' = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

On peut également écrire $\overrightarrow{v'}$ l'image de $\vec{v}$ par la rotation d'angle α à l'aide d'un produit matriciel :

$$\overrightarrow{v'} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \vec{v}$$

M est la **matrice de la rotation** d'angle α. On va dorénavant toujours associer une matrice aux applications linéaires.

Soit une application linéaire $f : E \to F$.
Les colonnes de la matrice M_f associée à l'application linéaire f sont les images des vecteur de base de E exprimé dans une base de F.
Lorsque $E = F$, c'est-à-dire lorsque l'application linéaire va d'un espace vectoriel dans lui-même, on choisit évidemment la même base au départ et à l'arrivée.

Soit $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une base de E et $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_m})$ une base de F, alors la matrice de l'application linéaire f, notée M or M_f, est la matrice $n \times m$ suivante :

$$M_f = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\overrightarrow{e_1}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

► **Exemples :**

a. Dans $\mathbb{R}^2$, avec la base standard $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, we considère f une rotation de 90° autour de l'origine. L'image de $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{e_2}' = -\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi la matrice de f est $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avec la base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1})$, on obtient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b. La matrice d'une rotation d'angle α autour de l'origine est $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c. Soit une transformation linéaire $f : E \to F$, $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une base de E, $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_m})$ une base de F, et M la matrice de la transformation.

Comment déterminer l'image du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + v_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + ... + v_n \cdot \overrightarrow{e_n}$?

On sait que $f(\vec{v}) = v_1 \cdot f(\overrightarrow{e_1}) + v_2 \cdot f(\overrightarrow{e_2}) + ... + v_n \cdot f(\overrightarrow{e_n})$. On obtient alors

$$M\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\overrightarrow{e_1}) & \vdots & f(\overrightarrow{e_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\cdot f\left(\overrightarrow{e_1}\right)+v_2\cdot f\left(\overrightarrow{e_2}\right)+...+v_n\cdot f\left(\overrightarrow{e_n}\right) = f(\vec{v}) = \overrightarrow{v}'$$

▶ **Exemple :**

Le calcul ci-dessous transforme un vecteur de dimension 4 en un vecteur de dimension 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & 8 \\ -1,5 & 3 & 13 & -42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14-5-11+0 \\ 35-20-66+24 \\ -10.5-15+141-126 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -27 \\ -8.5 \end{pmatrix}$$

12.6.2 Opérations avec des applications linéaires

a. **Addition**

Si f et g deux applications linéaires de E vers F, alors l'application linéaire $f+g$ définie par : $f+g : \vec{v} \mapsto f(\vec{v}) + g(\vec{v})$ est encore une application linéaire. La matrice de $f+g$ est la somme des matrices de f et de g.

▶ **Exemple :**

La somme d'une rotation de 30° (f) et d'une rotation de 10° (g) est une application linéaire . Sa matrice est :

$$M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 10° & -\sin 10° \\ \sin 10° & \cos 10° \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cos 20° \cos 10° & -2\sin 20° \cos 10° \\ 2\sin 20° \cos 10° & 2\cos 20° \cos 10° \end{pmatrix} = 2\cos 10° \cdot \begin{pmatrix} \cos 20° & -\sin 20° \\ \sin 20° & \cos 20° \end{pmatrix}$$

Il s'agit de la composition d'une rotation de 20° et d'une homothétie de rapport $k = 2\cos 10°$.

> **Attention**
> La somme de deux rotations **ne signifie pas** la **composition** de deux rotations ! C'est la raison pour laquelle la réponse n'est pas
> *"une rotation de* 30°*" + "une rotation de* 10°*" = "une rotation de* 40°".

b. **Multiplication par un nombre**

Si f de E vers F est linaire, alors $m \cdot f : E \to F$, défine par $\vec{v} \mapsto m \cdot f(\vec{v})$ est aussi une application linéaire. La matrice de mf relativement aux bases choisies de E et de F s'obtient en multipliant la matrice de f par par le scalaire m.

c. **Composition**

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires, alors l'application $g*f : E \to G$ définie par $\vec{v} \mapsto g(f(\vec{v}))$ est aussi linéaire.

Soient M_f la matrice de l'application f de la base $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_m})$ de E dans la base $\left(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_n}\right)$ de F, et M_g la matrice de l'application g de la base $\left(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_n}\right)$ de F dans la base $(\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g}_p)$ de G.

Les colonnes de la matrice de l'application $g*f$, soit M_{g*f},sont les images des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ par la composition $g*f$. La i^{ème} colonne de M_{g*f} contient ainsi $g(f(\overrightarrow{e_i}))$. $f(\overrightarrow{e_i})$ est la i^{ème} colonne de M_f. Cette image est obtenue par le produit matriciel $M_g \cdot \overrightarrow{f(\overrightarrow{e_i})} = M_g M_f \overrightarrow{e_i}$. Finalement, la matrice M_{g*f} est la matrice du produit $M_g M_f$.

