Analyse

6.1 Quelques rappels

6.1.1 Domaine de définition et ensemble des images

Une **fonction** de A vers B est une relation qui associe à chaque élément de A exactement un élément de B, appelé image. Le **domaine de définition** d'une fonction $f(x)$, noté D ou D_f, est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie, c'est-à-dire tels que $f(x)$ existe. **L'ensemble d'arrivée**, ou **ensemble des images**, d'une fonction est l'ensemble des valeurs que prend la fonction f. Il s'agit en fait de $f(D)$.

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

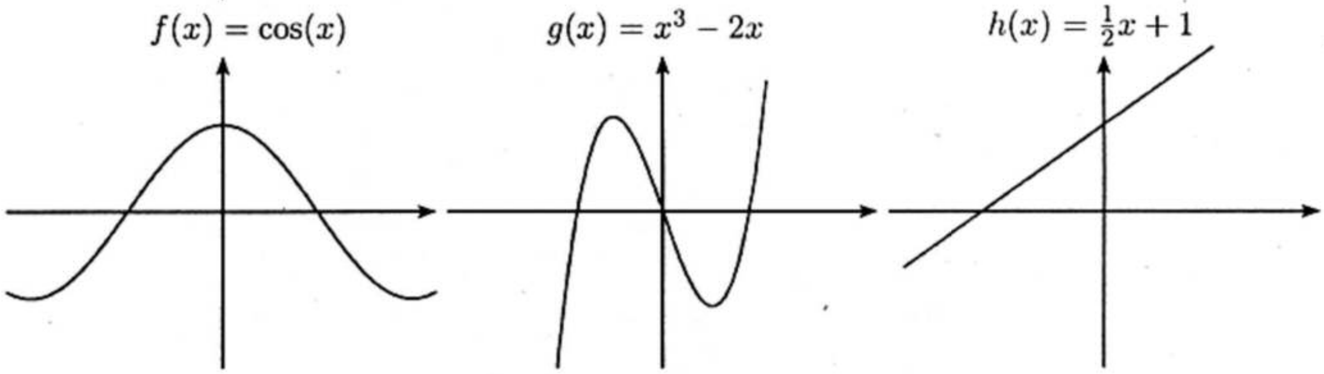
► **Exemples :**

a. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ Le domaine est $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ car la division par 0 est impossible. L'ensemble-image est $f(D) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, car $y = \frac{1}{x-1}$ n'est jamais égal à 0.

b. $f(x) = \sqrt{x-4}$ $D = [4; \infty[$ car la racine carrée d'un nombre négative n'est pas définie. $f(D) = [0; \infty[$ car une racine carrée est positive ou nulle.

6.1.2 Parité d'une fonction

Les fonctions paires et les fonctions impaires sont des fonctions particulières qui satisfont des propriétés de symétrie importantes à connaître lorsqu'on doit les représenter graphiquement.
Une fonction dont le graphe est symétrique par rapport à l'axe des y est une **fonction paire**. Pour cela, il faut que $f(-x) = f(x)$ pour tous les x de son domaine D_f. Par exemple, $f(x) = \cos(x)$ est une fonction paire car $\cos(-x) = \cos(x)$.



Une fonction dont le graphe est symétrique par rapport à l'origine est appelée **fonction impaire**. Pour cela, il faut que $f(-x) = -f(x)$ pour tous les x de son domaine D_f. Par exemple, $g(x) = x^3 - 2x$ est une fonction impaire car $-(x^3 - 2x) = (-x)^3 - 2(-x)$. **Evidemment la plupart des fonctions ne sont ni paire, ni impaire !** Par exemple, $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$ est une fonction ni paire ni impaire.

6.1.3 Zéros, exclus et signe d'une fonction

Dans le but de tracer le graphe de la fonction, on s'intéresse à ses intersections avec l'axe des x, qu'on appelle zéro(s) ou racine(s) de la fonction.
Les **zéros** de la fonction f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Les **exclus** d'une fonction sont les x pour lesquels la fonction n'est pas définie. Ils sont déterminés en même temps que le domaine de définition. Le **signe** d'une fonction peut être "+", "0" ou "-". On établit le tableau des signes de la fonction après avoir déterminé ses zéros.

▶ **Exemple :**

$f(x) = \frac{4-x}{3x-1} = \frac{g(x)}{h(x)}$. On résout alors

a. $g(x) = 0 \Rightarrow x = 4$, la fonction $f(x)$ admet $I(4;0)$ comme unique zéro.

b. $h(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$, on a $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$

		$\frac{1}{3}$		4	
$g(x)$	+	+	+	0	−
$h(x)$	−	0	+	+	+
$f(x)$	−	$\varnothing$	+	0	−

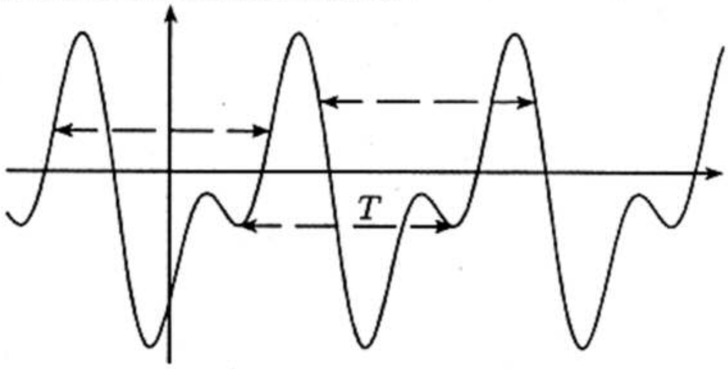
6.1.4 Fonctions périodiques et période d'une fonction

Parmi les fonctions rencontrées jusqu'ici il en est dont le graphe "se répète" : il s'agit des fonctions périodiques. Les exemples connus sont les fonctions trigonométriques ainsi que les combinaisons de ses fonctions.
La période d'une fonction est le plus petit nombre T tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tous les x de D_f.
Graphiquement T est la largeur d'une bande verticale du graphe qu'il suffit de connaître pour connaître tout le graphe.
Une combinaison linéaire de fonctions périodiques forme une fonction qui reste périodique. Sa période est le $PPMC$ des périodes des fonctions présentes dans la combinaison linéaire.

▶ **Exemple :**

a. Voici ci-contre le graphe d'une fonction périodique. Sa période T est représentée par les flèches.

b. La période de $f(x) = \cos(x)$ est $T = 2\pi$ car $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ quel que soit x.



6.2 Limites

6.2.1 Notion de limites

La notion de limite permet de d'écrire le comportement d'une fonction lorsque son argument x s'approche d'une valeur donnée a, ou de l'infini. Elle permettra de définir la continuité d'une fonction et sa dérivée. La notion de limite est liée au concept de l'infini, ce qui rend sa compréhension parfois difficile.

▶ **Exemple :**

On considère la fonction $f(x) = \frac{3x^2-12}{x-2}$ dont le domaine est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ car $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 2$ (division par 0). Calculons alors la valeur de $f(x)$ pour des valeurs de x proches de 2.

x	1.9	1.99	1.999	$\cdots$	2	$\cdots$	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	11.7	11.97	11.997	$\cdots$	$\varnothing$	$\cdots$	12.003	12.03	12.3

Nous constatons que les valeurs de $f(x)$ sont proches de 12 lorsque x est proche de 2. On dit que $f(x)$ tend vers 12 lorsque$x$ tend vers 2. On dit également que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2 est égale à 12. Ceci se note $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 12$.

6.2.2 Définitions

a. On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et dit "*la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a vaut L*" si la valeur de $f(x)$ peut être rendue arbitrairement proche de L en choisissant x suffisamment **proche** de a, **mais différent** de a.

▶ **Exemples :**

- $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 3 = 1$
- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \overset{x \neq 3}{=} \lim\limits_{x \to 3}(x+3) = 6$

b. L'expression $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ signifie que la valeur de $f(x)$ peut être rendue arbitrairement grande (en valeur absolue) en choisissant x suffisamment proche de a mais différent de a..

▶ **Exemples :**

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -4} \frac{-3}{(x+4)^2} = -\infty$

c. Si la valeur de $f(x)$ s'approche de plus en plus d'une valeur L lorsque x s'approche de l'infini (tend vers $+\infty$ ou $-\infty$), nous écrivons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.
Si la limite est la même en $+\infty$ qu'en $-\infty$, on écrit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$.

▶ **Exemples :**

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x-2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{2-x} = -1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \sin(x)$ n'existe pas !

d. On écrit $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ et lit "*la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a par la gauche (par valeurs inférieures) vaut L*".
De la même manière, on écrit $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ la limite à droite (par valeurs supérieures) .

▶ **Exemples :**

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

▶ **Théorème :**

La limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe que si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

▶ **Exemples :**

a. Soit $f(x) = \sqrt{x-2}$. $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ mais $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{x-2}$ n'existe pas pour des questions de domaine. Ainsi $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x-2}$ n'existe pas.

b. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ est indéfinie On écrit parfois $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$

c. Soit $f(x) = \frac{1}{|x|}$. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

6.2.3 Propriétés des limites et résultats importants

a. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

b. $\lim\limits_{x\to a}[\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

c. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

d. $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$

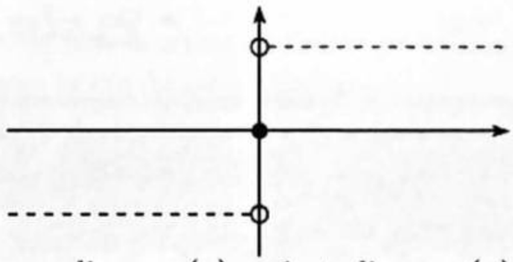
d. Si n est un nombre pair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$

e. Si n est un nombre impair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, $n \in \mathbb{N}$

6.2.4 Fonctions définie par morceaux

Voici le graphe de la fonction $\text{sgn}(x)$. Elle est définie par morceaux de la manière suivante :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \text{-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Cette fonction n'est pas continue. Dans notre cas, on a $\lim\limits_{x\to0^+} \text{sgn}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \text{sgn}(x) = -1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to0} \text{sgn}(x)$ n'existe pas. Pourtant $f(0) = 0$ existe !

Toute fonction qui comporte des valeurs absolues et/ou la fonction sgn est une fonction définie par morceaux.

► **Exemples :**

- $f(x) = |x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{sinon} \end{cases}$
- $g(x) = |x^2+3x-4| = |(x+4)(x-4)| = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x \in]-\infty;-4] \\ -x^2-3x+4 & \text{si } x \in]4;1] \\ x^2+3x-4 & \text{si } x \in]1;\infty[\end{cases}$
- Il est facile d'inventer une fonction définie par morceaux ! $h(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x \in]-\infty;8[\\ 32 & \text{si } x = 8 \\ \sin(x) & \text{si } x \in]8;21[\\ x^3-4 & \text{si } x \in]21;\infty[\end{cases}$

6.2.5 Limite à l'infini de polynômes

La limite à l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré. En effet les autres monômes peuvent être négligés en regard du plus grand de tous.

► **Exemples :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 - 3x + 9 = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x^5 + 12x^4 - x + 5 = \lim\limits_{x\to-\infty} 7x^5 = -\infty$

6.3 Continuité

6.3.1 Définition

Une fonction continue est une fonction telle qu'une faible variation de la valeur de x induit une faible variation de la valeur de y. Lorsqu'un petit changement de la valeur de x peut produire un saut dans la valeur de l'image y, la fonction est appelée fonction discontinue.

Mathématiquement, la fonction f est continue en $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Une fonction est **continue sur un intervalle** si elle est continue en toute valeur de l'intervalle. Très simplement, on reconnaît une fonction continue à son graphe : il a pu être tracé sans lever le crayon ! Il y a ni trou, ni saut !