▶ **Exemples :**

a) Soit $V_2 \xrightarrow{f} V_3 \xrightarrow{g} V_2$, avec $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à f, et $M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ celle associée à g. L'application linéaire $g * f$ a pour matrice associée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 25 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Soit l'application f : rotation de 30° autour de l'origine de V_2 dans V_2 et g : une homothétie de centre O et de facteur 4. Chercher la matrice des compositions $g * f$ et $f * g$.

La matrice associe à f est $F = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -0,5 \\ 0,5 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

La matrice associe à g est $G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

La composition $g * f$ (rotation puis homothétie) est décrite par la matrice

$$M_{g*f} = GF = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -0,5 \\ 0,5 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

La composition $f * g$ (homothétie puis rotation) est décrite par la matrice

$$M_{f*g} = FG = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -0,5 \\ 0,5 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple, l'ordre n'importe pas !

c) L'algèbre linéaire nous permet de retrouver des formules connues de trigonométrie. En effet, les matrices

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{M}_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

décrivent des rotations d'angle α et β autour de l'origine. La composition de ces deux rotations, peu importe l'ordre, est une rotation d'angle $\alpha + \beta$ autour de l'origine. La matrice associée à cette rotation est

$$M_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Le produit de M_α par M_β et alors égal à la matrice $M_{\alpha+\beta}$.

$$\begin{aligned} M_{\alpha+\beta} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta & \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, par identification, on obtient sans surprise
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ et $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

12.7 Valeurs et vecteurs propres

Soit f une application linéaire de V dans V.
On s'intéresse aux vecteurs qui ont la même direction que leurs images. Il s'agit des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{v'}//\vec{v}$, c'est-à-dire tels que $\vec{v'} = f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

► **Définitions**

a. Un nombre λ est **une valeur propre** de l'application linéaire f s'il existe un vecteur non nul tel que $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$.

b. Si λ est **une valeur propre** de f, alors les vecteurs $\vec{v}$ tels que $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ sont des **vecteurs propres** de valeurs propre λ. On les appelle vecteurs λ-propres.

c. L'application f est **diagonalisable** si une base de vecteur propre de f existe. Une matrice de f dans cette base est toujours un matrice diagonale.

d. Le **sous-espace propre** V_λ de V correspondant à la valeur propre λ contient l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ qui satisfont $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$.

► **Exemple :** La matrice associée à une transformation linéaire contient, en colonne, les images des vecteurs de la base. La valeur des éléments de la matrice dépend donc de la base utilisée. Le choix stratégique de la base de l'espace vectoriel permet d'avoir une matrice avec laquelle les calculs sont plus aisés. Les matrices les plus agréables pour les calculs matriciels sont les matrices diagonales
Si la transformation f (de V_2 dans V_2) possède les valeurs propres λ_1 et λ_2, de vecteurs propres $\vec{v_1}$, respectivement $\vec{v_2}$, alors

$$\text{la matrice } F \text{ de la transformation } f \text{ exprimée dans la base } (\vec{v_1}; \vec{v_2}) \text{ est } F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si la base utilisée contient des vecteurs propres, on dit qu'on travaille avec une base propre.

Resultat Le sous-espace propre V_λ de V est un sous espace vectoriel de V.
Preuve :

Soit E_λ le sous-espace correspondant à la valeur propre λ, et $\vec{v_1} \cdots \vec{v_n}$ des vecteurs propres associés à λ. On a alors

$$f(\vec{v_1}) = \lambda \cdot \vec{v_1} \ , \ \cdots \ , f(\vec{v_n}) = \lambda \cdot \vec{v_n}$$

Premièrement comme $f(\vec{0}) = \vec{0}$, on sait que $\vec{0} \in E_\lambda$. De plus,

$$f(k \cdot \vec{v_i}) = k \cdot f(\vec{v_i}) = k \cdot \lambda \cdot \vec{v_i} = \lambda \cdot (k \cdot \vec{v_i})$$

Donc $k \cdot \vec{v_i} \in V_\lambda$, pour i $\in \{1, \cdots, \mathrm{n}\}$. Enfin, pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$

$$f(\vec{v_i} + \vec{v_j}) = f(\vec{v_i}) + f(\vec{v_j}) = \lambda \cdot \vec{v_i} + \lambda \cdot \vec{v_j} = \lambda \cdot (\vec{v_i} + \vec{v_j})$$

Ainsi $\vec{v_i} + \vec{v_j} \in E_\lambda$. □

Théorème Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.
Preuve :

Comme E_{λ_1} est une sous espace vectoriel de E, une combinaison linéaire de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ $(\in E_{\lambda_1})$ génère un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_1. Ainsi si $\vec{v_1}$ est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_2, il n'appartiendra pas à E_{λ_1}. □

On déduit de ce résultat que f a au maximum n valeurs propres. Ainsi, si $\dim(E) = n$ et f a n valeurs propres différentes, alors tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