► **Exemples :**

a. $f(x) = 2x^2$ est **continue** sur $\mathbb{R}$.

b. **Toutes les fonctions polynomiales** sont continues sur $\mathbb{R}$.

c. **Autres fonctions continues sur** $\mathbb{R}$:$y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = |x|$, $y = 10^x$,...

d. $g(x) = \frac{1}{x}$ est **discontinue** en $x = 0$.
Il y a en effet un saut dans le graphe : c'est l'asymptote verticale. Cette fonction est par contre continue sur $\mathbb{R}^*$.

e. **Autres fonctions discontinues :** $y = \tan(x)$, fonctions rationnelles,...

6.3.2 Types de discontinuités

Il y a une discontinuité en chaque valeur exclue du domaine de définition de la fonction. Les types de discontinuités sont : une asymptote verticale (AV), un trou ou un saut.

► **Exemples :**

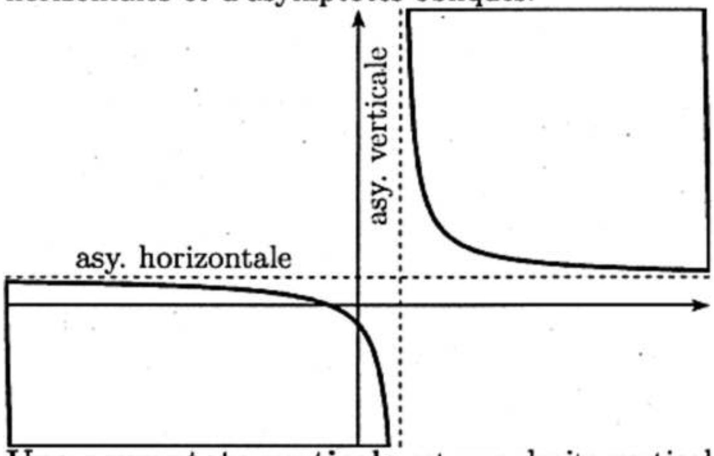
a. $f(x) = \frac{1}{x}$ a une asymptote verticale en $x = 0$.

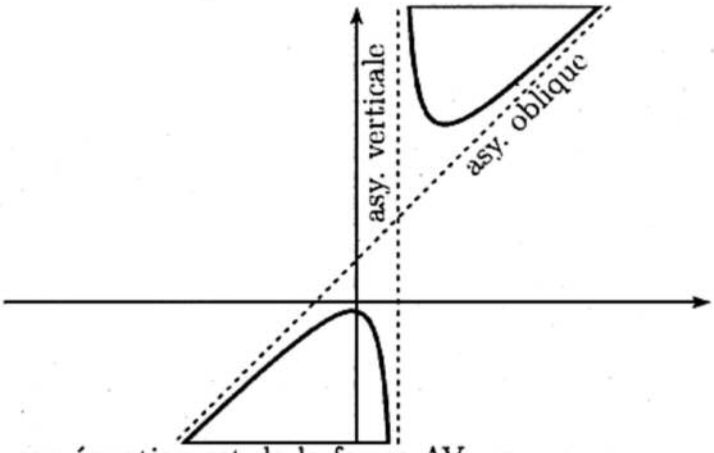
b. $f(x) = \text{sgn}(x)$ a un saut en $x = 0$.

c. $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$ a un trou en $x = 0$. Le trou a les coordonnées $(0; 2)$

6.4 Comportement asymptotique des fonctions rationnelles

De manière générale, le comportement asymptotique d'une fonction $y = f(x)$ est l'étude de la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers les exclus ainsi que vers les bords de son domaine, généralement $\pm\infty$. Cette étude nous renseigne sur la présence d'asymptotes verticales, de trous, de sauts, d'asymptotes horizontales et d'asymptotes obliques.





Une asymptote verticale est une droite verticale : son équation est de la forme AV : $x = a$.
Une asymptote horizontale est une droite horizontale : son équation est de la forme AH : $y = h$.
Une asymptote oblique est une droite : son équation est de la forme AO : $y = mx + h$.

Dans un premier temps, nous allons étudier le comportement asymptotique des fonctions rationnelles.

6.4.1 Trou ou asymptote verticale

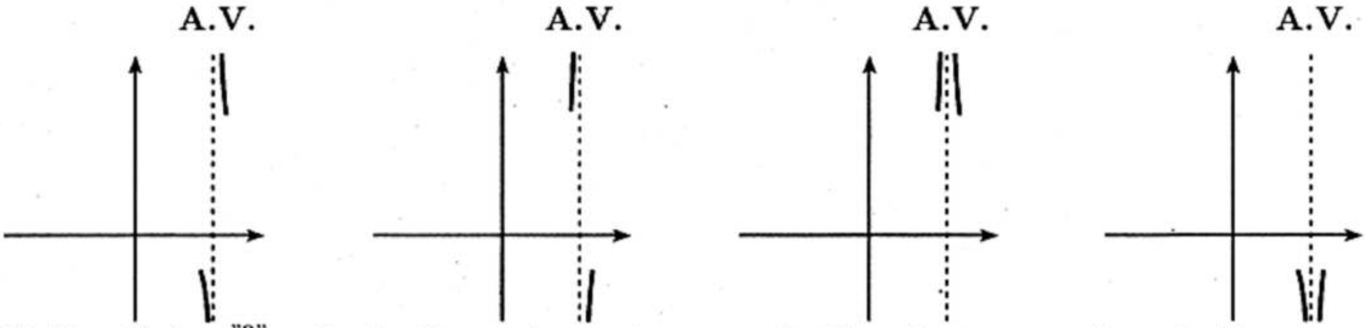
Si x_e est une valeur exclue du domaine de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, cela signifie qu'il y a une discontinuité dans le graphe en $x = x_e$. Est-ce un trou ou une asymptote verticale ?

En remplaçant x par x_e dans la fonction $f(x)$, on peut obtenir soit $\frac{"0"}{0}$, soit $\frac{"\not 0"}{0} = \frac{"A"}{0}$.

- Si $\lim\limits_{x\to x_e} f(x) = \frac{"\cancel{0}"}{0} = \frac{"A"}{0}$, il y a une asymptote verticale AV : $x = x_e$, car

$$\lim_{x\to x_e} f(x) = \frac{"\cancel{0}"}{0} = \frac{"A"}{0} = \pm\infty"$$

Le tableau des signes de la fonction (ou les limites gauche et droite), nous indique le comportement de la fonction proche de l'asymptote. Il y a quatre cas.



- Si $\lim\limits_{x\to x_e} f(x) = \frac{"0"}{0}$, cela signifie que le numérateur et le dénominateur sont factorisables.
Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, alors on peut écrire $f(x) = \frac{(x-x_e)\cdot p_1(x)}{(x-x_e)\cdot q_1(x)}$ et le simplifier en $f(x) \overset{x\neq x_e}{=} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$
Ensuite nous calculons la limite $\lim\limits_{x\to x_e} f(x) = \lim\limits_{x\to x_e} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$. Il y a trois cas possibles.

  a. $\lim\limits_{x\to x_e} f(x) = \lim\limits_{x\to x_e} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \frac{"\cancel{0}"}{0}$. C'est une asymptote verticale.

  b. $\lim\limits_{x\to x_e} f(x) = \lim\limits_{x\to x_e} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \frac{"0"}{0}$. Il faut refactoriser !

  c. $\lim\limits_{x\to x_e} f(x) = \lim\limits_{x\to x_e} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = nb$. C'est un trou ! Coordonnées : $(x_e; nb)$

► **Exemples :**

- $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x-12}{2x^2-9x+4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{3(x-4)}{2(x-4)(x-0.5)} \overset{x\neq 4}{=} \lim\limits_{x\to 4} \frac{3}{2(x-0.5)} = \frac{3}{7}$. Le graphe a donc un trou en $(4; \frac{3}{7})$

6.4.2 Asymptote horizontale ou oblique ou aucune d'entres elles

Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \ldots + p_2x^2 + p_1x + p_0}{q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_2x^2 + q_1x + q_0}$, où p et q sont des polynômes de degré m et n, respectivement.
Nous devons considérer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ pour déterminer s'il y a une asymptote horizontale ou oblique.
Comme

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \ldots + p_1x + p_0}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_1x + q_0} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} p_m x^m}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} q_n x^n} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p_m x^m}{q_n x^n}$$

le résultat dépend exclusivement des degrés des polynômes !
On a donc,

- Si $m < n$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{p_m x^m}{q_n x^n} = 0$ Asymptote horizontale : $y = 0$

  ► **Exemple :** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3-x^2+7x+8}{2x^5-17x^4+6} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3}{2x^5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{2x^2} = 0$

- Si $m = n$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{p_m x^m}{q_n x^n} = \frac{p_m}{q_n}$ Asymptote horizontale : $y = \frac{p_m}{q_n}$

  ► **Exemple :** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-3x+9}{-2x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{-2} = -2$

- Si $m > n$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{p_m x^m}{q_n x^n} = \infty$

  ► **Exemple :** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x^5+12x^4-x+5}{8x^4-2x^3+19} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x^5}{8x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x}{8} = -\infty$

En résumé,

Asymptote horizontale : Il y a une asymptote horizontale lorsque $m \leq n$. Si $m = n$, le graphe de la fonction f admet l'asymptote horizontale $y = 0$.
Asymptote oblique : Il y a une asymptote oblique lorsque le degré du numérateur excède celui du dénominateur de 1, c'est-à-dire si $m = n + 1$.
Autres cas : Lorsque $m > n+1$, il n'y a ni asymptote horizontale, ni asymptote oblique. L'asymptote dans ce cas est une courbe de degré $m - n$.

► **Exemple :** La fonction

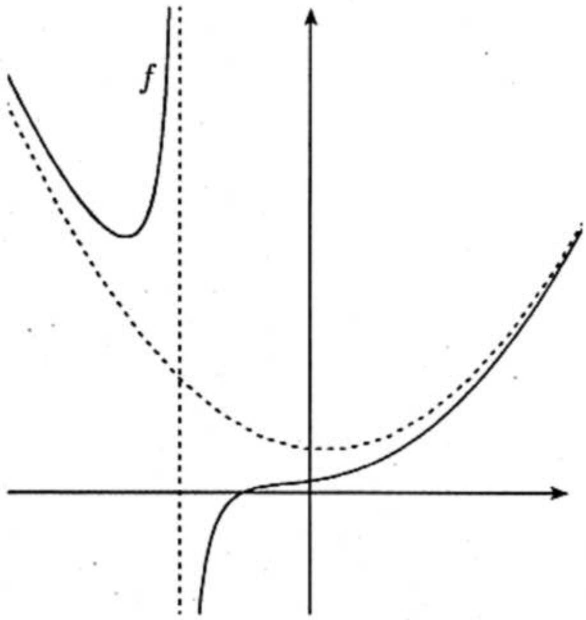
$$f(x) = \frac{6x^3 + 7x^2 + 7x + 4}{2x + 3}$$

a une asymptote parabolique car le degré du numérateur moins le degré du dénominateur vaut 2.
La division polynomiale donne

$$f(x) = 3x^2 - x + 5 - \frac{11}{2x + 3}$$

Ainsi l'équation de l'asymptote est la parabole

$$y = 3x^2 - x + 5$$



.

6.4.3 Asymptote oblique, un exemple complet

Considérons la fonction rationnelle $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, avec $\deg(p) - \deg(q) = 1$. Plusieurs questions se posent lorsqu'on étudie une telle fonction.

a. **Equation de l'asymptote oblique**. L'équation de l'asymptote oblique est donnée par le quotient de $p(x) : q(x)$. En effet, la division polynomiale donne $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = mx + h + \frac{r(x)}{q(x)}$.
Comme le degré de $r(x)$ (le reste peut être un polynôme ou un nombre) est plus petit que le degré de $q(x)$, nous avons $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0$. L'équation de l'asymptote oblique est alors $y = mx + h$

b. **Eventuelles intersections entre f et son asymptote oblique**. Pour répondre à cette question, on doit résoudre l'équation $f(x) = mx + h$, c'est-à-dire $mx + h + \frac{r(x)}{q(x)} = mx + h$. L'éventuelle intersection est donc trouvée en résolvant $r(x) = 0$.

c. **Déterminer de quelle manière la courbe s'approche de son asymptote !** Ce peut être par le haut, ou par le bas ! Cette question est aussi à se poser dans le cas des asymptotes horizontales. Le signe de $\frac{r(x)}{q(x)}$ lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$ nous donne la réponse. Ainsi nous pouvons établir le tableau des signes de $\frac{r(x)}{q(x)}$.
(Pour cette dernière question, une autre méthode existe. Comme nous le verrons dans la suite du cours, le signe de la dérivée seconde ($f''(x)$) lorsque $x \to \pm\infty$ indique la convexité de la courbe. Nous en déduirons si elle est en-dessus ou en-dessous de l'asymptote.)

► **Exemple :** Etudions la fonction $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 2x^2}$.

Domaine : Comme $x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2) = 0$, on a $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$, et donc

$$D = \mathbb{R} \backslash \{0; 2\}$$

Exclu $x_1 = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = "\frac{4}{0}" = \infty$. Asymptote verticale (AV) : $x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = "\frac{4}{0^-}" = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = "\frac{4}{0^-}" = -\infty$

Exclu $x_2 = 2$ **:** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = "\frac{0}{0}"$ $\Rightarrow$ factorisation

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 2x^2} = \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 - x - 2)}{(x-2)x^2} \overset{x\neq 2}{=} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2}$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2} = \frac{12}{4} = 3$ Trou $(2;3)$

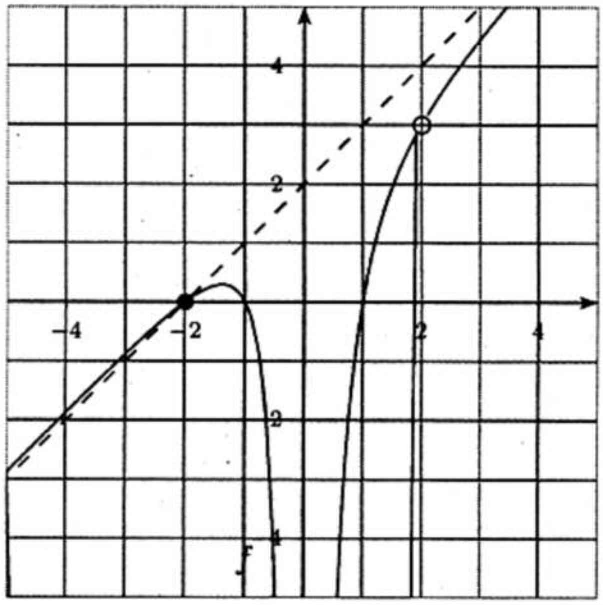
A.O. ? A.H ? : Comme "$m - n = 1$", on sait qu'il y a une asymptote oblique. Trouvons son équation :

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 5x^2 + 4 & x^3 - 2x^2 \\ \cline{2-2} -(x^4 - 2x^3) & x + 2 \\ \cline{1-1} 2x^3 - 5x^2 + 4 & \\ -(2x^3 - 4x^2) & \\ \cline{1-1} -x^2 + 4 & \end{array}$$

donc, $y = x + 2 + \frac{-x^2+4}{x^3-2x^2}$
A.0 :$y = x + 2$

Etude du reste : Le reste est $g(x) = \frac{-x^2+4}{x^3-2x^2}$.
En factorisant, on obtient $g(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2(x-2)} \overset{x\neq 2}{=} \frac{x+2}{x^2}$
Les zéro(s) sont : $g(x) = 0 \Rightarrow x = -2$. $f(-2) = 0$
L'unique intersection entre l'asymptote oblique et la courbe : $I\,(-2;0)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0^-$, la courbe est sous l'AO lorsque x est proche de ∞
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$, la courbe est sur l'AO lorsque x est proche de $-\infty$

Graphe :



6.5 Asymptote horizontale ou oblique, cas général

Soit la fonction $y = f(x)$.Si f est une fonction rationnelle, nous savons facilement déterminer le comportement asymptotique. Qu'en est-il lorsque f n'est pas une fonction rationnelle ? Voici une méthode générale pour traquer les asymptotes horizontales et obliques. Décidons tout d'abord que l'équation de l'asymptote est $y = mx + h$. Si $m = 0$ cela signifie qu'elle est horizontale, et elle est oblique (et de pente m) sinon.$y = mx + h$ est l'asymptote de la fonction $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (mx + h) = 0$.
Déterminons la valeur de m, en utilisant une des méthodes présentées ci-dessous :

1$^{\text{ère}}$ **méthode pour obtenir** m **:**
Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (mx + h)$, on a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx - h = 0$. En divisant par x, on trouve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-mx-h}{x} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{h}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \underbrace{\lim_{x\to\infty} m}_{m} - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{h}{x}}_{0} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m.$$

Ainsi $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$2^{ème}$ méthode pour obtenir m :

Cette méthode fait appel à la notion de dérivée qui sera étudié dans la suite du cours. Si f tend vers la droite $y = mx + h$, cela signifie que la pente de la tangente à f tend vers la pente de l'asymptote $y = mx + h$, pour $x \to \infty$.

Ainsi $m = \lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$

Méthode pour obtenir h :

Si m est égal à" $\pm\infty$, il n'y a ni asymptote horizontale, ni oblique. Si $m = 0$, on a une asymptote horizontale et si $m \in \mathbb{R}^*$ on a une asymptote oblique.

Nous devons alors déterminer la valeur de h :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - mx - h = 0 \to \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = h \to h = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

► **Exemple :**

Donner les équations des asymptotes de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + px + q}$.

Pour rappel, $\sqrt{x^2} = |x|$. Ainsi $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \text{n.d.} & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a. Etudions $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Avec la $1^{ère}$ méthode :

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+px+q}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2+px+q}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{p}{x} - \frac{q}{x^2}} = \sqrt{\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}\right)}_{1}} = 1$$

Il y a donc une asymptote oblique de pente 1.

$$h = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + px + q} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+px+q}+x}{\sqrt{x^2+px+q}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+px+q-x^2}{\sqrt{x^2+px+q}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{px+q}{|x|+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{px+q}{2x} = \frac{p}{2}$$

Asymptote oblique (à droite) : $y = x + \frac{p}{2}$

b. Etudions $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+px+q}}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{\frac{x^2+px+q}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1 + \frac{p}{x} - \frac{q}{x^2}} = -\sqrt{\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}\right)}_{1}} = -\sqrt{1} = -1$$

$$h = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + px + q} + x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+px+q}-x}{\sqrt{x^2+px+q}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+px+q-x^2}{\sqrt{x^2+px+q}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{px+q}{|x|-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{px+q}{-2x} = -\frac{p}{2}$$

Asymptote oblique (à gauche) : $y = -x - \frac{p}{2}$

Ainsi la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + px + q}$ possède les asymptotes $y = |x + \frac{p}{2}|$.

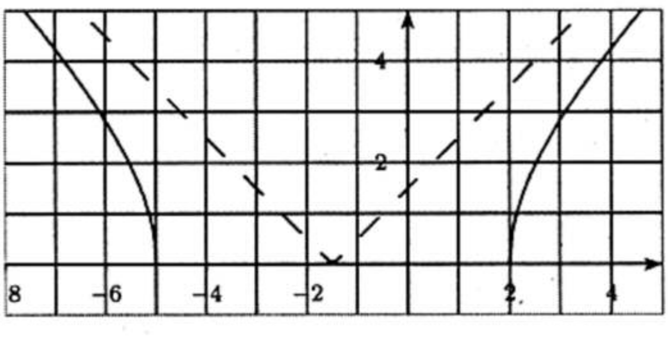
► **Exemple :**

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$$

Domaine : Les zéros de $x^2 + 3x - 10$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -5$. Donc

$$D = \mathbb{R} \backslash] - 5; 2[$$

Asymptote oblique $y = \left|x + \frac{3}{2}\right|$



6.6 Limites de fonctions trigonométriques

Voici quelques limites faciles à calculer :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \tan(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \tan(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(x) = \text{non définie.}$$

Il est par contre plus difficile de calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = ? \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = ? \qquad \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

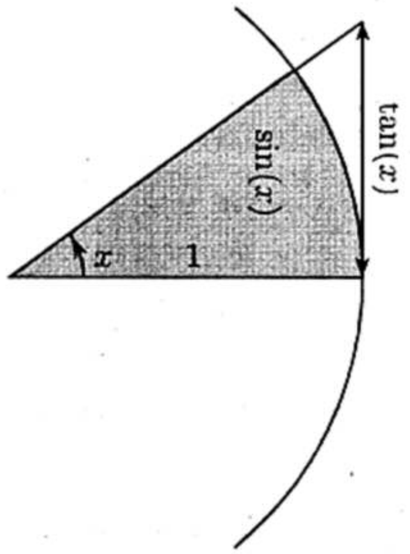
Essayons de calculer ces deux dernières limites...

a. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$

Preuve :

Soit le cercle trigonométrique et un **angle positif en radians** x.

On peut alors écrire les inégalités d'aires suivantes :



$$\frac{1\cdot\sin(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2} \le \frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{x}{2} \le \frac{1\cdot\tan(x)}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$$

Ainsi

$$\sin(x) \le x \le \tan(x)$$

Divisons par $\sin(x)$ (Comme $\sin(x) > 0$), on a :

$$1 \le \frac{x}{\sin(x)} \le \cos(x)$$

Prenons l'inverse (il faut allors changer le signe de l'inégalité) :

$$1 \ge \frac{\sin(x)}{x} \ge \frac{1}{\cos(x)}$$

Prenons enfin la limite $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} 1 \ge \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \ge \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \ge \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \ge 1 \text{ d'où } \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Un raisonnement similaire, pour un **angle négatif en radians** x peut être fait. On obtient alors $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

On a alors

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et donc } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

□

b. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1}$

Preuve :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot 1 = 1$$ □

c $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$

Preuve :

Comme $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$, on a $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, donc $-|x| \leq \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ Comme $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, on a $0 \leq \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} x \ \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ □

d **Autres résultats importants**

Pour $x \approx 0 \ \Rightarrow \ \sin(x) \approx x$ et $\tan(x) \approx x$

▶ **Exemple :** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3$

6.7 Dérivée

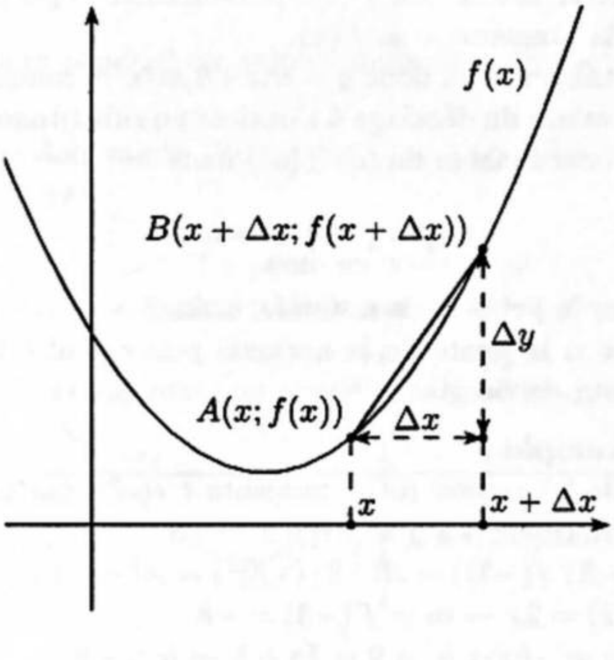
6.7.1 Définition

La dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point x est définie comme 'limite du quotient différentiel' : $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, pour autant que cette limite existe. On dit alors que la fonction est **dérivable** (ou différentiable) et on écrit

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

La notation $\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ veut dire dérivée de la fonction f par rapport à la variable x.