► **Exemples :**

a. Identité : $f(\vec{v}) = \vec{v}$, valeur propre $\lambda = 1$
b. Homothétie de rapport k : $f(\vec{v}) = k \cdot \vec{v}$, valeur propre $\lambda = k$
c. Symétrie d'axe a dans le plan , valeur propres $\lambda_{1,2} = \pm 1$
d. Rotation de $\alpha°$ dans le plan, pas de valeurs propres.
e. Projection sur un axe a dans le plan, valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$
f. Projection sur un plan π dans l'espace, valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ (sous espace de dimension 2 pour la valeur propre λ_2)

12.7.1 Recherche des valeurs propres (dans le cas 3x3)

Soit M la matrice associée à l'application linéaire f. Les valeurs propres λ de cette application sont les scalaires tels qu'il existe au moins un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ satisfaisant $\vec{v'} = M\vec{v} = \lambda\vec{v}$.
Comme $\vec{v} = I\vec{v}$, il s'agit de résoudre $M\vec{v} = \lambda I\vec{v}$, soit $M\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0}$, soit $(M - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}$.
Il s'agit d'un système de 3 équations linéaires à 3 inconnues :
Posant $A = M - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système devient :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

Un tel système d'équations possède aucune, une ou une infinité de solutions. Dans le cas présent, nous devons déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède une solution non nulle ($\vec{0}$ est une solution mais inintéressante !)
En fait si $\vec{v}$ est un vecteur λ-propre, tous ses multiples le seront aussi. On cherche donc λ de telle sorte que le système ait une infinité de solutions. Le nombre de solutions d'un système, ce résultat est dû à Cramer, est déterminé par la valeur du **déterminant principal** du système, à savoir par $D = \text{Det}(A)$. Il faut que $\text{Det}(A) = \text{Det}\,(M - \lambda I) = 0$. L'expression $\text{Det}\,(M - \lambda I) = 0$ est appelée **équation caractéristique** (ou encore **polynôme caractéristique**).
Cas général :
Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{31} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$. Alors $M - \lambda I = \begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & m_{31} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} - \lambda \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \text{Det}\left(\begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & m_{31} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} - \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & m_{31} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'un polynôme dont le degré est égal à la dimension de l'espace vectoriel considéré. Dans notre cas, le polynôme est de degré 3.Ses zéros sont les valeurs propres de l'application f. Comme tout polynôme de degré 3 possède au moins un zéro réel, les applications de $V_3 \to V_3$ peuvent avoir 1, 2 ou 3 valeurs propres.Une fois les valeurs propres déterminées, il faut résoudre $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pour trouver les vecteurs propres.

12.8 Inverse d'une application linéaire

Soit $f : E \to E$ une application linéaire, M la matrice associée à f.

► **Définition** On dit que f est inversible s'il existe une application linéaire f^{-1} telle que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$, l'identité. La matrice associée a l'application f^{-1} est M^{-1} et vérifie $M^{-1} \cdot M = M \cdot M^{-1} = I$ avec I la matrice identité.

► **Exemples :**

a. **Matrice inverse d'une symétrie.**
Nous savons vu que $s : \vec{v} \to \vec{v'}$ la **symétrie** par rapport à une droite (dans V_2 ou V_3) ou par rapport à un plan (dans V_3) est son propre inverse. Nommons S sa matrice. En effet, la composition de $\vec{v} \xrightarrow{s} S\vec{v} = \vec{v'} \xrightarrow{s} S\vec{v'} = S\,(S\vec{v}) = S^2\vec{v} = \vec{v''}$ envoie $\vec{v}$ sur $\vec{v}$. Il s'agit donc de l'identité. On a donc $S^2 = S \cdot S = I$ et donc $S = S^{-1}$.

b. **La projection** sur un axe où plan, quelle que soit la direction de projection n'est pas une application linéaire inversible.
Dans une base propre la matrice de projection est
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Pour trouver son inverse, il faut résoudre
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ce qui est impossible. Remarquons que $\det(P) = 0$.

a. **Inverse du matrice** 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b. **Critère d'inversibilité**
Une matrice, quel que soit son type, n'est inversible que si son déterminant est non nul.

c. **Résultat non prouvé.**
La matrice inverse de A est
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\!\left((-1)^{i+j}\, D_{ij}\right)$$
où D_{ij} est le déterminant d'ordre $n-1$ que l'on obtient en supprimant dans A la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

► **Exemple :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A valant 2, la matrice est inversible. Construisons la matrice inverse A^{-1}.

$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ $\quad D_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$ $\quad D_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$D_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\quad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -30$ $\quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 20$ $\quad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$

En faisant attention aux signes alternés et à la transposition, on obtient :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\!\begin{pmatrix} +6 & -(-2) & +(-30) \\ -(-4) & +2 & -20 \\ +(-2) & -1 & +11 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,{}^t\!\begin{pmatrix} 6 & 2 & -30 \\ 4 & 2 & -20 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -0,5 \\ -15 & -10 & 5,5 \end{pmatrix}$$

Contrôlons notre résultat en vérifiant que $AA^{-1} = I$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -0,5 \\ -15 & -10 & 5,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12.9 Interprétation du déterminant d'une matrice

Le déterminant est un indicateur d'indépendance linéaire de n vecteurs à n dimensions. L'interprétation géométrique en est en effet : l'aire (signée) du parallélogramme construit sur $\vec{a}$et $\vec{b}$(dans V_2), ou le volume (signé) du parallélépipède construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$et $\vec{c}$ (dans V_3) . Si le déterminant est nul, les vecteurs sont linéairement dépendants.

Le déterminant de la matrice F associée à l'application linéaire f indique le rapport entre un volume et son volume image. Les vecteurs de base forme un objet de "volume" 1. En effet : $\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \cdots & \vec{e_n} \end{vmatrix} = 1$. Les images des vecteurs de base décrivent un objet dont le volume est $\begin{vmatrix} \vec{e_1'} & \vec{e_2'} & \cdots & \vec{e_n'} \end{vmatrix} = \operatorname{Det}(F)$.

Propriété 1 : La matrice $A \cdot B$ de la composition de deux applications a un déterminant qui satisfait :

$$\operatorname{Det}(AB) = \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(B).$$

(preuve par considération des rapports de volumes, ou vérification algébrique...)

Propriété 2 : En particulier,

$$\operatorname{Det}\left(AA^{-1}\right) = \operatorname{Det}(I) = 1 = \operatorname{Det}(A)\cdot\operatorname{Det}\left(A^{-1}\right) \Rightarrow \operatorname{Det}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)}$$

(Des permutations de vecteurs résulte un changement du signe du déterminant. Autrement dit, par exemple dans V_3, $\operatorname{Det}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = -\operatorname{Det}\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$.)

Propriété 3 : $\operatorname{Det}({}^tA) = \operatorname{Det}(A)$. Pratiquement cela signifie qu'on peut développer le calcul du déterminant en ligne comme en colonne.

► **Exemple :** Matrice inverse de A

Soit la matrice donnée $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$. Cherchons son inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix}$.

Il s'agit de résoudre

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A, B et C s'obtiennent via $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ce système linéaire d'équations linéaire se résout à l'aide de la règle de Cramer.
Appelons $D = \text{Det}\,(A)$. Il doit être différent pour que le système soit résoluble.
on obtient,

$$a' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & f & i \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix}}{D} \qquad c' = \frac{\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}}{D}$$

$$b' = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & g \\ b & 0 & h \\ c & 0 & i \end{vmatrix}}{D} = \frac{-\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix}}{D} \qquad \ldots$$

Finalement, on a bien

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)}\,{}^t\!\left((-1)^{i+j}\,D_{ij}\right)$$

12.10 Changement de base

Soit F la matrice associée à f dans la base standard $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$. Exprimée dans la base propre $(\overrightarrow{p_1}, ..., \overrightarrow{p_n})$, la matrice F' associée à f est diagonale. Elle contient les valeurs propres sur sa diagonale. Soit l'application p qui envoie la base propre sur la base standard. L'image du premier vecteur propre $\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_p$ est $\overrightarrow{p_1}$, ... et finalement celle de $\overrightarrow{p_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_p$ est $\overrightarrow{p_n}$. La matrice de passage P associée à p est donc composée des vecteurs propres. Comme P contient des vecteurs formant une base, son déterminant est non nul. On peut donc déterminer P^{-1}, la matrice du passage de la base standard à la base propre. Considérons la composition :

$$\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{vecteur exprimé}\\ \text{dans la base standard}}} \xrightarrow[p^{-1}]{} \underbrace{\overrightarrow{v_p}}_{\substack{\vec{v}\text{ exprimé dans}\\ \text{la base propre}}} \xrightarrow[f]{} \underbrace{\overrightarrow{v'_p}}_{\substack{\text{image de }\vec{v}\text{ exprimé}\\ \text{dans la base propre}}} \xrightarrow[p]{} \underbrace{\overrightarrow{v'}}_{\substack{\text{image de }\vec{v}\text{ dans}\\ \text{la base standard}}}$$

Matriciellement, on obtient

$$\vec{v} \xrightarrow[p^{-1}]{} P^{-1}\vec{v} \xrightarrow[f]{} F'P^{-1}\vec{v} \xrightarrow[p]{} PF'P^{-1}\vec{v} = \overrightarrow{v'}$$

Finalement

$$\overrightarrow{v'} = F\vec{v} = PF'P^{-1}$$

ainsi,

$$F = PF'P^{-1} \text{ ou encore } F' = P^{-1}FP$$

► **Exemple :**

Soit l'application linéaire f de vecteurs propres $\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ dont la matrice dans la base propre est $F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice de passage p (de propre à standard) est

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Comme $\mathrm{Det}(P) = 2$, la matrice est inversible. On obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2,5 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix}$$