- Δx est la différence selon x
- Δy est la différence selon y, correspondante au Δx
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est le taux d'accroissement moyen
- Lorsque $\Delta x \to 0$ on obtient le taux d'accroissement instantané.
- Si on dérive la fonction $y = f(x)$, on obtient une nouvelle fonction que est $y = f'(x)$.
- Si on dérive la fonction $y = f'(x)$, on obtient la dérivée seconde qui se note $y = f''(x)$.
- Géométriquement, la valeur de $f'(x)$ en $x = a$ (c'est-à-dire. $f'(a)$) est **la pente de la tangent à la courbe $y = f(x)$ en son point d'abscisse $x = a$.** En effet,en prenant la limite $\Delta x \to 0$, la sécante passant par A et B devient la tangente en A. Ainsi la pente de la tangente est-elle la limite, lorsque B s'approche de A, de la pente de la sécante $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ car pour que B s'approche de A, il faut que $\Delta x \to 0$ (Δx devient de plus en plus petit).



Concrètement, si f est la fonction qui indique la distance parcourue par un véhicule en fonction du temps x, alors Δy la différence de distance divisée par le temps Δx donne la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps considéré. Si l'intervalle de temps est très petit, la vitesse moyenne devient vitesse instantanée. Ainsi la dérivée de la position est la vitesse ... et la dérivée de la vitesse est l'accélération.

6.7.2 Calcul de la dérivée en 4 étapes

La fonction dérivée $f'(x)$, dérivée de la fonction $y = f(x)$,est obtenue en 4 étapes :

Etape 1 : Calculer $f(x + \Delta x)$
Etape 2 : Calculer $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
Etape 3 : Calculer $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
Etape 4 : Calculer $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

► **Exemple :** Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$. En effet,

Etape 1 : $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$
Etape 2 : $\Delta y = (x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2) - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$
Etape 3 : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$
Etape 4 : $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$

6.7.3 Equation de la tangente et de la normale à la courbe en un point donnée

Soit la fonction $y = f(x)$. La pente de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = a$ est donnée par $f'(a)$. Les coordonnées du point de tangence sont $(a\,;\, f(a))$.Grâce à ces deux informations, il est possible d'établir l'équation de la tangente à la courbe en $x = a$, sous la forme cartésienne explicite : $y = mx + h$. Il est également possible de trouver l'équation de la normale à la courbe en $x = a$.

- Calculer l'ordonnée du point de tangence : $f(a)$ Point de tangence $(a; f(a))$
- Dériver la fonction $f'(x)$, puis calculer la pente de la tangente $m = f'(a)$.
- La tangente est donc $y = mx+h$,avec m connu. La valeur du décalage h s'obtient en substituant les coordonnées de $(a\,;\, f(a))$ dans

$$y = f'(a) \cdot x + h$$

- Pour la pente de la normale, utiliser $m \cdot n = -1$ avec n la pente de la normale puis calculer la valeur du décalage comme au point précédent.

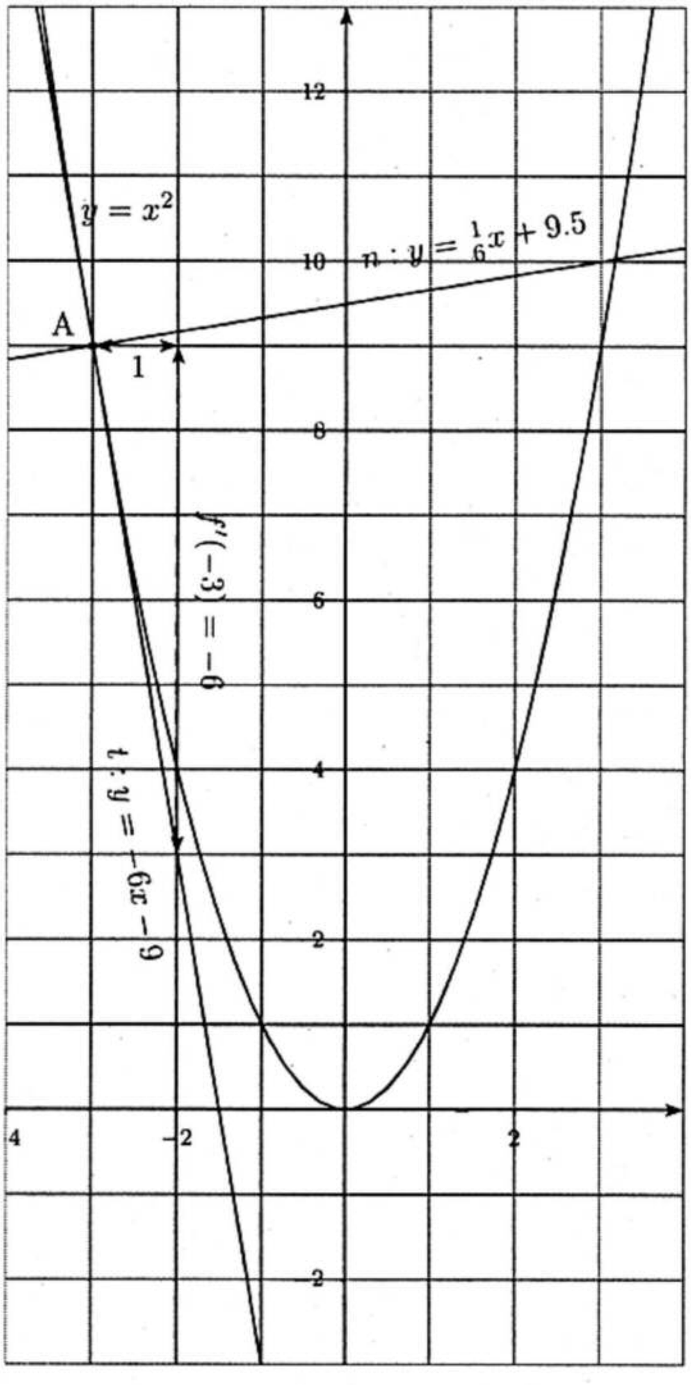
► **Exemple :**
Etablir l'équation de la tangente t et l'équation de la normale n à $y = x^2$ en $x = -3$

- $A(-3\,;\, f(-3)) = A(-3\,;(-3)^2) = A(-3\,;\, 9)$
- $f'(x) = 2x \to m = f'(-3) = -6$
- $t : y = -6x + h \to 9 = 18 + h \to h = -9$

$$t : y = -6x - 9$$

- $-6 \cdot n = -1 \to n : y = \frac{1}{6}x + b \to 9 = -\frac{1}{2} + b$

$$b = \frac{19}{2} \to n : y = \frac{1}{6}x + \frac{19}{2}$$



6.7.4 Dérivée de la fonction $y = \sin(x)$

Pour établir ce résultat, nous utiliserons les résultats

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (valable uniquement pour un angle x en radian !)

b. $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

c. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} = 0$

Commençons par vérifier ce dernier résultat.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\cdot\frac{\cos(\Delta x)+1}{\cos(\Delta x)+1} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos^2(\Delta x)-1}{\Delta x\cdot(\cos(\Delta x)+1)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin^2(\Delta x)}{\Delta x\cdot(\cos(\Delta x)+1)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin(\Delta x)\cdot\sin(\Delta x)}{\Delta x\cdot(\cos(\Delta x)+1)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}$$
$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}}_{=0} = 0$$

Par définition : $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sin(x+\Delta x) - \sin(x) \overset{b.}{=} \sin(x)\cdot\cos(\Delta x) + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x) - \sin(x)\\ &= \sin(x)\left(\cos(\Delta x)-1\right) + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x)\\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin(x)(\cos(\Delta x)-1)+\cos(x)\cdot\sin(\Delta x)}{\Delta x} = \sin(x)\cdot\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} + \cos(x)\cdot\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\end{aligned}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}}_{=0\text{ (par c.)}} + \cos(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1\text{ (par a.)}} = \cos(x)$$

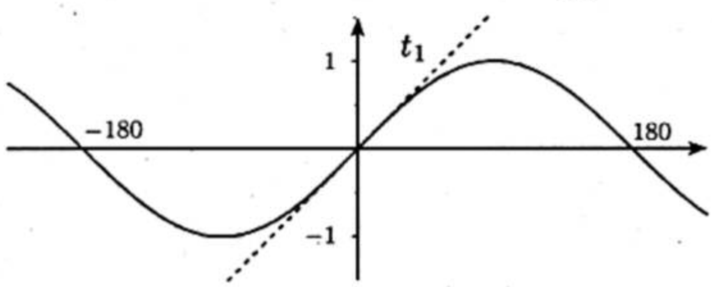
Important

$\sin(x)' = \cos(x)$. Résultat valable uniquement si l'angle est en RADIANS !

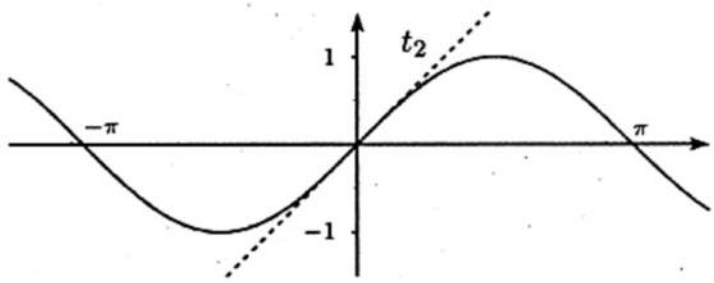
Pourquoi en radians ? Plusieurs raisons !

- Le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ utilisé dans la preuve de ce résultat est valable uniquement pour un angle x en radian.
- Au point $(0\,;0)$, la pente de la tangente au graphe doit valoir $f'(0) = \cos(0) = 1$ ce qui n'est pas le cas si on représente le graphe avec des angles en degré !

La pente en $x = 0$ vaut $\frac{\pi}{180}$.
Equation de la tangente $t_1 : y = \frac{\pi}{180}\cdot x$



La pente en $x = 0$ vaut 1.
Equation de la tangente $t_2 : y = x$



6.7.5 Dérivée des puissances de x

Nous savons que la dérivée de $x = x^1$ est $1 = x^0$, que celle de x^2 est $2x$, et que celle de x^3 est $3x^2$. Nous en déduisons, avec raison, que

$$\boxed{f(x) = x^n \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) = nx^{n-1},\ n\in\mathbb{N}}$$

Preuve :

Calculons préalablement $(x+\Delta x)^n$ On a
$(x+\Delta x)^n = (x+\Delta x)\cdot(x+\Delta x)\ (x+\Delta x)\cdot..\ (x+\Delta x) = x^n + x^{n-1}\cdot\Delta x\cdot n + \underbrace{x^{n-2}\ \Delta x^2\ \ ... + ... - \Delta x^n}_{\text{divisible par } \Delta x^2}$

et donc par la définition de la dérivée

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x^n + x^{n-1}\ \Delta x\ n + x^{n-2}\ \Delta x^2\ \ +\ \ +\Delta x^n) - x^n}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{n-1}\ \Delta x\ n + x^{n-2}\ \Delta x^2\ ...+...+\Delta x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} x^{n-1}\ \ n + \underbrace{x^{n-2}\cdot\Delta x\cdot ... + ... + \Delta x^{n-1}}_{\text{divisible par } \Delta x} = n\cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

□

En réalité, ce résultat n'est pas seulement valable pour $n \in \mathbb{N}$, mais également pour $n \in \mathbb{R}$. Ceci sera prouvé, progressivement plus loin, mais peut déjà être utilisé.
Avec cette formule il est maintenant possible de dériver des fonctions comme $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, ...

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}\ \ x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \tfrac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Dérivée d'une "fonction racine" de x :

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{alors} \quad f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

.

6.7.6 Règles de dérivation

a. **Linéarité :** $f(x) = k\cdot u(x)$ alors $f'(x) = k\cdot u'(x)$

Preuve :

$$f(x) = k\cdot u(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\cdot u(x+\Delta x) - k\cdot u(x)}{\Delta x} = k\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} k\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = k\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = k\cdot u'(x)$$

□

▶ **Exemple :** $f(x) = 5\cdot(x^2+7x-2)$ alors $f'(x) = 5\cdot(x^2+7x-2)' = 5\,(2x+7) = 10x+35$

b. **Règle de la somme :** $f(x) = u(x) \pm v(x)$ alors $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

Preuve :

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'(x)+v'(x)$$

$\square$

► **Exemple :** $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sqrt{x})' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c. **Règle du produit :** $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ alors $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Preuve :

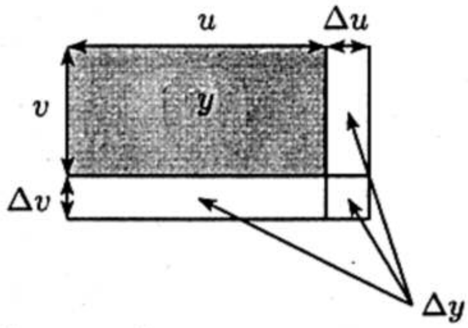
$$\begin{aligned}
f(x) &= u(x) \cdot v(x) \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\overbrace{-u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x)}^{=0}}{\Delta x} - \frac{u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} \\
&= v(x+\Delta x) \cdot \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) \cdot \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\
&= v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Nous pouvons montrer ce résultat d'une autre manière...

Preuve :

Si nous considérons $u(x)$ et $v(x)$ comme des longueurs (fonctions continues de x, avec x pouvant représenter la température), $f(x)$ peut être considérée comme une surface subissant une dilatation :



Δu est l'accroissement en u (longueur)
Δv est l'accroissement en v (largeur)
Δy est l'accroissement de la surface$y$

On voit que Δy est

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v$$

En divisant par Δx, on obtient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$$

Au passage à la limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v = v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) \cdot v(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u = u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x) \cdot u(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$$

Comme $v(x)$ est continue $\Delta x \to 0$ implique $\Delta v \to 0$. Finalement,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x) \;\; v(x) + u(x) \;\; v'(x)$$

□

► **Exemple :** Dérivons $f(x) = (5x^3 - 3x^2 + 3) \;\; \sqrt{x}$

$u = 5x^3 - 3x^2 + 3 \qquad v = \sqrt{x} \qquad u' = 15x^2 - 6x \qquad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = (15x^2 - 6x) \cdot \sqrt{x} + (5x^3 - 3x^2 + 3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \left(15x^2 - 6x + \frac{5x^3 - 3x^2 + 3}{2x}\right)$$
$$= \sqrt{x} \;\; \left(15x^2 - 6x + 2,5x^2 - 1,5x + \frac{3}{2x}\right) = \sqrt{x} \;\; \left(17,5x^2 - 7,5x + \frac{3}{2x}\right)$$

d. **Dérivée de l'inverse d'une fonction : $f(x) = \frac{1}{v(x)}$ alors $f'(x) = \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$**

Preuve :

$f(x) = v(x) \cdot \frac{1}{v(x)} = 1$. Ainsi $f'(x) = 0 = v'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + v(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' \Rightarrow \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$

□

► **Exemples :**

$f(x) = \frac{1}{4x^3}$ alors $f'(x) = \frac{-12x^2}{(4x^3)^2} = \frac{-12x^2}{16x^6} = \frac{-3}{4x^4}$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ alors $g'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-3\right)^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)^2}$

$h(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ alors $h'(x) = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1}$

Dans cet exemple, nous nous avons prouvé que

$$\boxed{h(x) = x^n \quad \Leftrightarrow \quad h'(x) = nx^{n-1}, \;\; n \in \mathbb{Z}}$$

e. **Règle du quotient : $f(x) = u(x) \div v(x)$ alors $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$**

$v^2(x)$

Preuve :

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$

$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2} = \frac{u'(x)}{v(x)} + \frac{-u(x) \; v'(x)}{v(x)^2} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

□

► **Exemples :**

$f(x) = \frac{x+5}{3x^4}$ alors $f'(x) = \frac{1 \cdot 3x^4 - (x+5) \cdot 12x^3}{(3x^4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^4 - 60x^3}{9x^8} = \frac{-3x-20}{3x^5}$

$g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ alors $g'(x) = \frac{2(x-3) - 1 \; (2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$

f. **Règle de la composition : $(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$**

Pour rappel, la fonction composée $g \circ f$ est définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.
D'abord f puis g ! ! Illustration :

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) = u \overset{g}{\mapsto} g(u) = g(f(x)) = y$$

Montrons maintenant que $(u \circ v)' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Preuve :

$$
\begin{aligned}
(u\circ v)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(v(x+\Delta x))-u(v(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(v(x+\Delta x))-u(v(x))}{\Delta x}\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{v(x+\Delta x)-v(x)}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(v(x+\Delta x))-u(v(\Delta x))}{v(x+\Delta x)-v(\Delta x)}\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(v(x+\Delta x))-u(v(x))}{v(x+\Delta x)-v(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \overset{t=v(x)}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\
&= u'(t)\cdot v'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)
\end{aligned}
$$

$\square$

Illustrons notre dérivée !

$$f'(x)\cdot g'(f(x)) = (g\circ f)'(x)$$

$$\underbrace{x\to f(x)}_{f'(x)} = \underbrace{u\mapsto g(u)}_{\cdot g'(u)} = g(f(x)) = y$$

Autre méthode : Si $y=g(f(x))$, et $u=f(x)$ (donc $y=g(u)$) alors $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

► **Exemples :**

a) Dériver $f(x)=\sqrt{5x^2+11}$

$x\mapsto 5x^2+11 = u\mapsto\sqrt{u}$

$f'(x)=[\sqrt{u}]'\cdot[5x^2+11]' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(10x) = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+11}}$

b) Dériver $f(x)=\cos^2(x)$

$x\mapsto\cos(x)=u\mapsto u^2$

$f'(x)=[u^2]'\cdot[\cos(x)]' = 2u\cdot(-\sin(x)) = -2\cos(x)\sin(x)$

c) Dériver $f(x)=(2x^3+8x-11)^{-2}$

$x\mapsto(2x^3+8x-11)=u\mapsto u^{-2}$

$f'(x) = [u^{-2}]'\cdot[2x^3+8x-11]' = -2u^{-1}\cdot(6x^2+8)$

$=\frac{-2}{u}\cdot(6x^2+8) = \frac{-12x^2-16}{2x^3+8x-11}$

d) Dériver $f(x)=\frac{1}{v(x)}=v(x)^{-1}$

$x\mapsto v(x)=u\mapsto u^{-1}$

$f'(x) \quad = [u^{-1}]'\cdot[v(x)]' = -u^{-2}\cdot v'(x) = -\frac{1}{u^2}\cdot v'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$

e) Dériver $f(x)=\cos^5(2x+4)$

$x\mapsto 2x+4=u\mapsto\cos(u)=v\mapsto v^5$

$f'(x) = [v^5]'\cdot[\cos(u)]'\cdot[2x+4]' = 5v^4\cdot(-\sin(u))\cdot 2$

$=-5\cos^4(u)\cdot\sin(u)\cdot 2$

$=-10\cos^4(2x+4)\cdot\sin(2x+4)$

f) Dériver $f(x)=\sqrt{x^2+px+q}$

$x\mapsto x^2+px+q=u\mapsto\sqrt{u}$

$f'(x)=[\sqrt{u}]'\cdot[x^2+px+q]' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x+p) = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$

Et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{2|x|} = \pm 1$

On retrouve ici la pente des asymptotes obliques de la fonction f rencontrée précédemment.

g. **Dérivée de la réciproque d'une fonction : $\left({}^rf\right)'(x) = \frac{1}{f'({}^rf(x))}$**

Soit la fonction $y = f(x)$. Comment déterminer la dérivée de sa réciproque $y = {}^rf(x)$? Par exemple : "de la fonction $f(x) = x^2$ on connaît la dérivée $f'(x) = 2x$. Comment en déduire la dérive de la fonction ${}^rf(x) = \sqrt{x}$?"

Par définition de la réciproque, la fonction composée $g(x) = f({}^rf(x)) = x$ est l'identité ! Ainsi la dérivée est $g'(x) = (x)' = 1$. Comme $y = g(x)$ est une fonction composée, sa dérivée s'obtient via :

$$g'(x) = 1 = \left({}^rf\right)'(x) \cdot f'({}^rf(x)) \Rightarrow \left({}^rf\right)'(x) = \frac{1}{f'({}^rf(x))}.$$

► **Exemples :**

- Quelle est la dérivée de la réciproque de $f(x) = x^2$?
  Le résultat est connu : ${}^rf(x) = \sqrt{x}$ est $\left({}^rf\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
  Utilisons la nouvelle formule, $\left({}^rf\right)'(x) = \frac{1}{f'({}^rf(x))}$, pour obtenir cette réponse !
  Comme $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$, ${}^rf(x) = \sqrt{x}$, on obtient $\left({}^rf\right)'(x) = \frac{1}{2({}^rf(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- Quelle est la dérivée de la réciproque de $f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$
  La fonction réciproque est ${}^rf(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
  Avec $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$, ${}^rf(x) = \sqrt[n]{x}$,
  on obtient $\left({}^rf\right)'(x) = \frac{1}{f'({}^rf(x))} = \frac{1}{n\cdot({}^rf(x))^{n-1}} = \frac{1}{n\cdot\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\cdot x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\cdot x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$.
- Montrons, en utilisant le résultat précédent que $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ $n \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire que la dérivée de $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$ est $f'(x) = \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left((x^{\frac{1}{n}})^m\right)' = m\cdot\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-1}{n}}\cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-1+1-n}{n}} = \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

  ► **Exemple :** $f(x) = x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$, alors $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-1/4} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
  Le fait que tout nombre réel peut être approché par un rationnel implique que ce résultat prouvé pour les exposants rationnels est aussi vrai pour des exposants réels : $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{R}$.

  ► **Exemple :** $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, alors $f'(x) = \sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$
- Quelle est la dérivée de $f(x) = \arcsin(x)$? On a

$$\sin(\arcsin(x)) = x, \text{ donc } 1 = \cos(\arcsin(x))\cdot\arcsin'(x). \text{ Ainsi,}$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \overset{u=\arcsin(x)}{=} \frac{1}{\cos(u)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6.7.7 Equation de la tangente à un graphe passant par un point P

a. **Tangente passant par l'origine. On a $P(0;0)$.**

Pour une fonction $y = f(x)$, l'équation de la tangente t peut s'écrire $t : y = mx$. Le point $T(a; f(a))$ appartient au graphe de $f(x)$ et au graphe de t, ainsi $f(a) = m\cdot a$. Comme la pente en T vaut m, on a $m = f'(a)$ et donc $f(a) = f'(a)\cdot a$. La solution de cette équation nous permet de trouver le point de contact T. Il est alors facile de résoudre le problème.

► **Exemple :**

$f(x) = ax^2 + bx + c$ donc $f'(x) = 2ax + b$. Les coordonnées du point de contact $T(x, f(x))$ sont les solutions de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 2ax^2 + bx$$

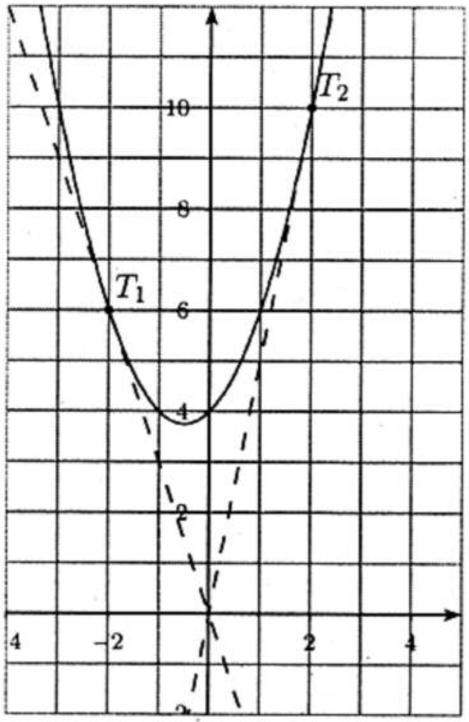
et donc $ax^2 = c \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. Pour autant que cette racine existe, le problème admet toujours deux solutions.
Les tangentes sont alors

$$t_{1,2} : y = f'(\pm\sqrt{\frac{c}{a}}) \cdot x = (\pm 2a\sqrt{\frac{c}{a}} + b)x$$

Par exemple, $f(x) = x^2 + x + 4$ admet les tangentes

$$t_1 : y = 5x \text{ et } t_2 : y = -3x.$$

Les points de contact sont $T_1(-2;6)$ et $T_2(2;10)$



b. **Tangente passant par un point $P(x_p; y_p)$.**

Pour une fonction $y = f(x)$, l' équation de la tangente t passant par $P\,(x_p; f(x_p))$ peut s'écrire $t : y = mx + h$. Appelons $T(x_t; y_t)$, le point de tangence. Comme $P \in t$, on peut écrire $y_p = m \cdot x_p + h$. On sait également que $m = f'(x_t)$ et donc $y_p = f'(x_t) \cdot x_p + h$. En isolant h,on obtient $h = y_p - f'(x_t) \cdot x_p$. Ainsi l'équation de la tangente peut s'écrire

$$y = f'(x_t) \cdot x + y_p - f'(x_t) \cdot x_p = f'(x_t)(x - x_p) + y_p$$

Comme $T \in t$, on obtient $y_t = f'(x_t)(x_t - x_p) + y_p$ et donc $f'(x_t) = \frac{f(x_t)-y_p}{x_t-x_p}$. Cette dernière équation nous permet de calculer la valeur x_t et donc de trouver les coordonnées du point de contact $T(x_t; y_t)$. Avec cette valeur, il est facile de trouver l'équation de la tangente.