En isolant $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dans le système $\begin{cases} \overrightarrow{p_1} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{p_2} = 5\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} \end{cases}$, on obtient $\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2} \\ \overrightarrow{e_2} = -2,5\overrightarrow{p_1} + 1,5\overrightarrow{p_2} \end{cases}$.
Nous lisons les matrices P et P^{-1} dans ces systèmes. Finalement,

$$F = PF'P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2,5 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2,5 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7,5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

En partant de la matrice $F = \begin{pmatrix} -4 & 7,5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, on peut réobtenir les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ en résolvant $\mathrm{Det}\,(F - \lambda I) = 0$.

$$p(\lambda) = \mathrm{Det}\,(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 7,5 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(7-\lambda) - (-4)\cdot 7,5 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Les solutions de $p(\lambda) = 0$ sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Il reste alors à résoudre $F\vec{v} = \vec{v}$ et $F\vec{v} = 2\vec{v}$ pour obtenir des vecteurs propres $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$ du début de l'exemple.

12.11 Théorème de la dimension

▶ **Définition** L'ensemble des vecteurs dont l'image est le vecteur nul est appelé le **noyau** de l'application linéaire et il se note $\mathrm{Ker}(f)$ (de l'allemand *Kern*).

> Soit une application linéaire $f : E \to F$.
> a. Le $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
> b. L'ensemble des vecteurs qui sont images (noté $\mathrm{Im}(f)$) est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve :

a. Tout d'abord $f(\vec{0}) = \vec{0}$ est trivialement satisfaite. Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2} \in \mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire tels que $f(\overrightarrow{v_1}) = f(\overrightarrow{v_2}) = \vec{0}$. On montre facilement que $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ et que $\lambda \cdot \overrightarrow{v_1}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(f)$.

b. $\vec{0} \in Im(f)$ car il est l'image de $\vec{0}$. Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in Im(f)$. Ils sont images de deux vecteurs de E, disons $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. On montre facilement que $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ et $\lambda \cdot \overrightarrow{w_1}$ sont aussi éléments de $Im(f)$. □

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel V de dimension n sur lui-même. La matrice F qui lui est associée est donc carrée de type nxn.

> **Théorème**
> Soit $f : V \to V$ une application linéaire, avec $\dim(V) = n$. Alors
> $$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V) = n$$

Preuve :

Considérons que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = r$$

Le noyau possède alors une base $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_r}\}$ de r vecteurs indépendants tels que $f(\overrightarrow{u_i}) = \overrightarrow{0}$. Considérons que $\dim(Im(f)) = s$. L'image possède alors une base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, ..., \overrightarrow{w_s}\}$de s vecteurs indépendants tels que chacun est l'image d'un vecteur :$f(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{w_i}$.
Il faut montrer que

$$\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_s}\} \text{ est une base de } V.$$

Notons tout d'abord qu'aucun $\overrightarrow{v_i}$ n'est combinaison linéaire de $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_r}\}$ car

$$f(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{w_i} \neq \overrightarrow{0}$$

Ces $r+s$ vecteurs sont donc bien indépendants, et de ce fait $r+s \leq n$. Montrons que tout vecteur de V peut s'exprimer comme combinaison linéaire de ces $r+s$ vecteurs.
Soit $\vec{w} \in Im(f)$, image de $\vec{v}$. Comme $\vec{w}$ appartient à l'espace image, on peut l'écrire comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_i}$:$\vec{w} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot \overrightarrow{v_i}$.On a

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot \overrightarrow{w_i} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot f(\overrightarrow{v_i}) = \sum_{i=1}^{s} f(\alpha_i \overrightarrow{v_i}) = f\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \overrightarrow{v_i}\right) \text{ et } \vec{w} = f(\vec{v})$$

Alors $\vec{v} - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \overrightarrow{v_i}$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ car

$$f\left(\vec{v} - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \overrightarrow{v_i}\right) = f(\vec{v}) - f\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \overrightarrow{v_i}\right) = \vec{w} - \vec{w} = \vec{0}$$

De ce fait, $\vec{v} - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \overrightarrow{v_i}$ s'écrit comme combinaison linéaire des $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_r}\}$. Donc $\vec{v} - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \overrightarrow{v_i} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \overrightarrow{u_i}$.
Il en résulte que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \overrightarrow{u_i} + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \overrightarrow{v_i}$$

□

12.12 Affinités

Un **espace affine** est un ensemble de points associés à un espace vectoriel. L'association est telle qu'à chaque paire (A, B) de points correspond un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
La correspondance doit satisfaire les propriétés suivantes :

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b. Si O désigne un point fixé de l'espace affine, alors l'application $P \to \vec{v} = \overrightarrow{OP}$ est bijective.

Dans un espace affine on peut définir les **coordonnées** d'un point relativement à un **repère**. Une **affinité** φ est une application entre deux espaces affines qui associe à chaque point P de E un point $P' = \varphi(P)$ de E'. Cette application doit être telle que la correspondance $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}$ soit une application linéaire.