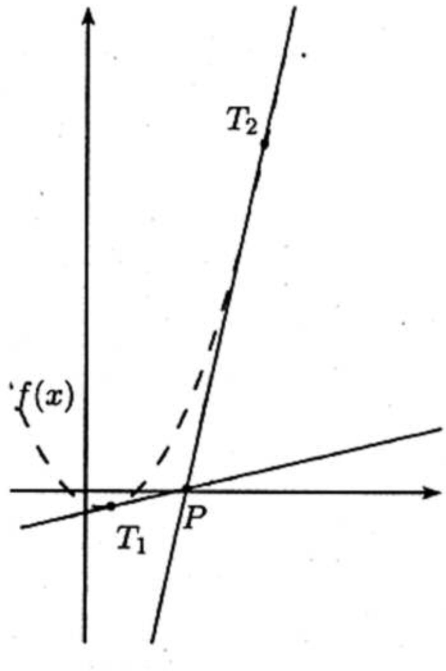
► **Exemple :**

Soit le point $P(4;1)$, la fonction $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$ et donc $f'(x) = 6x + -4$. Les coordonnées du point de contact $T(x, f(x))$ sont les solutions de l'équation

$$f'(x) = \frac{f(x) - y_p}{x - x_p}$$

et donc

$$6x - 4 = \frac{(3x^2-4x-4)-1}{x-4} = \frac{3x^2-4x-5}{x-4}$$
$$(6x - 4)\,(x - 4) = 3x^2 - 4x - 5$$
$$6x^2 - 24x - 4x + 16 = 3x^2 - 4x - 5$$
$$3x^2 - 24x + 21 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$T_1(1; -5) \Rightarrow t_1 : y = 2x - 7$$
$$T_2(7; 115) \Rightarrow t_2 : y = 38x - 151$$



6.7.8 Points critiques

Un point critique est un point en lequel la dérivée est soit nulle, soit infinie, ou non définie.

a. **Points à tangente verticale, dérivée infinie.**

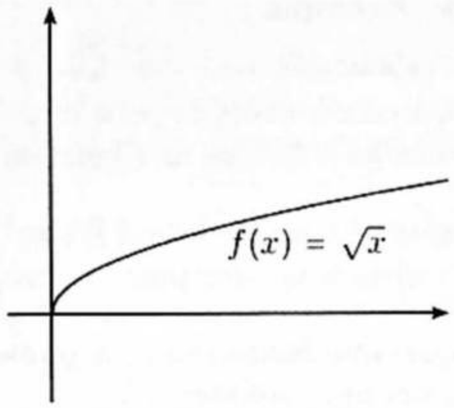
Les points en lesquels la tangente est verticale sont des exclus du domaine de la dérivée

▶ **Exemple :**

$f(x) = \sqrt{x} \qquad D_f = \mathbb{R}_+$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad D_{f'} = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$

La dérivée n'est pas définie en $x = 0$, mais $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. Ainsi la tangente à la courbe $y = \sqrt{x}$ au point $(0;0)$ est la droite verticale $x = 0$.



b **Points anguleux, dérivée non définie**

Si la courbe possède des changements brusques de pente, qu'on appellera des points anguleux, alors la dérivée n'est pas définie partout. Le problème est que la limite gauche et la limite droite de la dérivée sont différentes en certains points. Ceci se produit parfois pour des fonctions définies par morceaux, et surtout chaque fois qu'il y a une valeur absolue dans la définition de la fonction.

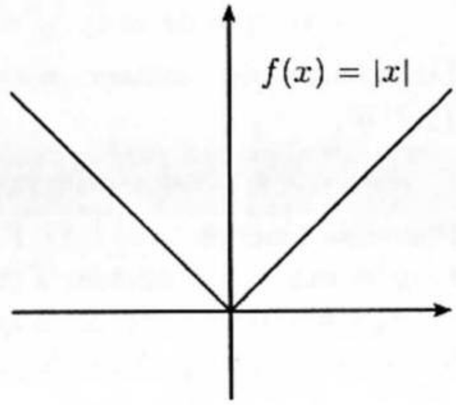
▶ **Exemple :**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , x \leq 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

En $(0;0)$, il y a 2 tangentes : à gauche $y = -x$ et à droite $y = x$. Ainsi la dérivée n'est pas définie en $x = 0$.

La dérivée de $f(x) = |x|$ est

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ \text{n.d.} & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$



c. **Point à tangente horizontale, dérivée nulle**

Un point à tangente horizontale (PTH) de f est un point dont l'abscisse est solution de $f'(x) = 0$.

6.7.9 Tableau de variation

Dorénavant l'étude d'une fonction f contiendra également le calcul et l'étude de sa dérivée f'. Toutes les informations relatives à la dérivée seront présentée en un tableau appelé **tableau de variation de** f, qui n'est autre que le tableau des signes de f'.

▶ **Important :**

Lorsque...

...**la dérivée est négative**, le graphe décroît.

...**la dérivée est nulle**, la tangente est horizontale (PTH)...le graphe est localement " plat ".

...**la dérivée est positive**, le graphe croît.

Tous les points critiques figureront dans le tableau de variation.

Une fois la dérivée calculée, il faut donc établir son domaine et ses zéros.

La **concavité / convexité** est une propriété qui peut décrire un point d'une courbe, un intervalle d'une courbe, ou une courbe entièrement.

> **Convexe** la pente de la tangent est croissante la courbe tourne à gauche, sens positif de rotation
>
> **Concave** la pente de la tangente est décroissante la courbe tourne à droite, sens négatif de rotation
>
> **Point d'inflexion (PI).** Point en lequel la concavité change (convexe puis concave, ou concave puis convexe). Au PI, la tangente coupe la courbe!

Il existe plusieurs types de points à tangente horizontale

> **Points extrême :** Ce sont des sommets (**maximum** ou **minimum**). Ils peuvent être des optimaux globaux ou locaux.
>
> **Palier :** Point à tangent horizontale qui est aussi point d'inflexion. En un tel point le signe de la dérivée ne change pas.

Le tableau de variation nous permet de déterminer les différents types de points à tangente horizontale. Regardons l'exemple ci-dessous.

► **Exemple :**

Dresser le tableau des variations de la fonction $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x-2}$.
Il faut commencer par déterminer les exclus de la fonction$f$: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
Nous avons ensuite besoin de la dérivée de f afin de déterminer les points à tangente horizontale ainsi que les intervalles de croissance et de décroissance de f :
En posant $u(x) = 2x^2 - 3x$ et $v(x) = x - 2$, on obtient,

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(x-2)-1\cdot(2x^2-3x)}{(x-2)^2} = \frac{4x^2-8x-3x+6-2x^2+3x}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2} = \frac{2(x^2-4x+3)}{(x-2)^2} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

Les points à tangente horizontale satisfont la condition : $f'(x) = 0$

$$\frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1)(x-3) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 3$$

Finalement, on dresse le tableau des variations de la fonction f en plaçant les exclus ainsi que les PTH dans ce dernier :

x		1		2		3	
$f'(x)$	+	0	−	∅	−	0	+
Graphe	↗	—•—	↘	∅	↘	—•—	↗

Tous les cas possible sont présentés dans le tableau qui suit.

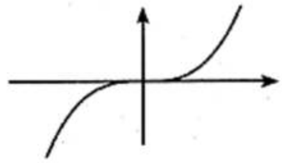
Cas 1

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graphe	$\nearrow$	$\bullet$	$\nearrow$

Conclusion
PALIER

▶ **Exemple :** $f(x) = x^3$
Palier en $(0;0)$

Graphe :



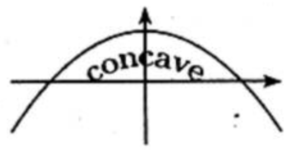
Cas 2

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graphe	$\nearrow$	$\bullet$	$\searrow$

Conclusion
MAXIMUM

▶ **Exemple :** $f(x) = -x^2 + 2$
Max en $(0;2)$

Graphe :



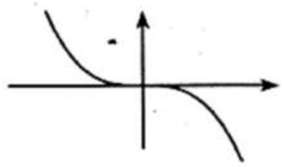
Cas 3

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graphe	$\searrow$	$\bullet$	$\searrow$

Conclusion
PALIER

▶ **Exemple :** $f(x) = -x^3$
Palier en $(0;0)$

Graphe :



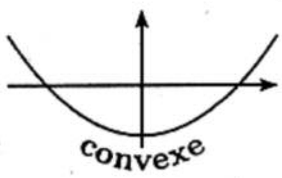
Cas 4

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graphe	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$

Conclusion
MINIMUM

▶ **Exemple :** $f(x) = x^2 - 2$
Palier en $(0;-2)$

Graphe :



Une autre méthode, que l'on verra dans la suite du cours, permet de définir le type des PTH : elle est basée sur la dérivée seconde.

6.7.10 La seconde dérivée

Soit la fonction $y = f(x)$. Nous savons déterminer, utiliser et interpréter sa dérivée $y = f'(x)$: elle donne le taux de variation instantané de la fonction, qui est graphiquement représenté par la pente de la tangente à la courbe. La dérivée de la dérivée est appelée **dérivée seconde**. Elle se note $y = f''(x)$.

Si $f'(x)$ est décroissante, alors sa dérivée $f''(x)$ est négative.
Si $f'(x)$ est croissante, alors $f''(x)$ est positive.
Si $f'(x)$ n'est ni croissante ni décroissante, alors $f''(x)$ est nulle.

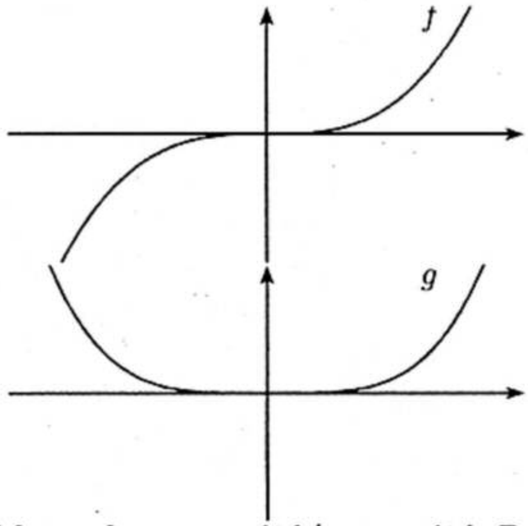
► **Important :**

Convexe	$f''(x) > 0$	la courbe "tourne à gauche" en x
Concave	$f''(x) < 0$	la courbe "tourne à droite" en x
Point d'inflexion	$f''(x) = 0$ **et** change de signe	extremum de la dérivée première !