► **Exemples :**

a. **Translation dans le plan** La translation du vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ s'exprime par :

$$(x; y) \to (x'; y') = (x + x_t; y + y_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

b. **Projection verticale** sur un plan horizontal situé à hauteur 1 L'image de $P(x; y; z)$ est $P'(x; y; 1)$. Ainsi

$$(x; y; z) \to (x'; y'; z') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c. L'inversion par rapport à un cercle du plan n'est pas une affinité Pour mémoire :

$$(x; y) \to (x'; y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}; \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

12.12.1 Expression d'une affinité

Un repère de chacun des espaces affines E et E' étant choisi, on peut alors déterminer les coordonnées de l'image P' de P à l'aide du calcul matriciel. En effet, on sait que l'affinité $\vec{v} = \overrightarrow{OP} \xrightarrow{\varphi} \vec{v'} = \overrightarrow{O'P'}$ est donnée par une matrice M telle que $\vec{v'} = M\vec{v}$.
Alors pour trouver les coordonnées de P', on cherche le vecteur $\overrightarrow{OP'}$:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OO'} + M\overrightarrow{OP}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{OP'} = M \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$$

12.12.2 Invariants (points fixes)

Ils s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overrightarrow{OO'}$$

Ils permettent d'interpréter l'affinité : équation de l'axe de symétrie, coordonnée du centre de rotation, d'homothétie.
Si Ω est un point fixe de l'affinité, c'est-à-dire si $\Omega' = \Omega$, alors $\overrightarrow{\Omega P'} = M \cdot \overrightarrow{\Omega P}$.
Et alors on a

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega P'} = M \cdot \overrightarrow{\Omega P} + \overrightarrow{O\Omega} = M \cdot \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O\Omega}\right) + \overrightarrow{O\Omega} = M \cdot \overrightarrow{OP} + \underbrace{(I - M)\overrightarrow{O\Omega}}_{\overrightarrow{OO'}}$$

▶ Exemple : L'image d'un point par une symétrie axiale
On travaille dans un repère métrique. L'axe de symétrie est $a : x - 3y + 1 = 0$.
Pour trouver l'image d'un vecteur par une symétrie axiale, seule la direction de l'axe importe. Son décalage n'a pas d'influence sur le résultat.
La direction de l'axe est $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur perpendiculaire à l'axe est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
L'image P' d'un point P s'obtient on considérant la perpendiculaire p à a passant par P, puis l'intersection I de p et a qui permet finalement d'obtenir P' via $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PI}$.

La droite p a la direction $\vec{n}$ et contient $P(x_0; y_0)$

$$p : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 - 3\lambda \end{cases}$$

L'intersection I de a et p est :

$$(x_0 + \lambda) - 3(y_0 - 3\lambda) + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-x_0 + 3y_0 - 1}{10}$$

P' est le point de p obtenu est prenant λ double de celui qui permet de passer de P à I. Ainsi $\lambda = \frac{-x_0+3y_0-1}{5}$ et

$$P' : \begin{cases} x = x_0 + \frac{-x_0+3y_0-1}{5} = \frac{4x_0+3y_0-1}{5} = \frac{4}{5}x_0 + \frac{3}{5}y_0 - \frac{1}{5} \\ y = y_0 - 3 \cdot \frac{-x_0+3y_0-1}{5} = \frac{3x_0-4y_0+3}{5} = \frac{3}{5}x_0 - \frac{4}{5}y_0 + \frac{3}{5} \end{cases}$$

Matriciellement on a :

$$(x; y) \rightarrow (x'; y') = \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{5}; \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}\right) = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

L'image de l'origine est $O'\left(\frac{-1}{5}; \frac{3}{5}\right)$.
La matrice $M = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'affinité. Il s'agit également de la matrice de la symétrie vectorielle.

12.12.3 Inventaire des affinités

Les affinités du plan sont les symétries axiales (autour d'un axe donné), les rotations (d'angle et de centre donné), les homothéties (de centre et de facteur données), les translations (de vecteur donné), les projections (sur un axe donné, dans une direction donnée) ainsi que les affinités axiales (d'axe, de direction et de facteur donnés).

12.12.4 Propriétés des affinités

A deux dimensions : L'image d'une droite est une droite (exceptionnellement un point).
A trois dimensions : L'image d'un plan est un plan (exceptionnellement une droite, voire un point).

> La composition de deux affinités est une affinité.

Preuve :

Soit $\varphi_1 : \overrightarrow{OP'} = M\overrightarrow{OP} + \vec{v_1}$ et $\varphi_2 : \overrightarrow{OP'} = N\overrightarrow{OP} + \vec{v_2}$.
La composition $\varphi = \varphi_2 * \varphi_1$ décrit la transformation :

$$P \xrightarrow{\varphi_1} P' = \varphi_1(P) \xrightarrow{\varphi_2} P'' = \varphi_2(P') = \varphi_2(\varphi_1(P)) = \varphi(P)$$

Matriciellement :

$$\overrightarrow{OP''} = N\overrightarrow{OP'} + \vec{v_2} = N\left(M\overrightarrow{OP} + \vec{v_1}\right) + \vec{v_2} = NM \cdot \overrightarrow{OP} + N\vec{v_1} + \vec{v_2}$$

Il s'agit bien d'une affinité. Sa matrice est NM et son décalage est $N\vec{v_1} + \vec{v_2}$. □

L'inverse d'une affinité (pour autant qu'elle existe) est aussi une affinité.

Preuve :
Soit $\varphi : \overrightarrow{OP'} = M\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$.
Si M est de déterminant non nul (pas de projection), alors la matrice M est inversible et l'affinité inverse φ^{-1} est définie.

$$\overrightarrow{OP'} = M\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'} \rightarrow \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OO'} = M\overrightarrow{OP} \rightarrow M^{-1}\left(\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OO'}\right) = \overrightarrow{OP}$$
$$\varphi^{-1} : \overrightarrow{OP} = M^{-1}\overrightarrow{OP'} - M^{-1}\overrightarrow{OO'}$$

□

L'interprétation géométrique d'une affinité est possible par la connaissance des invariants (points fixes) ainsi que des vecteurs propres de la matrice associée.

12.13 Transformations orthogonales

▶ **Définition**
Si V désigne un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, les applications linéaires $f : V \rightarrow V$ qui conservent le produit scalaire sont appelées orthogonales.

f orthogonale $\Leftrightarrow \quad f(\vec{a}) \bullet f(\vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{b}$, pour toute paire de vecteurs

Par linéarité, il suffit que les produits scalaires entre les vecteurs de base soient conservés. Comme le produit scalaire permet de calculer les longueurs et les angles, une transformation orthogonale est une transformation qui conserve les longueurs et les angles.

▶ **Exemples :**
Dans le plan, les rotations et syméries axiales sont des transformations orthogonales. Dans l'espace, les rotations et les symétries sont orthogonales.

12.13.1 Propriétés

a. L'image, par une transformation orthogonale, d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Preuve :

$$\vec{e_i} \bullet \vec{e_i} = 1 \;\Rightarrow\; \vec{e_i'} \bullet \vec{e_i'} = 1 \quad \text{et } \vec{e_i} \bullet \vec{e_j} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{e_i'} \bullet \vec{e_j'} = 0$$

□

b. Le déterminant d'une transformation orthogonale vaut ± 1.

Preuve :

Le déterminant de la matrice dans une base orthonormée représente le volume signé du parallélépipède construit sur les images des vecteurs de base. Comme ces images forment une base orthonormée, le déterminant vaut ± 1.

□

c. Les valeurs propres d'une transformation orthogonale sont 1 ou -1.
Preuve :
$\vec{v}$ est $\lambda-$propre $\vec{v'} = \lambda \cdot \vec{v}$. Comme les normes sont conservées,

$$\left\|\vec{v'}\right\| = \|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$$

D'où, $\lambda = \pm 1$.

□

d. L'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée. (M orthogonale $\Leftrightarrow$ $M^{-1} = {}^tM$)
Preuve :
Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

associée une transformation orthogonale. Ainsi $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ forme une base orthonormée.

$${}^tM \cdot M = \begin{pmatrix} \cdots & \vec{v_1} & \cdots \\ \cdots & \vec{v_2} & \cdots \\ \cdots & \vec{v_3} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v_1} \bullet \vec{v_1} & \vec{v_1} \bullet \vec{v_2} & \vec{v_1} \bullet \vec{v_3} \\ \vec{v_2} \bullet \vec{v_1} & \vec{v_2} \bullet \vec{v_2} & \vec{v_2} \bullet \vec{v_3} \\ \vec{v_3} \bullet \vec{v_1} & \vec{v_3} \bullet \vec{v_2} & \vec{v_3} \bullet \vec{v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

e. Les sous-espaces propres de valeurs propres différentes (d'une matrice orthogonale) sont orthogonaux.
Preuve :
Soit $\vec{p_1}$ un vecteur 1-propre et $\vec{p_2}$ un vecteur -1-propre (seules valeurs propres possibles). Alors $\vec{p_1'} = \vec{p_1}$ et $\vec{p_2'} = -\vec{p_2}$. Comme la transformation est orthogonale,

$$\vec{p_1} \bullet \vec{p_2} = \vec{p_1'} \bullet \vec{p_2'} = \vec{p_1} \bullet (-\vec{p_2}) = -\vec{p_1} \bullet \vec{p_2}$$

Il en découle que les vecteurs propres sont orthogonaux. □

12.13.2 Interprétation des transformations orthogonales du plan

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale. Alors,

a. $\det(M) = \pm 1 = ad - bc$ c. $c^2 + d^2 = 1$
b. $a^2 + b^2 = 1$ d. $ac + bd = 0$

De b) et c), nous tirons :

$$b = \pm\sqrt{1-a^2} \text{ et } d = \pm\sqrt{1-c^2}$$

Dans d)

$$ac + \pm\sqrt{1-a^2} \cdot \pm\sqrt{1-c^2} = 0 \; ac = ac \pm \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2} = 0$$

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\frac{c^2}{1-c^2} = \frac{a^2}{1-a^2}c^2(1-a^2) = a^2(1-c^2)c^2(1-a^2+a^2) = a^2$$
$$c^2 = a^2 c = \pm a.$$

En conclusion,

> la matrice M peut être de la forme $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a^2+b^2 = 1$. On peut poser $a = \cos\varphi$ et $b = \sin\varphi$ pour garantir $a^2+b^2 = 1$.