► **Exemples :**

a. $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$ Le point $(0;0)$ est un zéro de f, de f' et de f''. C'est un point d'inflexion car le signe de f'' change en $x = 0$: négatif avant, positif après.

b. $g(x) = x^4, g'(x) = 4x^3, g''(x) = 12x^2$ Le point $(0;0)$ est un zéro de g, g' et de g''. Mais ce n'est **pas un point d'inflexion** car le signe de g'' est positif avant et après $x = 0$ (courbe convexe partout)



Le tableau des signes de la dérivée seconde est nommé **tableau de convexité/concavité**. Dans les deux exemples précédents, on a

x		a	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graphe	$\frown$	P.I.	$\smile$

x		a	
$g''(x)$	$+$	0	$+$
Graphe	$\smile$	pas P.I.	$\smile$

Le type d'un PTH s'obtient facilement avec la dérivée seconde !

Soit $(a; f(a))$ un PTH de la fonction $y = f(x)$, c'est-à-dire que $f'(a) = 0$.

a. Si $f''(a) < 0$, c'est un maximum.
b. Si $f''(a) > 0$, c'est un minimum.
c. Si $f''(a) = 0$ **et** l e signe de f'' change en $x = a$, le point $(a; f(a))$ est un palier.
d. Si $f''(a) = 0$ mais le signe de f'' ne change pas en $x = a$, le tableau de concavité donnera le type !

6.7.11 Illustration de la dérivée seconde

Soit $x(t)$ la fonction qui indique au temps t l'éloignement (la position) par rapport à un point de référence d'un objet mobile. La dérivée, par rapport au temps, de $x(t)$ est $x'(t) = \frac{dx}{dt}$. Cette fonction représente la vitesse de l'objet au temps t. Décidons alors de renommer $v(t) = x'(t)$. La dérivée de la vitesse, ou dérivée seconde de la position, est $v'(t) = x''(t)$. Elle représente le taux de variation instantané de la vitesse au temps t : c'est l'accélération ! On la note $a(t) = v'(t) = x''(t)$.
Généralement les objets se déplacent plutôt dans un espace à 2 ou à 3 dimensions, pas le long d'une droite ! La position d'un objet est alors donnée par ses coordonnées, fonctions du temps, dans le système de référence $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Ainsi la position est décrite par un vecteur paramétrique $\overrightarrow{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.Le

vecteur-vitesse est $\vec{\dot{X}}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, et le vecteur-accélération est $\vec{\ddot{X}}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$. Evidemment à 3 dimensions la composante $z(t)$ doit être ajoutée .

6.8 Etude de fonction

Voici un petit résumé des points que l'on effectue lors d'une étude de fonction

a. **Calculs préalables**
- **Domaine** Déterminer le domaine de la fonction : D_f.
- **Parité et période.** Le graphe est-il symétrique ? Périodique ?
- **Tableau des signes.** Après avoir calculé les zéros. Aussi déterminer les intersections avec les axes.

b. **Comportement asymptotique**
- **Type des exclus.** Asymptote vertical (AV) ? Trou ? Saut ?
- **Et en $\pm\infty$?** Asymptote horizontale (HA) ? Oblique (AO) ? S'il y a une asymptote, éventuelle intersection entre le graphe et asymptote, et étude du reste.

c. **Dérivée**
- **Première dérivée.** Domaine de f' ($D_{f'}$) et ses zéros f'. Coordonnées et types des PTH. Autres points critiques (coordonnées et types), tableau de variation.
- **Dérivée seconde.** Concavité de la courbe. Points d'inflexion (coordonnées et pente tangente), tableau de concavité.

d. **Graphe soigné** utilisant les informations précédentes et éventuellement quelques autres points. Vérifier la cohérence entre le graphe et l'étude.

▶ **Exemples :**

a. Etudier la fonction $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

Domaine : Résoudre $x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow x(x+4) \geq 0$, on a $D_f =]-\infty; -4] \cup [0; \infty[$

Tableau des signes :

x		-4		0	
$f(x)$	$-$	-3	$\varnothing$	1	$+$

Asymptotes : Comme $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ a pour asymptotes $y = |x + 2|$, on a la droite d'équation $y = x + 1 + (x + 2) = 2x + 3$ comme asymptote oblique de f vers $+\infty$ et la droite d'équation $y = x + 1 - (x + 2) = -1$ comme asymptote horizontale de f vers $-\infty$.

Dérivée : Comme $f'(x) = 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$ ne s'annule pas sur D_f, il y a aucun point à tangente horizontale. De plus,

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, point à tangente verticale en $(0; 1)$

$\lim_{x \to -4^-} f'(x) = -\infty$, point à tangente verticale en $(-4; -3)$

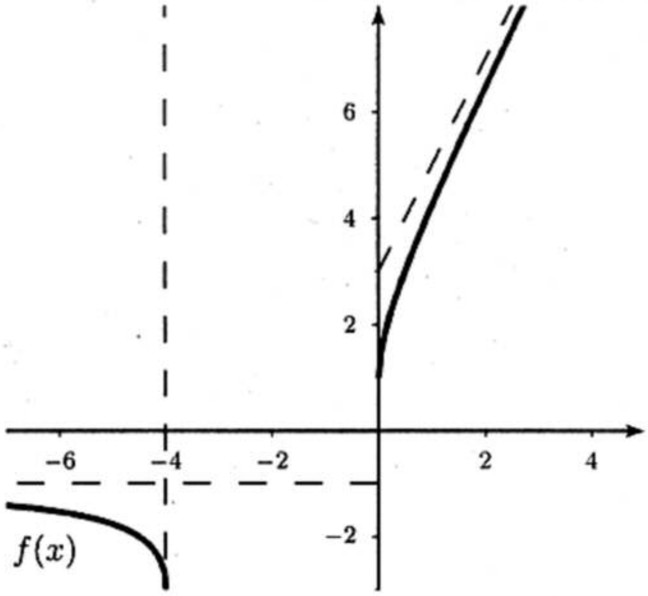
On a alors le tableau de variation suivant :

x		-4		0	
$f'(x)$	$-$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\updownarrow$	$\varnothing$	$\updownarrow$	$\nearrow$

Dérivée seconde : Comme $f''(x) = \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^3}$ ne s'annule pas sur D_f, il y a aucun point d'inflexion. On a alors le tableau de concavité suivant

x		-4		0	
$f''(x)$	$-$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$-$
$f(x)$	$\frown$	-3	$\varnothing$	1	$\frown$

Graphe :



b. **Etudier, sans la deuxième dérivée, la fonction $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + \frac{1}{2 \cdot \sin(x)}$**

Domaine : Résoudre $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Parité et période : f est une fonction impaire et périodique de période 2π. Il suffit donc de l'étudier sur $]0; \pi[$

Tableau des signes : On a $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + \frac{1}{2 \cdot \sin(x)} = \frac{4\sin^2(x)+1}{2\sin(x)}$. Le graphe de f st donnée par le tableau suivant :

x	$\cdots$	0		π	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	$\varnothing$	$+$	$\varnothing$	$\cdots$

Asymptotes : On a

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, asymptote verticale en $x = 0$

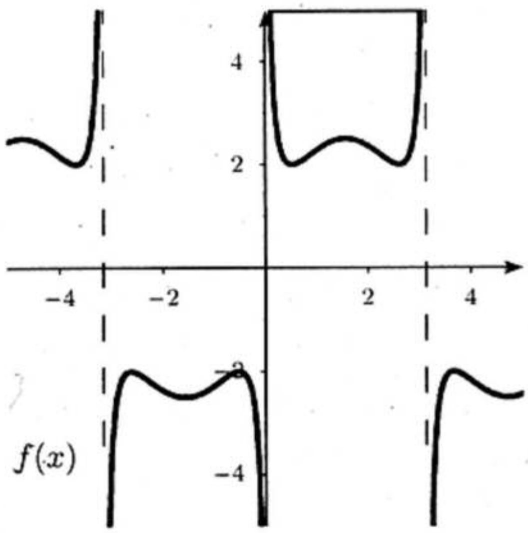
$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$, asymptote verticale en $x = \pi$

Dérivée : Comme $f'(x) = 2\cos(x) - \frac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} = \frac{\cos(x) \cdot \left(4\sin^2(x)-1\right)}{2\sin^2(x)}$ s'annule en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Le tableau de variation est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$	$\varnothing$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\varnothing$
$f(x)$	$\varnothing$	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$	$\bullet$	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$	$\varnothing$

On obtient un maximum en $P_1\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5}{2}\right)$ et deux minimum en $P_2\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$ et $P_3\left(\frac{5\pi}{6}; 2\right)$

Graphe :



6.9 Angle entre deux fonctions

6.9.1 Rappel

Un angle entre deux vecteurs est donnée par la formule suivante

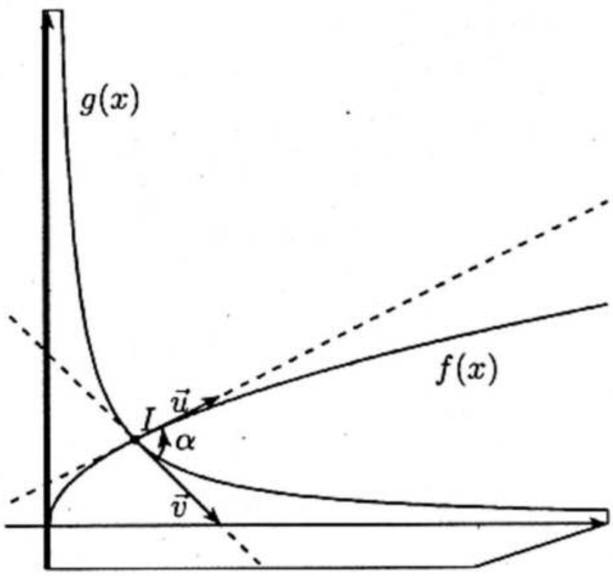
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \|}.$$

Nous avons vu, en première année, comment calculer l'angle entre deux droites données. En effet, il suffisait pour cela de calculer l'angle entre les vecteurs directeurs ou normaux aux droites données. Nous voulons maintenant calculer l'angle entre deux courbes données.

6.9.2 Angle aigu entre deux courbes

Nous allons donc nous inspirer de cette situation connue pour déterminer l'angle entre deux courbes en un point d'intersection $I(x_I\,;\,y_I)$. En effet, l'angle cherché est l'angle entre les deux tangentes aux courbes, en ce point d'intersection. Un vecteur directeur d'une tangente à une courbe f en un point $P(x_0\,;\,y_0)$ est $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs tangents aux courbes f et g en I. On a donc



$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)}$$

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$ alors l'angle aigu sera $\pi - \alpha$.