Type 1 Les matrices de type $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ décrivent des rotations d'angle φ, et ne possèdent pas de valeurs/vecteurs propres.
En effet,

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\varphi\cdot\lambda + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \lambda^2 - 2\cos\varphi\cdot\lambda + 1$$

Le discriminant vaut $\Delta = 4\cos^2\varphi - 4$. Il est négatif sauf lorsque φ est multiple de 180°. Si φ est multiple de 180°, alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et la transformation possède un sous-espace propre de dimension 2.

Type 2 Les matrices de type $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ décrivent des symétries axiales dont l'axe fait un angle $\frac{\varphi}{2}$ avec l'horizontale. Cherchons ses valeurs et vecteurs propres !

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi-\lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi-\lambda \end{vmatrix} = -\cos^2\varphi + \lambda^2 - \sin^2\varphi = \lambda^2 - 1.$$

Les valeurs propres sont (comme attendu) : $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

a. Les vecteurs 1-propres sont :

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y = x \rightarrow (\cos\varphi - 1)\cdot x = -\sin\varphi\cdot y \\ \sin\varphi\cdot x - \cos\varphi\cdot y = y \rightarrow (\cos\varphi + 1)\cdot y = \sin\varphi\cdot x \end{cases}$$

Soit

$$\frac{x}{y} = \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi - 1} = \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi-1}\cdot\frac{\cos\varphi+1}{\cos\varphi+1} = \frac{-\sin\varphi\,(\cos\varphi+1)}{\cos^2\varphi - 1} = \frac{-\sin\varphi\,(\cos\varphi+1)}{-\sin^2\varphi} = \frac{\cos\varphi+1}{\sin\varphi}$$

Direction 1-propre : $\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 1+\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, c'est la direction de l'axe.

Ce vecteur est parallèle à $\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$ L'axe (on le savait) fait un angle $\frac{\varphi}{2}$ avec Ox.

b. Les vecteurs -1-propres sont :

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y = -x \rightarrow (\cos\varphi + 1) \cdot x = -\sin\varphi \cdot y \\ \sin\varphi \cdot x - \cos\varphi \cdot y = -y \rightarrow (\cos\varphi - 1) \cdot y = \sin\varphi \cdot x \end{array} \right.$$

Soit

$$\frac{x}{y} = \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi + 1} = \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi + 1} \cdot \frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi - 1} = \frac{-\sin\varphi(\cos\varphi - 1)}{\cos^2\varphi - 1} = \frac{-\sin\varphi(\cos\varphi - 1)}{-\sin^2\varphi} = \frac{\cos\varphi - 1}{\sin\varphi}$$

Direction 1-propre : $\overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} -1 + \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Ceux deux vecteurs propres sont bien perpendiculaires !

12.13.3 Interprétation des transformations orthogonales de l'espace

Comme les valeurs propres d'une matrice orthogonale F, de type 3x3, sont les solutions d'un polynôme de degré 3, nous sommes sûr qu'il y a au moins une valeurs propre. D'autres part, par les considérations précédentes, cette première valeur propre est +1 ou -1.Notons λ_1 cette valeur propre et $\overrightarrow{p_1}$ un vecteur propre unité associé.
Construisons alors la base orthonormée ($\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$). Pour cela nous choisissons $\overrightarrow{v_2} \perp \overrightarrow{v_1}$ et unité, puis posons $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.
Dans cette nouvelle base, la matrice de F a la forme :

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & .. & .. \\ 0 & .. & .. \\ 0 & .. & .. \end{pmatrix}$$

Comme F est orthogonale, nous pouvons écrire :

$$F = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & .. & .. \\ 0 & .. & .. \end{pmatrix}$$

La matrice carrée de type 2x2 (formée de $\cdots$) est aussi orthogonale, il s'agit donc soit d'une rotation, soit d'une symétrie axiale dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{p_1}$.
Ainsi quatre cas peuvent se produire :

Cas 1 : Rotation autour de $\overrightarrow{p_1}$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Cas 2 : Symétrie planaire (plan généré par $\overrightarrow{p_1}$et axe de la sym.)

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Cas 3 : Rotation autour de $\overrightarrow{p_1}$ et symétrie planaire de plan $\perp \overrightarrow{p_1}$.

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Cas 4 : Rotation de 180° autour d'un axe (axe de la sym.)

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$