L'angle α sous lequel se coupent les courbes $f(x)$ et $g(x)$ en un point $I(x_I\,;\,y_I)$ peut être également calculé à l'aide de la formule suivante :

$$\boxed{\alpha = \left|\arctan\left(f'(x_I)\right) - \arctan\left(g'(x_I)\right)\right|}$$

Comme avant, si l'angle α obtenu est obtus, alors l'angle aigu est $\beta = \pi - \alpha$

▶ **Exemple :** Déterminer l'angle aigu entre les droites $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

On cherche l'abscisse du point d'intersection entre f et g :

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; x^3 = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$$

On calcule ensuite les dérivées des fonctions f et g

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ et } g'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Les vecteurs directeurs sont

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il s'en suit que

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{0.5}{\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{2}}\right) \simeq 71.57°$$

La deuxième méthode nous donne également la valeur de α...

$$\alpha = |\arctan(f'(x_I)) - \arctan(g'(x_I))| = |\arctan(0.5) - \arctan(-1)| \simeq 71.57°$$

6.10 Problèmes d'optimisation

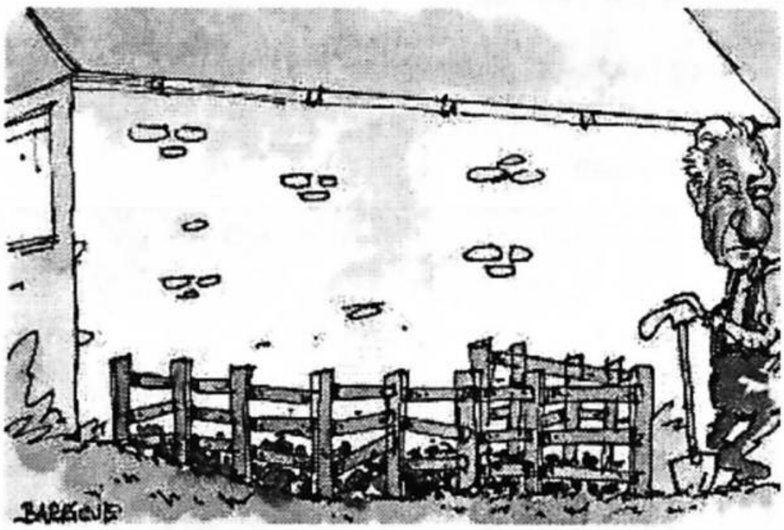
L'objectif de ce chapitre est d'être capable de maximiser ou alors minimiser une grandeur donnée. Considérons deux exemples :

▶ **Exemple :**

Comme chaque printemps, Aloys modifie l'emplacement de son jardin potager. Cette année, il décide de l'implanter le long de la façade sud du rural, de façon qu'il soit rectangulaire. Pour y parvenir, il dispose d'une clôture de 22 m. A quelle distance de la façade va-t-il planter ses deux piquets d'angle pour obtenir une aire maximale ?

Comment résoudre ce problème d'optimisation ?

Appelons x la distance des deux piquets d'angle avec la façade et y la distance entre les deux piquets.



On peut écrire :

$$2x + y = 22 \Rightarrow y = 22 - 2x$$

Donc, l'aire du jardin d'Aloys vaut

$$AIRE(x) = xy = x(22 - 2x)$$

En dérivant, on obtient,

$$AIRE'(x) = 1(22 - 2x) + x(-2) = -4x + 22$$

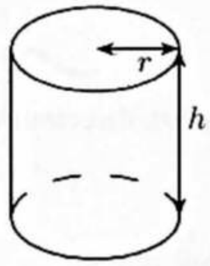
La fonction a un extremum en

$$-4x + 22 = 0 \Rightarrow x = 5,5$$

Comme $AIRE''(5,5) = -4 < 0$, il s'agit bien d'un maximum. Donc Aloys plantera les piquets à une distance de $x = 5,5$ m.

► **Exemple :**

Une nouvelle compagnie de boissons désire fabriquer des canettes cylindriques d'un litre tout en utilisant un minimum de matière. Comment doit-on choisir les dimensions (rayon r et hauteur h) d'une canette ?
Minimiser la matière revient à minimiser l'aire d'une canette. On a pour un cylindre :
Volume : $\pi r^2 h = 1$, aire : $2\pi rh + 2\pi r^2$ et fonction à minimiser :



$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Comme A est une fonction de plus d'une variable (r et h), on doit extraire h du volume et la substituer dans A. On obtient :

$$\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

On substitue et on obtient :

$$A(r) = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

En dérivant, on a : $A'(r) = \frac{-2}{r^2} + 4\pi r$
La fonction a un extremum en

$$A'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

r		$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \cong 0,54$	
$A'(x)$	$-$	0	$+$
$A(x)$	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$

Reste à vérifier, grâce au tableau des variations ci-contre par exemple, qu'il s'agit bien d'un minimum.
Avec ce rayon, on obtient : $r = 0,54\,\text{dm}$ $\quad h = 1,08\,\text{dm}$ $\quad$ aire $= 5,53\,\text{dm}^2$
Le cylindre optimal a un diamètre égal à sa hauteur.

► **Important :**

Procédure d'optimisation

a. Déterminer les inconnues du problème ainsi que les équations qui les lient.
b. Indiquer l'intervalle des valeurs possibles pour les inconnues.
c. Déterminer la fonction à optimiser, si elle contient plus d'une variable, la réécrire, par substitution, comme une fonction d'une seule variable $f(x)$, où x est l'une des inconnues du problème.
d. Grâce à la dérivée, déterminer les PTH de la fonction
e. Vérifier que c'est bien l'extrema cherché
f. Trouver les solutions au problème donné

6.11 Fonctions logarithmiques et exponentielles

Pour rappel, la fonction $f(x) = a^x$ est appelée **exponentielle de base** a ($a > 0$ **et** $a \neq 1$). Cette fonction est une bijection sur $\mathbb{R} \rightarrow]0;\infty[$. la fonction réciproque de l'exponentielle de base a est appelée **logarithme de base** a, elle est notée $\log_a(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et est définie par

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y$$

Les logarithmes vérifient les propriétés suivantes

$$\log_a(y) = x \Leftrightarrow y = a^x \qquad a^{\log_a(x)} = x \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(a^x) = x \qquad \log_a(1) = 0 \qquad \log_a(x^p) = p \ \log_a(x)$$
$$\log_a(a) = 1 \qquad \log_a(x \ \ y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\sqrt[p]{x}\right) = \frac{1}{p} \ \log_a(x)$$

Le logarithme de base 10 se note $\log(x)$. Le logarithme de base e se note $\ln(x)$ et non $\log_e(x)$. On l'appelle logarithme naturel
La formule de changement de base

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \frac{\log(x)}{\log(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

nous permet d'évaluer facilement un logarithme dans n'importe quelle base

Le nombre d'Euler e est défini par une suite d'intervalles emboîtés : c'est le nombre commun aux intervalles $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$.
On a donc la formule suivante :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \simeq 2.71$$

6.11.1 Dérivées des fonctions logarithmiques et exponentielles

a. **$(e^x)' = e^x$. L'exponentielle est sa propre dérivée.**

Preuve :

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h - 1\right)}{h}$$

En posant $t = \frac{1}{e^h - 1}$, on obtient

$$e^h - 1 = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow e^h = \frac{1}{t} + 1 \Rightarrow h = \ln\left(\frac{1}{t} + 1\right).$$

De plus, si $h \to 0$ alors $t \to \infty$. Donc,

$$(e^x)' = e^x \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} = e^x \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t} = e^x \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)} = e^x \frac{1}{\ln(e)} = e^x \quad \square$$

► **Exemples :**

a) $f(x) = e^{-x}$ alors $f'(x) = (-x)'e^{-x} = -e^{-x}$

b) $f(x) = e^{5x}$ alors $f'(x) = (5x)'e^{5x} = 5e^{5x}$

c) $f(x) = xe^x$ alors $f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

b. **$(b^x)' = \ln(b) \cdot b^x$. L'exponentielle n'est pas sa propre dérivée si $b \neq e$.**

Preuve :

$$(b^x)' = \left(e^{\ln(b^x)}\right)' = \left(e^{x\ln(b)}\right)' = \ln(b) \cdot e^{x\ln(b)} = \ln(b) \ \ b^x$$

$\square$

► **Exemples :**

a) $f(x) = 8^x$ alors $f'(x) = \ln(8) \cdot 8^x$

b) $f(x) = 3^{5x}$ alors $f'(x) = (5x)'\ln(3) \cdot 3^{5x} = 5\ln(3) \cdot 3^{5x}$

c) $f(x) = x \cdot 7^{-x}$ alors $f'(x) = (x)'7^{-x} + x(7^{-x})' = 7^{-x} - x\ln(7) \cdot 7^{-x} = 7^{x}(1 - x\ln(7))$

c. **$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$. Dérivée du logarithme naturel.**

Preuve :

Comme le logarithme naturel est la fonction inverse de l'exponentielle de base e, on a :

$$x = e^{\ln(x)}$$

En dérivant chaque côté de l'égalité on obtient :

$$(x)' = (e^{\ln(x)})' \;\Rightarrow\; 1 = (\ln(x))'\underbrace{e^{\ln(x)}}_{x} \;\Rightarrow\; 1 = (\ln(x))'x \;\Rightarrow\; (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$\square$

► **Exemples :**

a) $f(x) = \ln(2x)$ alors $f'(x) = (2x)' \cdot (\ln(2x))' = 2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$
b) $f(x) = \ln(ax)$ alors $f'(x) = (ax)' \cdot (\ln(ax))' = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$
c) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ alors $f'(x) = (x)' \cdot \ln(x) + x \cdot (\ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

d. **$\log_a(x)]' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$. Dérivée du logarithme en base a.**

Preuve :

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \left(\frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

$\square$

e. **$[x^x]' = (\ln(x) + 1) \cdot x^x$. Dérivée de la fonction $y = x^x$.**

Preuve :

$$(x^x)' = \left(e^{\ln(x^x)}\right)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = (x\ln(x))' \cdot e^{x\ln(x)} = \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \tfrac{1}{x}\right) \cdot e^{x\ln(x)} = x^x\left(\ln(x) + 1\right)$$

$\square$

6.11.2 Comportements conflictuels

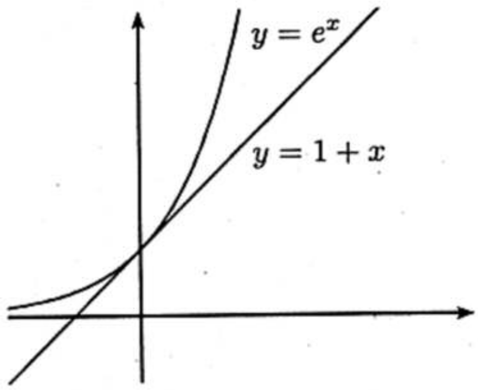
Les fonctions puissance ($y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), exponentielle ($y = e^x$) et logarithme ($y = \log x$) tendent vers l'infini à l'infini. Lors de divisions, cela peut créer des problèmes. Pour décider de la valeur limite du quotient, nous disposons des résultats suivants :

a. **Conflit 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \to$ l'exponentielle l'emporte sur les puissances**

Preuve :

On estime $\frac{x^n}{e^x}$ à l'aide d'une inégalité : $e^x \geq 1 + x$

$$\frac{x^n}{e^x} \overset{x\geq 0}{=} \left[\frac{\sqrt{x}}{e^{x/2n}}\right]^{2n} \leq \left[\frac{\sqrt{x}}{1 + \frac{x}{2n}}\right]^{2n} = \left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2n}}\right]^{2n}$$



Lorsque $x \to +\infty$, l'expression $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2n}$ tend vers l'infini, ainsi [...] tend vers 0 et $[...]^{2n}$ tend vers 0.

Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2n}}\right]^{2n} = 0$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

□

b. **Conflit 2 :** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = 0 \to$ les puissances de x l'emportent sur les puissances de ln

Preuve :

Pour calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x}$, on procède par changement de variable, en posant $u = \ln x$, ou $x = e^u$.

$$\frac{\ln^n x}{x} = \frac{\ln^n (e^u)}{e^u} = \frac{[\ln (e^u)]^n}{e^u} = \frac{u^n}{e^u} = \frac{\text{puissance}}{\text{exponentielle}}$$

Si $x \to +\infty$, le nombre $u = \ln(x)$ tend aussi vers l'infini et l'expression ci-dessus tend vers 0
D'où : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u^n}{e^u} = 0$. □

c. **Conflit 3 :** $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \cdot \ln^n(x) = 0 \to x$ l'emporte sur ln

Preuve :

Pour montrer que $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \;\; \ln^n(x) = 0$, on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{u}$

$$x \cdot \ln^n x = \frac{1}{u} \cdot \ln^n \left(\frac{1}{u}\right) = \frac{(-\ln(u))^n}{u} = \pm\frac{\ln^n u}{u}.$$

Si $x \overset{>}{\to} 0$, alors $u = \frac{1}{x}$ tend vers l'infini et $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \;\; \ln^n(x) = \lim_{u\to+\infty} \left(\pm\frac{\ln^n u}{u}\right) = 0$

□

Ces résultats (et d'autres qui en découlent) se trouvent dans le formulaire en page 74.

► **Important :**

Mémoriser le slogan **"A l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les puissances et les puissances l'emportent sur le logarithme."**